

JAMES STEWART

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

TRASCENDENTES TEMPRANAS

Octava edición

CÁLCULO

DE VARIAS VARIABLES
TRASCENDENTES TEMPRANAS

OCTAVA EDICIÓN

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY Y UNIVERSITY OF TORONTO

CÁLCULO

DE VARIAS VARIABLES
TRASCENDENTES TEMPRANAS
OCTAVA EDICIÓN

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY Y UNIVERSITY OF TORONTO

Traducción

Ana Elizabeth García Hernández

Enrique C. Mercado González

Revisión técnica

Ileana Borja Tecuatl
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN

Hiram Cárdenas Gordillo
Facultad de Ingeniería, Universidad La Salle, México

Pedro Vásquez Urbano
Universidad de Puerto Rico - Mayaguez

Gilgamesh Luis Raya
Universidad Politécnica de Pachuca, México

Antonieta Martínez Velasco
Universidad Panamericana, campus Ciudad de México

Luz Citlaly Estrada López
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad de Guadalajara, México

José Ignacio Cuevas González
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Armando Silva Castillo
Universidad Politécnica de Pachuca, México



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



***Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas,* octava edición.**
James Stewart

Director Higher Education Latinoamérica:
Renzo Casapía Valencia

Gerente editorial Latinoamérica:
Jesús Mares Chacón

Editor Senior Hardside:
Pablo Miguel Guerrero Rosas

Editora de desarrollo:
Abril Vega Orozco

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Karla Paola Benítez García

Imagen de portada:
© David Carrick | Dreamstime.com

Composición tipográfica:
Humberto Núñez Ramos
Angélica Toledo Tirado
Alejandro Hernández Hernández

Traducido del libro *Multivariable Calculus: Early Transcendentals*, Eighth Edition, International Metric Version. James Stewart.
Publicado en inglés por Cengage Learning ©2016.
ISBN: 978-1-305-26673-5

Datos para catalogación bibliográfica:
Stewart, James. *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas,* octava edición.
ISBN: 978-607-526-553-7

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 20 19 18 17

A mi familia

Contenido

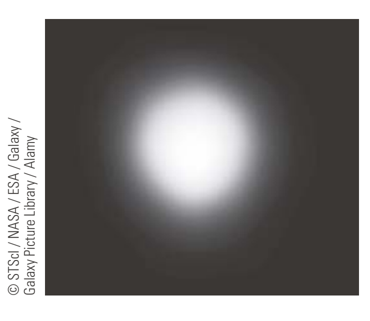
PREFACIO xiii
AL ESTUDIANTE xxv

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares 639


© Stocktrek / Stockbyte / Getty Images

10.1 Curvas definidas por ecuaciones paramétricas 640
Proyecto de laboratorio • Circunferencias que corren alrededor de circunferencias 648
10.2 Cálculo con curvas paramétricas 649
Proyecto de laboratorio • Curvas de Bézier 657
10.3 Coordenadas polares 658
Proyecto de laboratorio • Familias de curvas polares 668
10.4 Áreas y longitudes en coordenadas polares 669
10.5 Secciones cónicas 674
10.6 Secciones cónicas en coordenadas polares 682
Repaso 689
Problemas adicionales 692

11 Sucesiones y series infinitas 693


© STScI / NASA / ESA / Galaxy / Galaxy Picture Library / Alamy

11.1 Sucesiones 694
Proyecto de laboratorio • Sucesiones logísticas 707
11.2 Series 707
11.3 La prueba de la integral y estimaciones de sumas 719
11.4 Pruebas por comparación 727
11.5 Series alternantes 732
11.6 Convergencia absoluta y las pruebas de la razón y la raíz 737
11.7 Estrategia para probar series 744

11.8 Series de potencias 746
11.9 Representación de funciones como series de potencias 752
11.10 Series de Taylor y de Maclaurin 759
Proyecto de laboratorio • Un límite escurridizo 773
Proyecto de redacción • Cómo descubrió Newton las series binomiales 773
11.11 Aplicaciones de los polinomios de Taylor 774
Proyecto de aplicación • Radiación de las estrellas 783
Repaso 784
Problemas adicionales 787

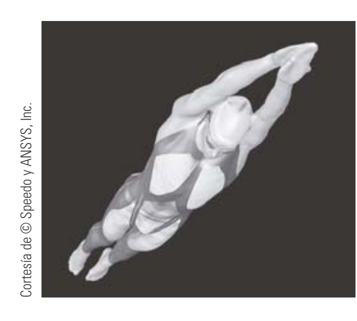
12 Vectores y la geometría del espacio 791

12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 792
12.2 Vectores 798
12.3 El producto punto 807
12.4 El producto cruz 814
Proyecto de descubrimiento • La geometría de un tetraedro 823
12.5 Ecuaciones de rectas y planos 823
Proyecto de laboratorio • Poner la tridimensionalidad en perspectiva 833
12.6 Cilindros y superficies cuádricas 834
Repaso 841
Problemas adicionales 844

13 Funciones vectoriales 847

13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio 848
13.2 Derivadas e integrales de funciones vectoriales 855
13.3 Longitud de arco y curvatura 861
13.4 Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración 870
Proyecto de aplicación • Leyes de Kepler 880
Repaso 881
Problemas adicionales 884

14 Derivadas parciales 887


Cortesía de © Speedo y ANSYS, Inc.

14.1 Funciones de varias variables 888

14.2 Límites y continuidad 903

14.3 Derivadas parciales 911

14.4 Planos tangentes y aproximaciones lineales 927

Proyecto de aplicación • El Speedo LZR Racer 936

14.5 La regla de la cadena 937

14.6 Derivadas direccionales y el vector gradiente 946

14.7 Valores máximos y mínimos 959

Proyecto de aplicación • Diseño de un contenedor de desechos 970

Proyecto de descubrimiento • Aproximaciones cuadráticas y puntos críticos 970

14.8 Multiplicadores de Lagrange 971

Proyecto de aplicación • La ciencia de los cohetes 979

Proyecto de aplicación • Optimización de hidroturbinas 980

Repaso 981

Problemas adicionales 985

15 Integrales múltiples 987


© Juan Gaertner/ Shutterstock.com

15.1 Integrales dobles en rectángulos 988

15.2 Integrales dobles en regiones generales 1001

15.3 Integrales dobles en coordenadas polares 1010

15.4 Aplicaciones de las integrales dobles 1016

15.5 Área de una superficie 1026

15.1 Integrales dobles en rectángulos 988

15.2 Integrales dobles en regiones generales 1001

15.3 Integrales dobles en coordenadas polares 1010

15.4 Aplicaciones de las integrales dobles 1016

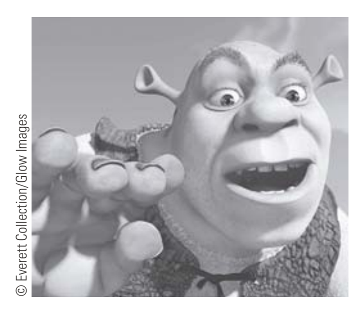
15.5 Área de una superficie 1026

15.6 Integrales triples 1029

Proyecto de descubrimiento • Volúmenes de hiperesferas 1040

15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas 1040
Proyecto de descubrimiento • La intersección de tres cilindros 1044
15.8 Integrales triples en coordenadas esféricas 1045
Proyecto de aplicación • Carrera sobre ruedas 1052
15.9 Cambio de variables en integrales múltiples 1052
Repaso 1061
Problemas adicionales 1065

16 Cálculo vectorial 1067


© Everett Collection/Glow Images

16.1 Campos vectoriales 1068
16.2 Integrales de línea 1075
16.3 El teorema fundamental para integrales de línea 1087
16.4 Teorema de Green 1096
16.5 Rotacional y divergencia 1103
16.6 Superficies paramétricas y sus áreas 1111
16.7 Integrales de superficie 1122
16.8 Teorema de Stokes 1134
Proyecto de redacción • Tres hombres y dos teoremas 1140
16.9 El teorema de la divergencia 1141
16.10 Resumen 1147
Repaso 1148
Problemas adicionales 1151

17 Ecuaciones diferenciales de segundo orden 1153


© CS Stock/Shutterstock.com

17.1 Ecuaciones lineales de segundo orden 1154
17.2 Ecuaciones lineales no homogéneas 1160
17.3 Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden 1168
17.4 Soluciones con series de potencias 1176
Repaso 1181

Apéndices A1

F Demostración de teoremas A2
G Números complejos A5
H Respuestas a los ejercicios con número impar A15

Índice analítico I1

Referencias R1

Prefacio

Esta *versión métrica internacional* difiere de la versión regular de *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, octava edición, de varias maneras:

Las unidades usadas en casi todos los ejemplos y ejercicios han sido cambiadas del sistema tradicional de Estados Unidos a unidades métricas. Hay un número reducido de excepciones: en algunas aplicaciones de ingeniería (principalmente en la sección 8.3) puede ser útil para algunos ingenieros estar familiarizados con las unidades usadas en Estados Unidos. Y yo quise conservar algunos ejercicios (por ejemplo, los relacionados con el beisbol) donde sería inapropiado usar unidades métricas.

He cambiado los ejemplos y ejercicios relacionados con datos del mundo real para que sean de naturaleza más internacional, de manera que la inmensa mayoría de ellos procede ahora de países distintos a Estados Unidos. Por ejemplo, ahora hay ejercicios y ejemplos concernientes a las tarifas postales en Hong Kong; la deuda pública canadiense; las tasas de desempleo en Australia; las horas de luz del sol en Ankara, Turquía; las isotermas en China; el porcentaje de la población en la Argentina rural; poblaciones de Malasia, Indonesia, México e India, y consumo de energía eléctrica en Ontario, entre muchos otros.

Además de cambiar ejercicios para que las unidades sean métricas y los datos tengan un sabor más internacional, otros ejercicios han sido cambiados también, el resultado de lo cual es que alrededor de 10% de los ejercicios son diferentes de los de la versión regular.

Filosofía del libro

El arte de enseñar, dijo Mark Van Doren, es el arte de ayudar al descubrimiento. Yo he tratado de escribir un libro que ayude a los estudiantes a descubrir el cálculo, tanto por su eficacia práctica como por su sorprendente belleza. En esta edición, como en las siete primeras, intento transmitir al estudiante una noción de la utilidad del cálculo y desarrollar competencia técnica, pero también me empeño en dar cierta apreciación de la belleza intrínseca del tema. Newton experimentó indudablemente una sensación de triunfo cuando hizo sus grandes descubrimientos. Yo deseo que los estudiantes compartan parte de esa emoción.

El énfasis está en la comprensión de conceptos. Pienso que casi todos están de acuerdo en que esta debería ser la meta primaria de la enseñanza de cálculo. De hecho, el ímpetu del actual movimiento de reforma del cálculo procedió de la Conferencia de Tulane de 1986, la cual formuló como su primera recomendación:

Concentrarse en la comprensión conceptual.

He tratado de implementar esta meta mediante *la regla de tres*: "Los temas deben presentarse geométrica, numérica y algebraicamente". La visualización, la experimentación numérica y gráfica y otros enfoques han cambiado la forma en que se enseña el razonamiento conceptual de maneras fundamentales. Más recientemente, la regla de tres se ha ampliado para convertirse en la *regla de cuatro* enfatizando también el punto de vista verbal o descriptivo.

Al escribir esta octava edición, mi premisa fue que sea posible alcanzar comprensión conceptual y retener todavía las mejores tradiciones del cálculo tradicional. El libro contiene elementos de reforma, pero en el contexto de un plan de estudios tradicional.

Versiones alternas

He escrito otros libros de texto de cálculo que podrían ser preferibles para algunos profesores. La mayoría de ellos también se presenta en versiones de una y varias variables.

- *Calculus: Early Trascendentals*, octava edición, versión métrica internacional, es similar al presente libro de texto excepto que las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas se cubren en el primer semestre.
- *Essential Calculus*, segunda edición, edición internacional, es un libro mucho más breve (840 páginas), que, sin embargo, contiene casi todos los temas de *Calculus*, octava edición, versión métrica internacional. La relativa brevedad se logra mediante una exposición más breve de algunos temas al trasladar algunas características al sitio web.
- *Essential Calculus: Early Transcendentals*, segunda edición, edición internacional, se asemeja a *Essential Calculus*, edición internacional, pero las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas se cubren en el capítulo 3.
- *Calculus: Concepts and Contexts*, cuarta edición, edición métrica internacional, enfatiza la comprensión conceptual con más fuerza todavía que este libro. La cobertura de temas no es enciclopédica y el material sobre funciones trascendentes y sobre ecuaciones paramétricas se entreteje a lo largo del libro en lugar de ser tratado en capítulos separados.
- *Calculus: Early Vectors* presenta los vectores y funciones vectoriales en el primer semestre y los integra a todo lo largo del libro. Este es conveniente para estudiantes que toman cursos de ingeniería y física al mismo tiempo que el de cálculo.
- *Brief Applied Calculus*, edición internacional, está dirigido a estudiantes de negocios, ciencias sociales y ciencias de la vida.
- *Biocalculus: Calculus for the Life Sciences* intenta mostrar a los estudiantes de las ciencias de la vida cómo se relaciona el cálculo con la biología.
- *Biocalculus: Calculus, Probability, and Statistics for the Life Sciences* abarca todo el contenido de *Biocalculus: Calculus for the Life Sciences*, así como tres capítulos adicionales que cubren probabilidad y estadística.

¿Qué hay de nuevo en la octava edición?

Los cambios resultaron de conversar con mis colegas y estudiantes en la Universidad de Toronto y de leer revistas, así como de sugerencias de usuarios y revisores. He aquí algunas de las muchas mejoras que he incorporado en esta edición:

- Los datos en los ejemplos y ejercicios han sido actualizados para ser más oportunos.
- Se han añadido nuevos ejemplos (véanse los ejemplos 11.2.5 y 14.3.3), y las soluciones de algunos de los ejemplos existentes se ampliaron.
- Se agregó un nuevo proyecto: en el proyecto *El Speedo LZR Racer* (página 936) se explica que este traje de baño reduce la fricción en el agua y, como consecuencia, se han roto muchos récords en la natación. Se pregunta a los estudiantes por qué un pequeño decremento en la fricción puede tener un efecto tan grande en el desempeño.
- He reestructurado el capítulo 15 (Integrales múltiples) combinando las dos primeras secciones para que las integrales iteradas se traten antes.



- Más de 20% de los ejercicios en cada capítulo son nuevos. He aquí algunos de mis favoritos: 12.5.81, 12.6.29-30, 14.6.65-66. Además, hay nuevos y buenos Problemas adicionales. (Véase el problema 8 de la página 986.)

Caraterísticas

Ejercicios conceptuales

El modo más importante de fomentar la comprensión conceptual es mediante los problemas que se asignan. Con ese fin he ideado varios tipos de problemas. Algunos conjuntos de ejercicios comienzan con peticiones de explicar los significados de conceptos básicos de la sección. (Véanse, por ejemplo, los primeros ejercicios de las secciones 11.2, 14.2 y 14.3.) De igual forma, todas las secciones de repaso comienzan con una Verificación de conceptos y un Examen verdadero-falso. Otros ejercicios ponen a prueba la comprensión conceptual por medio de gráficas o tablas (véanse los ejercicios 10.1.24-27, 11.10.2, 13.2.1-2, 13.3.33-39, 14.1.1-2, 14.1.32-38, 14.1.41-44, 14.3.3-10, 14.6.1-2, 14.7.3-4, 15.1.6-8, 16.1.11-18, 16.2.17-18 y 16.3.1-2).

Otro tipo de ejercicios usa la descripción verbal para probar la comprensión conceptual. Valoro particularmente los problemas que combinan y comparan los enfoques gráfico, numérico y algebraico.

Conjuntos de ejercicios graduados

Cada conjunto de ejercicios está cuidadosamente graduado, progresando de ejercicios conceptuales básicos y problemas de desarrollo de habilidades a problemas más desafiantes que implican aplicaciones y comprobaciones.

Datos del mundo real

Mis asistentes y yo dedicamos mucho tiempo a buscar en bibliotecas, hacer contacto con compañías y organismos gubernamentales y realizar búsquedas en internet en pos de datos interesantes del mundo real para presentar, motivar e ilustrar los conceptos del cálculo. En consecuencia, muchos de los ejemplos y ejercicios tienen que ver con funciones definidas por esos datos numéricos o gráficas. Las funciones de dos variables son ilustradas por una tabla de valores del índice viento-frío como una función de temperatura del aire y velocidad del viento (ejemplo 14.1.12). Las derivadas parciales son presentadas en la sección 14.3 examinando una columna en una tabla de valores del índice de calor (temperatura del aire percibida) como una función de la temperatura real y la humedad relativa. Este ejemplo se retoma después en relación con aproximaciones lineales (ejemplo 14.4.3). Las derivadas direccionales se presentan en la sección 14.6 usando un mapa de contorno de temperatura para estimar la razón de cambio de la temperatura en Reno en la dirección de Las Vegas. Integrales dobles se usan para estimar la nevada promedio en Colorado del 20 y 21 de diciembre de 2006 (ejemplo 15.1.9). Los campos vectoriales se presentan en la sección 16.1 mediante descripciones de campos vectoriales de velocidad reales, que muestran los patrones de viento de la bahía de San Francisco.

Proyectos

Una forma de motivar a los estudiantes y convertirlos en aprendices activos es ponerlos a trabajar (quizás en grupos) en amplios proyectos que les den una sensación de logro sustancial al completarlos. He incluido cuatro tipos de proyectos: los *Proyectos de aplicación* que contienen aplicaciones diseñadas para estimular la imaginación de los alumnos. El proyecto posterior a la sección 14.8 usa multiplicadores de Lagrange para determinar las masas de las tres etapas de un cohete a fin de minimizar la masa total mientras que a la vez se permite que alcance una velocidad deseada. Los *Proyectos de laboratorio* implican tecnología; el que sigue a la sección 10.2 muestra cómo utilizar las curvas de Bézier para diseñar formas que representan letras para una impresora láser. Los *Proyectos de descubrimiento* exploran aspectos de geometría: tetraedros (después de la

sección 12.4), hiperesferas (después de la sección 15.6) e intersecciones de tres cilindros (después de la sección 15.7). El *Proyecto de redacción* que está después de la sección 17.8 examina los orígenes históricos y físicos del teorema de Green y del teorema de Stokes y las interacciones de los tres hombres involucrados. En el Manual del Instructor (*Instructor's Guide**) se pueden encontrar muchos proyectos.

Herramientas para enriquecer el cálculo*

TEC es un suplemento del texto y busca enriquecer y complementar su contenido. (Ahora está disponible en el eBook vía *CourseMate** y *Enhanced WebAssign*.* *Visuals* y *Modules* selectos están disponibles en *www.stewartcalculus.com*.*) Desarrollado por Harvey Keynes, Dan Clegg, Hubert Hohn y yo, TEC usa un enfoque de descubrimiento y exploración. En secciones del libro donde la tecnología es particularmente apropiada, iconos al margen dirigen a los estudiantes a TEC Modules que brindan un entorno de laboratorio en el que pueden explorar el tema de maneras diversas y en niveles diferentes. **Los *Visuals* son animaciones de figuras en el texto; los *Modules* son actividades más elaboradas e incluyen ejercicios**. Los profesores pueden optar por involucrarse en diversos niveles, desde simplemente alentar a los alumnos a usar los *Visuals* y *Modules* para su exploración independiente hasta asignar ejercicios específicos de los incluidos en cada *Module* o crear ejercicios, prácticas y proyectos adicionales que hagan uso de los *Visuals* y *Modules*.

TEC incluye asimismo *Homework Hints* para ejercicios representativos (usualmente con número impar) en cada sección del texto, indicados mediante la impresión del número del ejercicio en gris. Estas sugerencias suelen presentarse en forma de preguntas e intentan imitar a un asistente de aprendizaje eficaz funcionando como un tutor mudo. Están hechas para no revelar de la solución real más que lo mínimamente necesario para hacer progresos adicionales.

Enhanced WebAssign*

La tecnología ya tiene impacto en la manera en que se asignan tareas a los estudiantes, particularmente en grupos grandes. El uso de tareas en línea es creciente y su atractivo depende de la facilidad de empleo, la precisión de las calificaciones y la confiabilidad. Con la octava edición se ha trabajado con la comunidad del cálculo y *WebAssign* para desarrollar un sistema de tareas en línea. Hasta 70% de los ejercicios en cada sección se puede asignar como tareas en línea, incluidos formatos de respuesta libre, opción múltiple y partes múltiples.

Este sistema también contiene *Active Examples**, en los que los estudiantes son guiados en pequeños tutoriales paso a paso a través de ejemplos del texto, con vínculos con el libro de texto y soluciones en video.

Sitio web

Visite CengageBrain.com* o stewartcalculus.com* para estos materiales adicionales:

- *Homework Hints*
- *Algebra Review*
- *Lies My Calculator and Computer Told Me*
- *History of Mathematics* con vínculos a los mejores sitios históricos
- *Additional Topics* (con conjuntos de ejercicios): series de Fourier, fórmulas para el término residuo en las series de Taylor, rotación de ejes
- *Archived Problems* (ejercicios desafiantes que aparecieron en ediciones anteriores, junto con sus soluciones)
- *Challenge Problems* (algunas de las secciones de Problemas adicionales de ediciones anteriores)

*Este material se encuentra solo disponible en inglés.

- Vínculos de temas especiales con recursos externos de la web
- *Selected Visuals* y *Modules de Tools for Enriching Calculus* (TEC)

Contenido

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares Este capítulo presenta curvas paramétricas y polares y aplica los métodos del cálculo en ellas. Las curvas paramétricas son adecuadas para proyectos de laboratorio; las dos que se presentan aquí implican a familias de curvas y curvas de Bézier. Un breve tratamiento de las secciones cónicas en coordenadas polares prepara el camino para las leyes de Kepler en el capítulo 13.

11 Sucesiones y series infinitas Las pruebas de convergencia tienen justificaciones intuitivas (véase la página 719), así como comprobaciones formales. Estimaciones numéricas de sumas de series se basan en la prueba que se haya usado para comprobar la convergencia. Se hace énfasis en la serie y polinomios de Taylor y sus aplicaciones a la física. Las estimaciones de error incluyen las de dispositivos de graficación.

12 Vectores y la geometría del espacio El material sobre geometría analítica tridimensional y vectores se divide en dos capítulos. El capítulo 12 trata con vectores, los productos punto y cruz, rectas, planos y superficies.

13 Funciones vectoriales Este capítulo cubre las funciones con vectores como valores, sus derivadas e integrales, la longitud y curvatura de curvas en el espacio y la velocidad y aceleración a lo largo de curvas en el espacio, lo que culmina con las leyes de Kepler.

14 Derivadas parciales Las funciones de dos o más variables se estudian desde el punto de vista verbal, numérico, visual y algebraico. En particular, presento las derivadas parciales examinando una columna específica de una tabla de valores del índice de calor (temperatura del aire percibida) como una función de la temperatura real y la humedad relativa.

15 Integrales múltiples Los mapas de contorno y la regla del punto medio se utilizan para estimar la nevada promedio y temperatura promedio de regiones dadas. Las integrales dobles y triples se emplean para calcular probabilidades, áreas de superficies y (en proyectos) volúmenes de hiperesferas y volúmenes de intersecciones de tres cilindros. Se presentan coordenadas cilíndricas y esféricas en el contexto de evaluar integrales triples.

16 Cálculo vectorial Los campos vectoriales se presentan mediante imágenes de campos de velocidad que muestran patrones de viento de la bahía de San Francisco. Se enfatizan las semejanzas entre el teorema fundamental para integrales de línea, el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia.

17 Ecuaciones diferenciales Dado que las ecuaciones diferenciales de primer orden se cubren en el capítulo 9, este último capítulo trata con ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, su aplicación a resortes vibratorios y circuitos eléctricos y soluciones de series.

Complementos

Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, octava edición, versión métrica internacional se apoya en un conjunto completo de complementos desarrollados bajo mi dirección. Cada pieza ha sido diseñada para favorecer la comprensión del estudiante y facilitar la enseñanza creativa. Las tablas de las páginas xx-xxi describen cada uno de estos complementos.





Agradecimientos

La preparación de esta y las ediciones previas ha implicado mucho tiempo dedicado a leer los consejos razonados (aunque a veces contradictorios) de un gran número de perspicaces revisores. Agradezco enormemente el tiempo que ellos destinaron a comprender mi motivación para el enfoque adoptado. He aprendido algo de cada uno de ellos.

Revisores de la octava edición

Jay Abramson, *Arizona State University*
Adam Bowers, *University of California San Diego*
Neena Chopra, *The Pennsylvania State University*
Edward Dobson, *Mississippi State University*
Isaac Goldbring, *University of Illinois en Chicago*
Lea Jenkins, *Clemson University*
Rebecca Wahl, *Butler University*

Revisores de tecnología

Maria Andersen, *Muskegon Community College*
Eric Aurand, *Eastfield College*
Joy Becker, *University of Wisconsin–Stout*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama en Huntsville*
Monica Brown, *University of Missouri–St. Louis*
Roxanne Byrne, *University of Colorado en Denver y Health Sciences Center*
Teri Christiansen, *University of Missouri–Columbia*
Bobby Dale Daniel, *Lamar University*
Jennifer Daniel, *Lamar University*
Andras Domokos, *California State University, Sacramento*
Timothy Flaherty, *Carnegie Mellon University*
Lee Gibson, *University of Louisville*
Jane Golden, *Hillsborough Community College*
Semion Gutman, *University of Oklahoma*
Diane Hoffoss, *University of San Diego*
Lorraine Hughes, *Mississippi State University*
Jay Jahangiri, *Kent State University*
John Jernigan, *Community College of Philadelphia*
Brian Karasek, *South Mountain Community College*
Jason Kozinski, *University of Florida*
Carole Krueger, *The University of Texas en Arlington*
Ken Kubota, *University of Kentucky*
John Mitchell, *Clark College*
Donald Paul, *Tulsa Community College*
Chad Pierson, *University of Minnesota, Duluth*
Lanita Presson, *University of Alabama en Huntsville*
Karin Reinhold, *State University of New York en Albany*
Thomas Riedel, *University of Louisville*
Christopher Schroeder, *Morehead State University*
Angela Sharp, *University of Minnesota, Duluth*
Patricia Shaw, *Mississippi State University*
Carl Spitznagel, *John Carroll University*
Mohammad Tabanjeh, *Virginia State University*
CPT. Koichi Takagi, *United States Naval Academy*
Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*
Roger Werbylo, *Pima Community College*
David Williams, *Clayton State University*
Zhuan Ye, *Northern Illinois University*

Revisores de ediciones anteriores

B. D. Aggarwala, *University of Calgary*
John Alberghini, *Manchester Community College*
Michael Albert, *Carnegie Mellon University*
Daniel Anderson, *University of Iowa*
Amy Austin, *Texas A&M University*
Donna J. Bailey, *Northeast Missouri State University*
Wayne Barber, *Chemeketa Community College*
Marilyn Belkin, *Villanova University*
Neil Berger, *University of Illinois, Chicago*
David Berman, *University of New Orleans*

Anthony J. Bevelacqua, *University of North Dakota*
Richard Biggs, *University of Western Ontario*
Robert Blumenthal, *Oglethorpe University*
Martina Bode, *Northwestern University*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*
Jay Bourland, *Colorado State University*
Philip L. Bowers, *Florida State University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama en Huntsville*
Stephen W. Brady, *Wichita State University*
Michael Breen, *Tennessee Technological University*
Robert N. Bryan, *University of Western Ontario*
David Buchthal, *University of Akron*
Jenna Carpenter, *Louisiana Tech University*
Jorge Cassio, *Miami-Dade Community College*
Jack Ceder, *University of California, Santa Barbara*
Scott Chapman, *Trinity University*
Zhen-Qing Chen, *University of Washington—Seattle*
James Choike, *Oklahoma State University*
Barbara Cortzen, *DePaul University*
Carl Cowen, *Purdue University*
Philip S. Crooke, *Vanderbilt University*
Charles N. Curtis, *Missouri Southern State College*
Daniel Cyphert, *Armstrong State College*
Robert Dahlin
M. Hilary Davies, *University of Alaska Anchorage*
Gregory J. Davis, *University of Wisconsin–Green Bay*
Elias Deeba, *University of Houston–Downtown*
Daniel DiMaria, *Suffolk Community College*
Seymour Ditor, *University of Western Ontario*
Greg Dresden, *Washington and Lee University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Kenn Dunn, *Dalhousie University*
Dennis Dunninger, *Michigan State University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
David Ellis, *San Francisco State University*
John Ellison, *Grove City College*
Martin Erickson, *Truman State University*
Garret Etgen, *University of Houston*
Theodore G. Faticoni, *Fordham University*
Laurene V. Fausett, *Georgia Southern University*
Norman Feldman, *Sonoma State University*
Le Baron O. Ferguson, *University of California—Riverside*
Newman Fisher, *San Francisco State University*
José D. Flores, *The University of South Dakota*
William Francis, *Michigan Technological University*
James T. Franklin, *Valencia Community College, East*
Stanley Friedlander, *Bronx Community College*
Patrick Gallagher, *Columbia University–New York*
Paul Garrett, *University of Minnesota–Minneapolis*
Frederick Gass, *Miami University of Ohio*
Bruce Gilligan, *University of Regina*
Matthias K. Gobbert, *University of Maryland, Baltimore County*
Gerald Goff, *Oklahoma State University*
Stuart Goldenberg, *California Polytechnic State University*
John A. Graham, *Buckingham Browne & Nichols School*
Richard Grassl, *University of New Mexico*
Michael Gregory, *University of North Dakota*
Charles Groetsch, *University of Cincinnati*
Paul Triantafilos Hadavas, *Armstrong Atlantic State University*
Salim M. Haïdar, *Grand Valley State University*
D. W. Hall, *Michigan State University*
Robert L. Hall, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Howard B. Hamilton, *California State University, Sacramento*
Darel Hardy, *Colorado State University*
Shari Harris, *John Wood Community College*
Gary W. Harrison, *College of Charleston*
Melvin Hausner, *New York University/Courant Institute*
Curtis Herink, *Mercer University*
Russell Herman, *University of North Carolina en Wilmington*
Allen Hesse, *Rochester Community College*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
James F. Hurley, *University of Connecticut*
Amer Iqbal, *University of Washington—Seattle*
Matthew A. Isom, *Arizona State University*
Gerald Janusz, *University of Illinois en Urbana-Champaign*
John H. Jenkins, *Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott Campus*
Clement Jeske, *University of Wisconsin, Platteville*
Carl Jockusch, *University of Illinois en Urbana-Champaign*
Jan E. H. Johansson, *University of Vermont*
Jerry Johnson, *Oklahoma State University*
Zsuzsanna M. Kadas, *St. Michael's College*
Nets Katz, *Indiana University Bloomington*
Matt Kaufman

Matthias Kawski, *Arizona State University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Robert L. Kelley, *University of Miami*
Akhtar Khan, *Rochester Institute of Technology*
Marianne Korten, *Kansas State University*
Virgil Kowalik, *Texas A&I University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Leonard Krop, *DePaul University*
Mark Krusemeyer, *Carleton College*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Christopher C. Leary, *State University of New York en Geneseo*
David Leeming, *University of Victoria*
Sam Lesseig, *Northeast Missouri State University*
Phil Locke, *University of Maine*
Joyce Longman, *Villanova University*
Joan McCarter, *Arizona State University*
Phil McCartney, *Northern Kentucky University*
Igor Malyshev, *San Jose State University*
Larry Mansfield, *Queens College*
Mary Martin, *Colgate University*
Nathaniel F. G. Martin, *University of Virginia*
Gerald Y. Matsumoto, *American River College*
James McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Tom Metzger, *University of Pittsburgh*
Richard Millspaugh, *University of North Dakota*
Lon H. Mitchell, *Virginia Commonwealth University*
Michael Montaño, *Riverside Community College*
Teri Jo Murphy, *University of Oklahoma*
Martin Nakashima, *California State Polytechnic University, Pomona*
Ho Kuen Ng, *San Jose State University*
Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Hussain S. Nur, *California State University, Fresno*
Norma Ortiz-Robinson, *Virginia Commonwealth University*
Wayne N. Palmer, *Utica College*
Vincent Panico, *University of the Pacific*
F. J. Papp, *University of Michigan–Dearborn*
Mike Penna, *Indiana University–Purdue University Indianapolis*
Mark Pinsky, *Northwestern University*
Lothar Redlin, *The Pennsylvania State University*
Joel W. Robbin, *University of Wisconsin–Madison*
Lila Roberts, *Georgia College and State University*
E. Arthur Robinson, Jr., *The George Washington University*
Richard Rockwell, *Pacific Union College*
Rob Root, *Lafayette College*
Richard Ruedemann, *Arizona State University*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
Richard St. Andre, *Central Michigan University*
Ricardo Salinas, *San Antonio College*
Robert Schmidt, *South Dakota State University*
Eric Schreiner, *Western Michigan University*
Mihr J. Shah, *Kent State University–Trumbull*
Qin Sheng, *Baylor University*
Theodore Shifrin, *University of Georgia*
Wayne Skrapek, *University of Saskatchewan*
Larry Small, *Los Angeles Pierce College*
Teresa Morgan Smith, *Blinn College*
William Smith, *University of North Carolina*
Donald W. Solomon, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Edward Spitznagel, *Washington University*
Joseph Stampfli, *Indiana University*
Kristin Stoley, *Blinn College*
M. B. Tavakoli, *Chaffey College*
Magdalena Toda, *Texas Tech University*
Ruth Trygstad, *Salt Lake Community College*
Paul Xavier Uhlig, *St. Mary's University, San Antonio*
Stan Ver Nooy, *University of Oregon*
Andrei Verona, *California State University–Los Angeles*
Klaus Volpert, *Villanova University*
Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*
William L. Walton, *McCallie School*
Peiyong Wang, *Wayne State University*
Jack Weiner, *University of Guelph*
Alan Weinstein, *University of California, Berkeley*
Theodore W. Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
Steven Willard, *University of Alberta*
Robert Wilson, *University of Wisconsin–Madison*
Jerome Wolbert, *University of Michigan–Ann Arbor*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts, Boston*
Mary Wright, *Southern Illinois University–Carbondale*
Paul M. Wright, *Austin Community College*
Xian Wu, *University of South Carolina*

Me gustaría agradecer además a R. B. Burckel, Bruce Colletti, David Behrman, John Dersch, Gove Effinger, Bill Emerson, Dan Kalman, Quyan Khan, Alfonso Gracia-Saz, Allan MacIsaac, Tami Martin, Monica Nitsche, Lamia Raffo, Norton Starr y Jim Trefzger por sus sugerencias; a Al Shenk y Dennis Zill por la autorización para usar ejercicios de sus textos de cálculo; a COMAP por su autorización para usar material para proyectos; a George Bergman, David Bleecker, Dan Clegg, Victor Kaftal, Anthony Lam, Jamie Lawson, Ira Rosenholtz, Paul Sally, Lowell Smylie y Larry Wallen por sus ideas para ejercicios; a Dan Drucker por el proyecto de carrera sobre ruedas; a Thomas Banchoff, Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle, Philip Straffin y Klaus Volpert por sus ideas para proyectos; a Dan Anderson, Dan Clegg, Jeff Cole, Dan Drucker y Barbara Frank por resolver los ejercicios nuevos y sugerir maneras de mejorarlos; a Marv Riedesel y Mary Johnson por su precisión en la lectura de pruebas; a Andy Bulman-Fleming, Lothar Redlin, Gina Sanders y Saleem Watson por la lectura de pruebas adicional, y a Jeff Cole y Dan Clegg por su cuidadosa preparación y lectura de pruebas del manuscrito de respuestas.

Agradezco además a quienes contribuyeron en ediciones anteriores: Ed Barbeau, George Bergman, Fred Brauer, Andy Bulman-Fleming, Bob Burton, David Cusick, Tom DiCiccio, Garret Etgen, Chris Fisher, Leon Gerber, Stuart Goldenberg, Arnold Good, Gene Hecht, Harvey Keynes, E. L. Koh, Zdislav Kovarik, Kevin Kreider, Emile LeBlanc, David Leep, Gerald Leibowitz, Larry Peterson, Mary Pugh, Lothar Redlin, Carl Riehm, John Ringland, Peter Rosenthal, Dusty Sabo, Doug Shaw, Dan Silver, Simon Smith, Saleem Watson, Alan Weinstein y Gail Wolkowicz.

Gracias también a Kathi Townes, Stephanie Kuhns, Kristina Elliott y Kira Abdallah de TECHarts por sus servicios de producción y a los empleados siguientes de Cengage Learning: Cheryll Linthicum, gerente de proyectos de contenido; Stacy Green, desarrolladora de contenido titular; Samantha Lugtu, desarrolladora de contenido asociada; Stephanie Kreuz, asistente de producto; Lynh Pham, desarrolladora de medios; Ryan Ahern, gerente de mercadotecnia, y Vernon Boes, director de arte. Todos ellos hicieron un trabajo sobresaliente.

He tenido la enorme suerte de trabajar con algunos de los mejores editores de matemáticas en el ramo en las últimas tres décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst, Gary Ostedt, Bob Pirtle, Richard Stratton, Liz Covello y ahora Neha Taleja. Todos ellos han contribuido ampliamente en el éxito de este libro.

JAMES STEWART



Complementos para profesores

Manual del instructor (Instructor's Guide)*

Por Douglas Shaw
ISBN 978-1-305-39371-4

Cada sección de este texto es analizada desde varios puntos de vista. **Instructor's Guide** *contiene tiempo sugerido por asignar, puntos por enfatizar, temas de análisis del texto, materiales básicos para exponer en clase, sugerencias de talleres/debates, ejercicios de trabajo grupal en forma conveniente para su distribución y sugerencias de tareas.*

Manual de soluciones completas Multivariable*

ISBN 978-1-305-38699-0

Incluye soluciones desarrolladas de todos los ejercicios en el texto.

Printed Test Bank*

Por William Steven Harmon
ISBN 978-1-305-27180-7

Contiene elementos de exámenes de opción múltiple y respuesta libre específicos del texto.

Cengage Learning Testing Powered by Cognero*

(login.cengage.com)

Este sistema en línea flexible le permite crear, editar y gestionar contenido del banco de exámenes con base en múltiples soluciones de Cengage Learning; crear múltiples versiones de exámenes en un instante y aplicar exámenes desde su LMS, salón de clases o donde usted quiera.



Complementos para profesores y estudiantes

Stewart Website*

www.stewartcalculus.com

Contenido: *Homework Hints* ▪ *Algebra Review* ▪ *Additional Topics* ▪ *Drill Exercises* ▪ *Challenge Problems* ▪ *Web Links* ▪ *History of Mathematics* ▪ *Tools for Enriching Calculus (TEC)*

TEC TOOLS FOR ENRICHING™ CALCULUS*

Por James Stewart, Harvey Keynes, Dan Clegg y el desarrollador Hubert Hohn

Tools for Enriching Calculus (TEC) funciona como una herramienta eficaz para profesores lo mismo que como un entorno tutorial en que los estudiantes pueden explorar y repasar temas selectos. Los módulos de simulación Flash en TEC incluyen instrucciones, explicaciones por escrito y en audio de los conceptos y ejercicios. TEC está disponible en el eBook vía CourseMate y Enhanced WebAssign. Visuals y Modules especiales pueden conseguirse en www.stewartcalculus.com.

ENHANCED WebAssign — Enhanced WebAssign®

www.webassign.net
Código de acceso impreso: ISBN 978-1-285-85826-5
Código de acceso instantáneo: ISBN 978-1-285-85825-8

Exclusivamente de Cengage Learning, Enhanced WebAssign ofrece un amplio programa en línea para el Cálculo *de Stewart a fin de alentar la práctica decisiva para el dominio de conceptos. La pedagogía meticulosamente elaborada y los ejercicios de nuestros textos probados se vuelven aún más efectivos en Enhanced WebAssign, complementados por apoyo tutorial en multimedia y retroalimentación inmediata a medida que los estudiantes completan sus tareas. Las características clave incluyen:*

- *Miles de problemas de tarea que coinciden con los ejercicios de fin de sección del libro de texto*
- *Oportunidades para que los alumnos repasen habilidades y contenido de prerrequisito tanto al principio del curso como al principio de cada sección*
- *Páginas del* eBook Read It, *videos Watch It, tutoriales Master It y vínculos Chat About It*
- *Un* YouBook *de Cengage personalizable con características para resaltar, tomar apuntes y buscar, así como con vínculos a recursos multimedia*
- Personal Study Plans *(basados en exámenes de diagnóstico) que identifican temas de capítulos que los estudiantes deberán dominar*
- *Un* Answer Evaluator *de WebAssign que reconoce y acepta respuestas matemáticas equivalentes en la misma forma en que un profesor califica*
- *Una característica de* Show My Work *que da a los profesores la opción de ver soluciones detalladas de los alumnos*
- Visualizing Calculus Animations, Lecture Videos *y más*

*Este material se encuentra disponible en inglés. Visite www.cengage.com para acceder a estos recursos.

▪ Elementos electrónicos ▪ Elementos impresos



Cengage Customizable YouBook*

YouBook *es un eBook tanto interactivo como personalizable. Con todo el contenido del* Cálculo *de Stewart,* YouBook *ofrece una herramienta de edición de texto que permite a los profesores modificar la narración del libro de texto conforme sea necesario. Con* YouBook, *los profesores pueden reordenar rápidamente secciones y capítulos enteros o esconder contenido que no impartan para crear un eBook que se ajuste a la perfección a su curso. Los profesores pueden personalizar adicionalmente el texto añadiendo vínculos de video creados por ellos mismos o de YouTube. Elementos adicionales de medios incluyen figuras animadas, videoclips, características para resaltar y tomar apuntes y más.* YouBook *está disponible en Enhanced WebAssign.*

CourseMate*

CourseMate es una perfecta herramienta de estudio personal para los alumnos y no requiere preparación alguna de los profesores. CourseMate da vida a conceptos del curso con herramientas interactivas de aprendizaje, estudio y preparación para exámenes que prestan apoyo al libro de texto impreso. CourseMate para el Cálculo *de Stewart incluye un eBook interactivo, Tools for Enriching Calculus, videos, exámenes, tarjetas de conceptos y más. Para los profesores, CourseMate incluye Engagement Tracker, una herramienta única en su tipo que monitorea la participación de los estudiantes.*

CengageBrain.com*

Para tener acceso a materiales adicionales de cursos, visite por favor www.cengagebrain.com. *En la página principal de CengageBrain.com, busque el ISBN de su título (en el reverso de su libro) usando el cuadro de búsqueda en la parte superior de la página. Esto lo llevará a la página del producto donde pueden encontrarse estos recursos.*

Complementos para estudiantes

Manual de soluciones para el estudiante (Student Solutions Manual)*

Multivariable
ISBN 978-1-305-38698-3
Proporciona soluciones completamente elaboradas de todos los ejercicios de número impar del texto, dando a los estudiantes la oportunidad de verificar sus respuestas y cerciorarse de haber dado los pasos correctos para llegar a la respuesta. El Student Solutions Manual se puede ordenar o acceder a él *en línea como un eBook en* www.cengagebrain.com *buscando el ISBN.*

Study Guide*

Multivariable*
Por Richard St. Andre
ISBN 978-1-305-27184-5
Para cada sección del texto, la Study Guide *ofrece a los estudiantes una breve introducción, una lista corta de conceptos por dominar y preguntas de resumen y concentración con respuestas explicadas. La* Study Guide *también contiene pruebas de autoaplicación con preguntas tipo examen. La* Study Guide *se puede ordenar o acceder a ella en línea como un eBook en* www.cengagebrain.com *buscando el ISBN.*

A Companion to Calculus*

Por Dennis Ebersole, Doris Schattschneider, Alicia Sevilla y Kay Somers
ISBN 978-0-495-01124-8
Escrito para mejorar habilidades de álgebra y resolución de problemas de los estudiantes que toman un curso de álgebra, cada capítulo de este complemento está dirigido a un tema de cálculo, ofreciendo fundamentos conceptuales y técnicas específicas de álgebra necesarios para entender y resolver problemas de cálculo relacionados con ese tema. Está diseñado para cursos de cálculo que integran el repaso de conceptos de precálculo o para uso individual. Pida un ejemplar del texto o acceda al eBook en línea en www.cengagebrain.com *buscando el ISBN.*

Linear Algebra for Calculus*

Por Konrad J. Heuvers, William P. Francis, John H. Kuisti, Deborah F. Lockhart, Daniel S. Moak y Gene M. Ortner
ISBN 978-0-534-25248-9
Este libro es muy completo, diseñado para complementar el curso de cálculo, ofrece una introducción y repaso de las ideas básicas del álgebra lineal. Pida un ejemplar del texto o acceda al eBook en línea en www.cengagebrain.com *buscando el ISBN.*

*Este material se encuentra disponible en inglés. Visite www.cengage.com para acceder a estos recursos.

■ Elementos electrónicos ■ Elementos impresos

Al estudiante

Leer un libro de texto de cálculo es diferente a leer un periódico o una novela, o incluso un libro de física. No se desanime si tiene que leer un pasaje más de una vez para comprenderlo. Debería tener lápiz y papel y una calculadora a la mano para trazar un diagrama o hacer un cálculo.

Algunos estudiantes comienzan probando sus problemas de tarea y leen el texto solo si se atoran en un ejercicio. Yo sugiero que un plan mucho mejor es leer y comprender una sección del texto antes de intentar hacer los ejercicios. En particular, usted debería examinar las definiciones para ver los significados exactos de los términos. Y antes de leer cada ejemplo, sugiero que cubra la solución e intente resolver el problema usted mismo. Obtendrá mucho más al estudiar la solución si lo hace así.

Parte de la finalidad de este curso es estimular su pensamiento lógico. Aprenda a escribir las soluciones de los ejercicios en forma coherente paso a paso, con oraciones explicatorias, no solo como una cadena de ecuaciones o fórmulas inconexas.

Las respuestas a los ejercicios con número impar aparecen al final del libro, en el apéndice I. Algunos ejercicios piden una explicación, interpretación o descripción verbal. En esos casos, no existe una manera correcta y única de expresar la respuesta, así que no se preocupe si no ha encontrado la respuesta definitiva. Además, hay varias formas en las cuales expresar una respuesta numérica o algebraica, así que si su respuesta difiere de la mía, no suponga de inmediato que está equivocado. Por ejemplo, si la respuesta dada al final del libro es $\sqrt{2} - 1$ y usted obtiene $1/(1+\sqrt{2})$, entonces usted está en lo correcto y racionalizar el denominador mostrará que las respuestas son equivalentes.

El icono indica un ejercicio que definitivamente requiere el uso de una calculadora graficadora o una computadora con software de graficación. Pero eso no significa que dispositivos de graficación no puedan usarse también para verificar su trabajo en los demás ejercicios. El símbolo SAC se reserva a problemas en los que son requeridos los recursos completos de un sistema algebraico computacional (como Maple, Mathematica o el TI-89).

Usted también encontrará el símbolo ⊘, el cual lo previene de cometer un error. He puesto este símbolo al margen en situaciones en que he observado que una gran proporción de mis estudiantes tiende a cometer el mismo error.

Tools for Enriching Calculus, que es un complemento de este texto, se refiere por medio del símbolo **TEC** y puede ser consultado en el eBook vía Enhanced WebAssign y CourseMate (Visuals y Modules selectos están disponibles en www.stewartcalculus.com). Esto lo dirige a usted a módulos en los que puede explorar aspectos del cálculo para los cuales la computadora es particularmente útil.

Notará que algunos números de ejercicios están impresos en gris: **5**. Esto indica que *Homework Hints* están disponibles para el ejercicio. Estas sugerencias pueden hallarse en stewartcalculus.com así como en Enhanced WebAssign y CourseMate. Las sugerencias de tareas hacen preguntas que le permiten realizar progresos hacia una solución sin realmente darle la respuesta. Usted debe seguir cada sugerencia en forma activa con lápiz y papel para resolver los detalles. Si una sugerencia particular no le permite resolver el problema, puede hacer clic para revelar la sugerencia siguiente.

Le recomiendo conservar este libro para efectos de consulta después de terminar el curso. Dado que es probable que olvide algunos de los detalles específicos del cálculo, el libro servirá como un recordatorio útil cuando deba usar el cálculo en cursos subsecuentes. Y como este libro contiene más material del que puede cubrirse en un curso, también puede servir como un valioso recurso para un científico o ingeniero en ejercicio profesional.

El cálculo es un tema muy interesante, con justicia considerado uno de los grandes logros del intelecto humano. Espero que usted descubra que es no solo útil, sino también intrínsecamente bello.

JAMES STEWART

CÁLCULO

DE VARIAS VARIABLES TRASCENDENTES TEMPRANAS

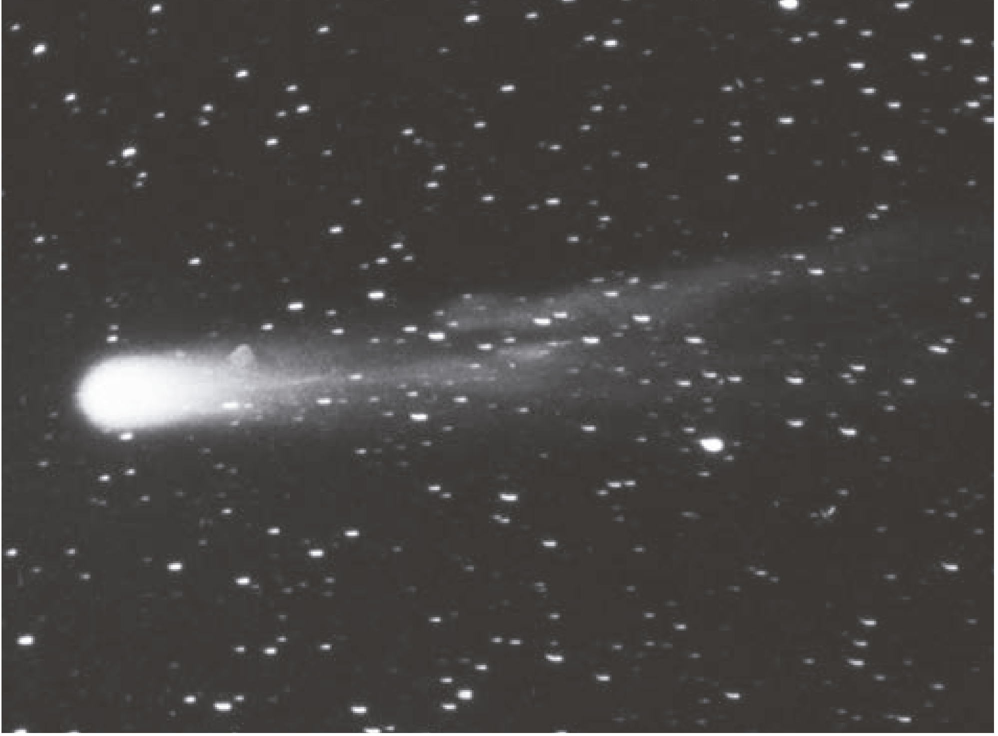
OCTAVA EDICIÓN

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY Y UNIVERSITY OF TORONTO

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

La fotografía muestra el cometa Halley cuando pasó por la Tierra en 1986. Regresará en 2061. Fue nombrado en honor de Edmond Halley (1656–1742), el científico inglés que primero reconoció su periodicidad. En la sección 10.6 verá cómo las coordenadas polares proporcionan una ecuación conveniente para la trayectoria elíptica de su órbita.



HASTA AHORA SE HAN DESCRITO las curvas planas expresando a y como una función de x $[y = f(x)]$ o a x como una función de y $[x = g(y)]$, o al dar una relación entre x y y que define a y implícitamente como una función de x $[f(x, y) = 0]$. En este capítulo se estudiarán dos métodos nuevos para describir curvas.

Algunas curvas, como la cicloide, se manejan mejor cuando x y y están dadas en términos de una tercera variable t llamada un parámetro $[x = f(t), y = g(t)]$. Otras curvas, tales como la cardioide, tienen una descripción más conveniente cuando se usa un nuevo sistema de coordenadas, llamado sistema de coordenadas polares.

10.1 Curvas definidas por ecuaciones paramétricas

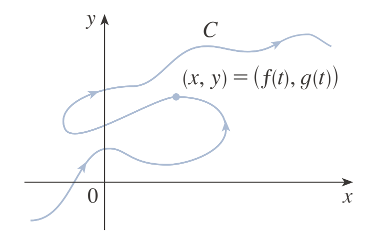


FIGURA 1

Imagine que una partícula se mueve a lo largo de la curva C que se muestra en la figura 1. Es imposible describir a C con una ecuación de la forma $y = f(x)$ porque C no pasa la prueba de la recta vertical. Pero las coordenadas x y y de la partícula son funciones del tiempo t y, por tanto, se puede escribir por medio de $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Este par de ecuaciones suele ser una forma más conveniente de describir una curva y da lugar a la siguiente definición.

Suponga que x y y se dan como funciones de una tercera variable t (llamada **parámetro**) mediante las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(llamadas **ecuaciones paramétricas**). Cada valor de t determina un punto (x, y), que se puede representar en un plano coordenado. Cuando t varía, el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varía y traza una curva C, llamada **curva paramétrica**. El parámetro t no necesariamente representa el tiempo y, de hecho, se podría usar una letra distinta a t para el parámetro. Pero en muchas aplicaciones de curvas paramétricas, t denota el tiempo y, por tanto, se puede interpretar a $(x, y) = (f(t), g(t))$ como la posición de una partícula en el tiempo t.

EJEMPLO 1 Trace e identifique la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUCIÓN Cada valor de t da un punto sobre la curva, como se muestra en la tabla. Por ejemplo, si $t = 0$, entonces $x = 0$, $y = 1$ y el punto correspondiente es $(0, 1)$. En la figura 2 se grafican los puntos (x, y) determinados por varios valores del parámetro y se unen para producir una curva.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

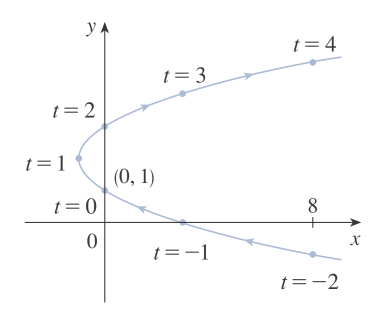


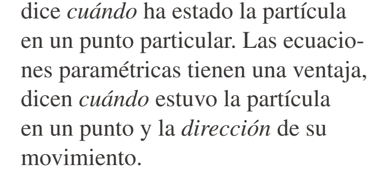
FIGURA 2

Una partícula cuya posición está dada por las ecuaciones paramétricas, se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas a medida que t aumenta. Observe que los puntos consecutivos marcados en la curva aparecen en intervalos de tiempo iguales, pero no a distancias iguales. Esto es porque la partícula desacelera y después acelera cuando aumenta t.

Parece, de la figura 2, que la curva trazada por la partícula es una parábola. Esto se puede confirmar al eliminar el parámetro t como sigue. De la segunda ecuación se obtiene $t = y - 1$ y se sustituye en la primera ecuación. Esto da

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

y por tanto la curva representada por las ecuaciones paramétricas dadas es la parábola $x = y^2 - 4y + 3$. ■


Esta ecuación en x y y describe *dónde* ha estado la partícula, pero no dice *cuándo* ha estado la partícula en un punto particular. Las ecuaciones paramétricas tienen una ventaja, dicen *cuándo* estuvo la partícula en un punto y la *dirección* de su movimiento.

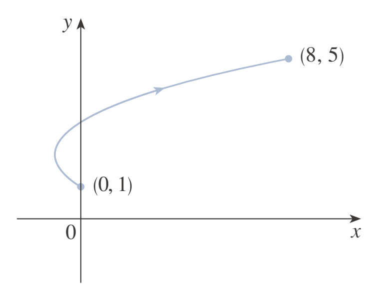


FIGURA 3

En el ejemplo 1 no hay restricciones para el parámetro t, así que suponga que t puede ser cualquier número real. Pero algunas veces se restringirá a t a un intervalo finito. Por ejemplo, la curva paramétrica

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

que se ve en la figura 3 es la parte de la parábola del ejemplo 1 que empieza en el punto (0, 1) y termina en el punto (8, 5). La punta de la flecha indica la dirección en que se ha trazado la curva cuando t crece de 0 a 4.

En general, la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tiene un **punto inicial** $(f(a), g(a))$ y un **punto terminal** $(f(b), g(b))$.

EJEMPLO 2 ¿Qué curva representan las siguientes ecuaciones paramétricas?

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

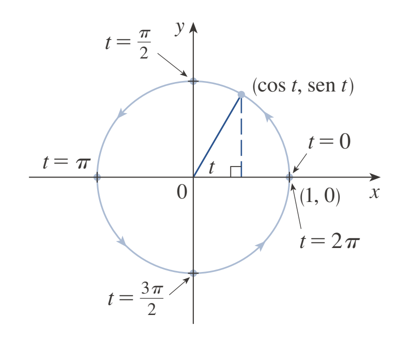


FIGURA 4

SOLUCIÓN Si se grafican algunos puntos, parece que la curva es una circunferencia, lo que se puede confirmar al eliminar t. Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Por lo que el punto (x, y) se mueve sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Observe que en este ejemplo, el parámetro t puede interpretarse como el ángulo (en radianes) que se ve en la figura 4. Cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ se mueve una vez alrededor de la circunferencia en dirección contraria a las manecillas del reloj a partir del punto (1, 0). ■

EJEMPLO 3 ¿Qué curva representan las ecuaciones paramétricas dadas?

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

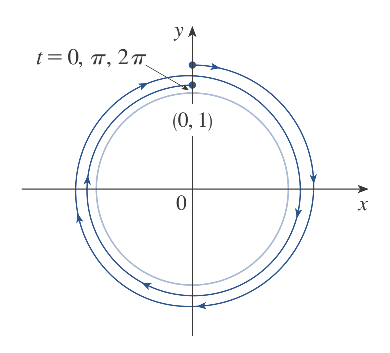


FIGURA 5

SOLUCIÓN Otra vez se tiene

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

así que nuevamente las ecuaciones paramétricas representan la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Pero cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ empieza en (0, 1) y se mueve *dos veces* alrededor de la circunferencia en dirección de las manecillas del reloj, como se indica en la figura 5. ■

Los ejemplos 2 y 3 muestran que diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas pueden representar la misma curva. Por lo que se distingue entre una *curva*, como un conjunto de puntos, y una *curva paramétrica*, en la que los puntos están trazados de un modo particular.

EJEMPLO 4 Encuentre las ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

SOLUCIÓN Si se toman las ecuaciones de la circunferencia unitaria del ejemplo 2 y se multiplican las expresiones para x y y por r, se obtiene $x = r\cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$. Es posible verificar que estas ecuaciones representan una circunferencia con radio r y centro en el origen trazado en dirección contraria a las manecillas del reloj. Ahora



desplace h unidades en la dirección x y k unidades en la dirección y, para obtener las ecuaciones paramétricas de la circunferencia (figura 6) con centro (h, k) y radio r:

$$x = h + r\cos t \qquad y = k + r\,\text{sen}\, t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

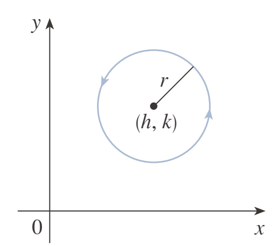


FIGURA 6
$x = h + r\cos t,\ y = k + r\,\text{sen}\, t$

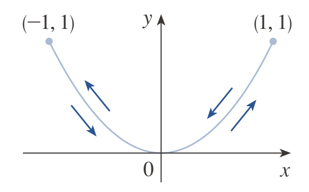


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Trace la curva con ecuaciones paramétricas $x = \text{sen}\, t$, $y = \text{sen}^2\, t$.

SOLUCIÓN Observe que $y = (\text{sen}\, t)^2 = x^2$ y por tanto el punto (x, y) se mueve sobre la parábola $y = x^2$. Pero también observe que, como $-1 \leqslant \text{sen}\, t \leqslant 1$, se tiene $-1 \leqslant x \leqslant 1$, por lo que las ecuaciones paramétricas representan solo la parte de la parábola para la cual $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Como sen t es periódica, el punto $(x, y) = (\text{sen}\, t, \text{sen}^2 t)$ se mueve infinitamente en vaivén a lo largo de la parábola de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$. (Véase la figura 7.)

TEC En Module 10.1A se presenta una animación de la relación entre el movimiento a lo largo de la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ y el movimiento a lo largo de las gráficas de f y g como funciones de t. Al hacer clic en TRIG se presenta a la familia de curvas paramétricas

$$x = a\cos bt \qquad y = c\,\text{sen}\, dt$$

Si elige $a = b = c = d = 1$ y hace clic en **animate**, verá cómo las gráficas de $x = \cos t$ y $y = \text{sen}\, t$ se relacionan con la circunferencia en el ejemplo 2. Si elige $a = b = c = 1$, $d = 2$, verá gráficas como las de la figura 8. Al hacer clic en **animate** o moviendo t a la derecha, podrá ver del código de color cómo se mueve con la trayectoria de $x = \cos t$ y $y = \text{sen}\, 2t$ que corresponden al movimiento a lo largo de la curva paramétrica, llamada **figura de Lissajous.**

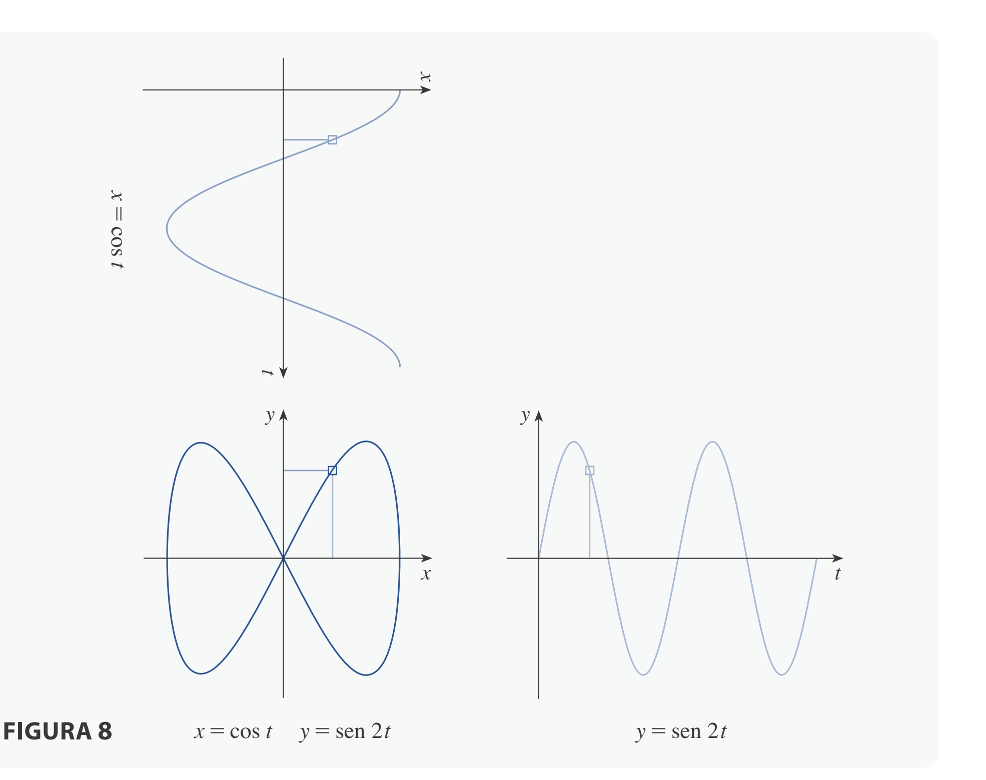


FIGURA 8 $x = \cos t \quad y = \text{sen}\, 2t$ $\qquad$ $y = \text{sen}\, 2t$

Dispositivos de graficación

La mayor parte de las calculadoras y los programas de graficación se pueden usar para trazar la gráfica de curvas descritas por ecuaciones paramétricas. De hecho, es instructivo observar una curva paramétrica dibujada con una calculadora, porque los puntos se ubican en orden conforme se incrementan los valores del parámetro correspondiente.

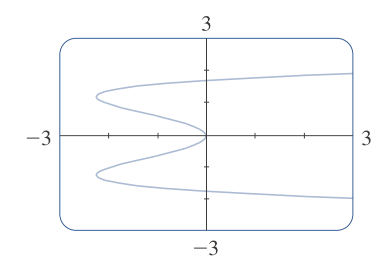


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Utilice un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de la curva $x = y^4 - 3y^2$.

SOLUCIÓN Sea $t = y$ el parámetro, entonces se tienen las ecuaciones

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

Usando estas ecuaciones paramétricas para trazar la gráfica de la curva, se obtiene la figura 9. Se podría resolver la ecuación dada ($x = y^4 - 3y^2$) para y como cuatro funciones de x y graficarlas individualmente, pero las ecuaciones paramétricas proporcionan un método mucho más fácil. ■

En general, si se necesita trazar la gráfica de una ecuación de la forma $x = g(y)$, se pueden usar las ecuaciones paramétricas

$$x = g(t) \qquad y = t$$

Observe también que las curvas con ecuaciones $y = f(x)$ (aquellas con las que se está familiarizado; gráficas de funciones) también se pueden considerar como curvas con ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = f(t)$$

Los dispositivos de graficación son particularmente útiles para trazar curvas complicadas. Por ejemplo, las curvas que se muestran en las figuras 10, 11 y 12 serían virtualmente imposibles de hacer a mano.

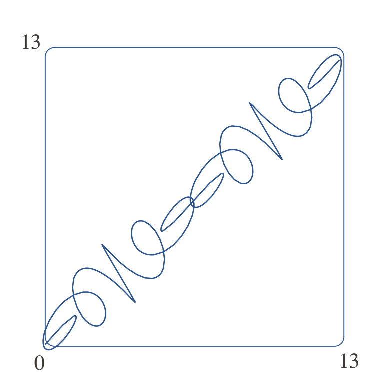


FIGURA 10
$x = t + \text{sen}\, 5t$
$y = t + \text{sen}\, 6t$

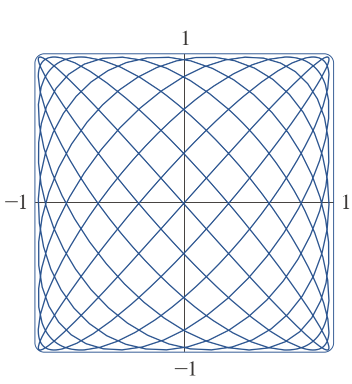


FIGURA 11
$x = \text{sen}\, 9t$
$y = \text{sen}\, 10t$

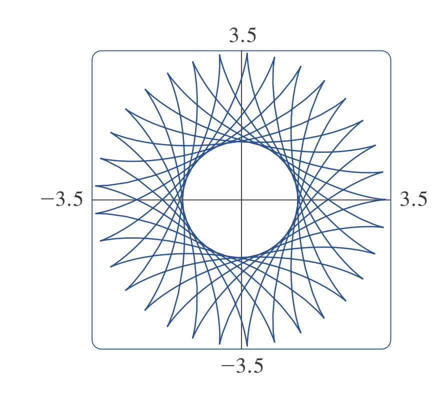


FIGURA 12
$x = 2.3\cos 10t + \cos 23t$
$y = 2.3\,\text{sen}\, 10t - \text{sen}\, 23t$

Uno de los más importantes usos de las curvas paramétricas es el diseño asistido por computadora (CAD). En el proyecto de laboratorio después de la sección 10.2 se investigarán curvas paramétricas especiales, llamadas **curvas de Bézier**, que son ampliamente utilizadas en manufactura, especialmente en la industria automotriz. Estas curvas también se emplean en formas especiales de letras y otros símbolos de impresión en láser.

La cicloide

TEC En Module 10.1B se muestra una animación de cómo se forma una cicloide a partir del movimiento de un círculo.

EJEMPLO 7 La curva trazada por un punto P sobre la circunferencia de un círculo cuando este rueda a lo largo de una recta se llama **cicloide** (véase la figura 13). Si el círculo tiene radio r y rueda a lo largo del eje x, y si una posición de P está en el origen, determine las ecuaciones paramétricas para la cicloide.

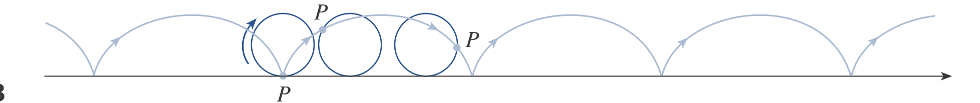


FIGURA 13

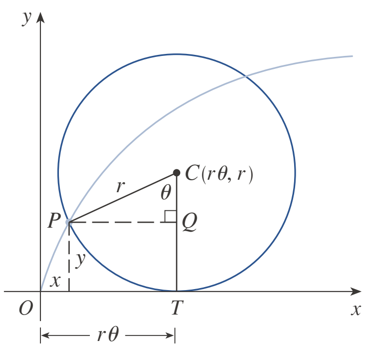
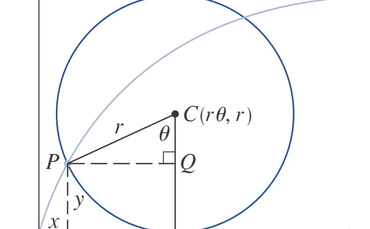



FIGURA 14

SOLUCIÓN Se elige como parámetro al ángulo de rotación θ del círculo ($\theta = 0$ cuando P está en el origen). Suponga que el círculo ha girado θ radianes. Debido a que el círculo ha estado en contacto con la recta, se ve de la figura 14, que la distancia que ha rodado desde el origen es

$$|OT| = \text{arc } PT = r\theta$$

Por tanto, el centro del círculo es $C(r\theta, r)$. Sean (x, y) las coordenadas de P. Entonces, de la figura 14 se ve que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen} \theta = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

Así que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

1 $$x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta) \qquad y = r(1 - \cos \theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Un arco de la cicloide viene de una rotación del círculo y, por tanto, se describe mediante $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Aunque las ecuaciones 1 se obtuvieron de la figura 14, que ilustra el caso donde $0 < \theta < \pi/2$, se puede ver que son válidas para otros valores de θ (véase el ejercicio 39).

Aunque es posible eliminar el parámetro θ de las ecuaciones 1, la ecuación cartesiana resultante en x y y es muy complicada y no es tan conveniente para trabajar como con las ecuaciones paramétricas. ■

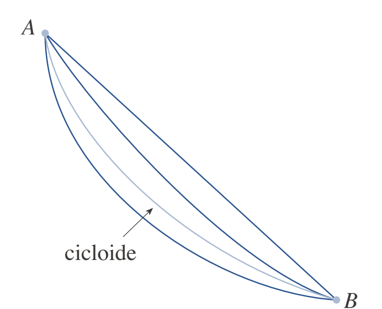


FIGURA 15

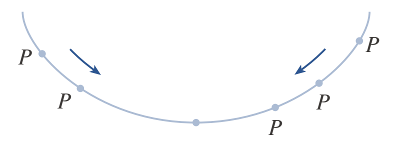
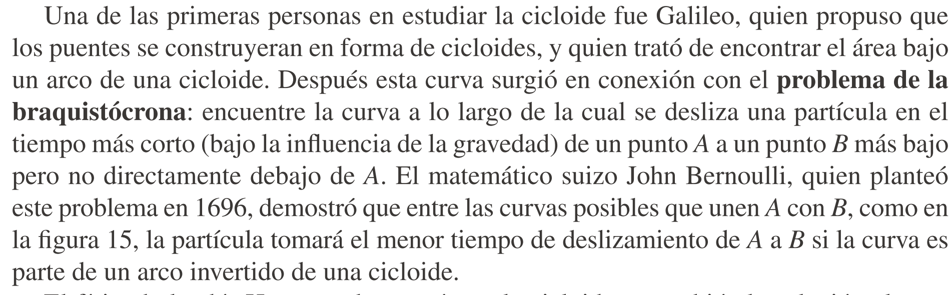


FIGURA 16



Una de las primeras personas en estudiar la cicloide fue Galileo, quien propuso que los puentes se construyeran en forma de cicloides, y quien trató de encontrar el área bajo un arco de una cicloide. Después esta curva surgió en conexión con el **problema de la braquistócrona**: encuentre la curva a lo largo de la cual se desliza una partícula en el tiempo más corto (bajo la influencia de la gravedad) de un punto A a un punto B más bajo pero no directamente debajo de A. El matemático suizo John Bernoulli, quien planteó este problema en 1696, demostró que entre las curvas posibles que unen A con B, como en la figura 15, la partícula tomará el menor tiempo de deslizamiento de A a B si la curva es parte de un arco invertido de una cicloide.

El físico holandés Huygens demostró que la cicloide es también la solución al **problema de la tautócrona**; es decir, sin importar dónde se coloque una partícula P en una cicloide invertida, le toma el mismo tiempo deslizarse hasta el fondo (véase la figura 16). Huygens propuso que los relojes de péndulo (que él inventó) oscilaran en arcos cicloidales, porque en tal caso el péndulo tarda el mismo tiempo en completar una oscilación si oscila por un arco amplio o pequeño.

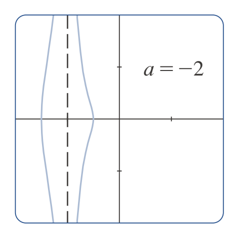
Familias de curvas paramétricas

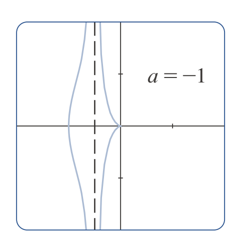
EJEMPLO 8 Investigue la familia de curvas con ecuaciones paramétricas

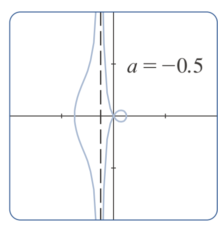
$$x = a + \cos t \qquad y = a \tan t + \operatorname{sen} t$$

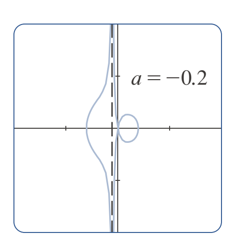
¿Qué tienen estas curvas en común? ¿Cómo cambia su forma cuando a crece?

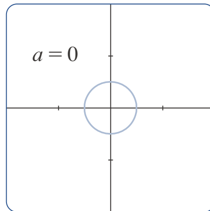
SOLUCIÓN Se emplea un dispositivo de graficación para producir las gráficas para los casos $a = -2, -1, -0.5, -0.2, 0, 0.5, 1$ y 2 que se muestran en la figura 17. Observe que todas estas curvas (excepto el caso $a = 0$) tienen dos ramas, y ambas se aproximan a la asíntota vertical $x = a$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha.

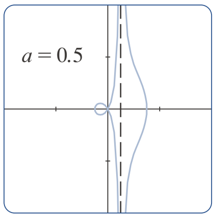


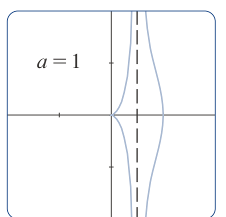












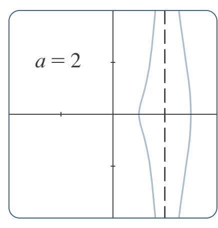


FIGURA 17
Miembros de la familia $x = a + \cos t$, $y = a \tan t + \operatorname{sen} t$, todas graficadas en el rectángulo de vista $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Cuando $a < -1$, ambas ramas son suaves, pero cuando a llega a -1, la rama derecha adquiere un punto agudo llamado *cúspide*. Para a entre -1 y 0 la cúspide se convierte en un lazo, que se vuelve más grande conforme a se aproxima a 0. Cuando $a = 0$, ambas ramas se juntan y forman una circunferencia (véase el ejemplo 2). Para a entre 0 y 1, la rama izquierda tiene un lazo, que se contrae para volverse una cúspide cuando $a = 1$. Para $a > 1$, las ramas se suavizan de nuevo y cuando a crece más, se curvan menos. Observe que las curvas con a positiva son reflexiones respecto al eje y de las curvas correspondientes con a negativa.

Estas curvas se llaman **concoides de Nicomedes** en honor del erudito de la antigua Grecia, Nicomedes. Las llamó concoides porque la forma de sus ramas externas se asemeja a la concha de un caracol o de un mejillón. ■

10.1 EJERCICIOS

1-4 Trace la curva utilizando las ecuaciones paramétricas para ubicar distintos puntos de esta. Indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

1. $x = 1 - t^2, \quad y = 2t - t^2, \quad -1 \leqslant t \leqslant 2$

2. $x = t^3 + t, \quad y = t^2 + 2, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

3. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$

4. $x = 2 \cos t, \quad y = t - \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

5-10
(a) Trace la curva usando las ecuaciones paramétricas para ubicar puntos. Indique con una flecha la dirección en la cual se traza la curva cuando t aumenta.
(b) Elimine el parámetro para encontrar la ecuación cartesiana de la curva.

5. $x = 2t - 1, \quad y = \frac{1}{2}t + 1$

6. $x = 3t + 2, \quad y = 2t + 3$

7. $x = t^2 - 3, \quad y = t + 2, \quad -3 \leqslant t \leqslant 3$

8. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

9. $x = 1 - t^2, \quad y = t - 2, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

10. $x = t - 1, \quad y = t^3 + 1, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

11-18
(a) Elimine el parámetro para encontrar una ecuación cartesiana de la curva.
(b) Trace la curva e indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando crece el parámetro.

11. $x = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta, \quad y = \cos \frac{1}{2}\theta, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $x = \frac{1}{2} \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

13. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi/2$

14. $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

15. $x = t^2, \quad y = \ln t$

16. $x = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t - 1}$

17. $x = e^{2t}, \quad y = t + 1$

18. $x = \tan^2\theta, \quad y = \sec \theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

19-22 Describa el movimiento de una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo dado.

19. $x = 5 + 2\cos \pi t, \quad y = 3 + 2\,\text{sen}\,\pi t, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

20. $x = 2 + \text{sen}\, t, \quad y = 1 + 3\cos t, \quad \pi/2 \leqslant t \leqslant 2\pi$

21. $x = 5\,\text{sen}\, t, \quad y = 2\cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

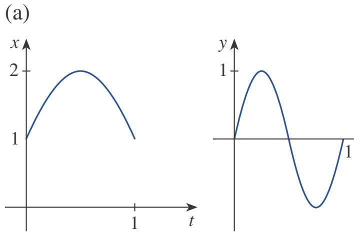
22. $x = 2\,\text{sen}\, t, \quad y = 4 + \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

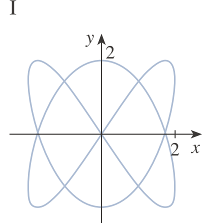
---

23. Suponga que una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde el rango de f es $[1, 4]$ y el rango de g es $[2, 3]$. ¿Qué se puede decir acerca de la curva?

24. Relacione las gráficas de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en (a)–(d) con las curvas paramétricas etiquetadas I-IV. Argumente sus elecciones.

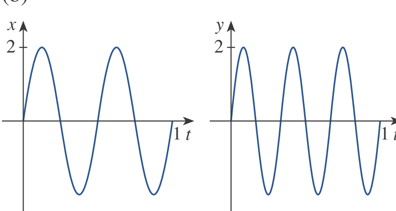
(a)

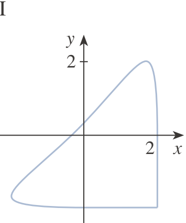




I

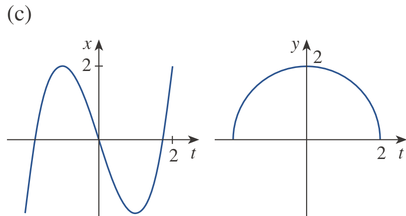
(b)

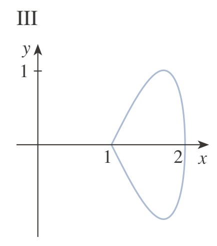




II

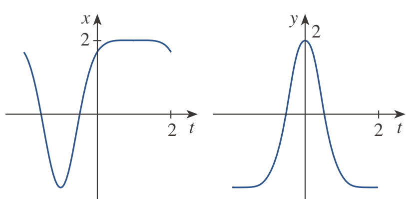
(c)

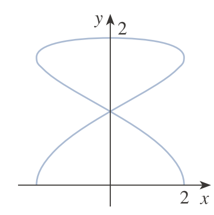




III

(d)

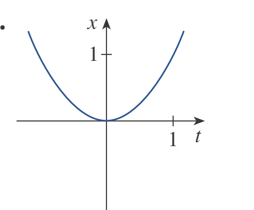




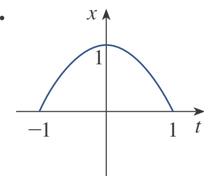
IV

25-27 Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para trazar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

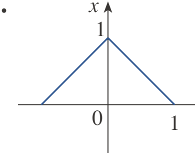
25.

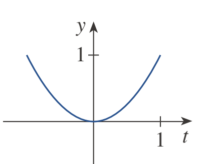


26.



27.





---

28. Relacione las curvas paramétricas con las curvas etiquetadas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No utilice dispositivos de graficación.)

(a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

(b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

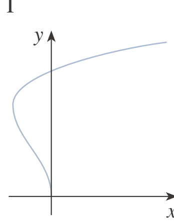
(c) $x = \text{sen}\, 2t, \quad y = \text{sen}\,(t + \text{sen}\, 2t)$

(d) $x = \cos 5t, \quad y = \text{sen}\, 2t$

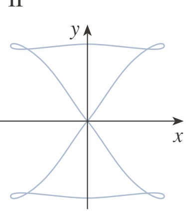
(e) $x = t + \text{sen}\, 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

(f) $x = \dfrac{\text{sen}\, 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$

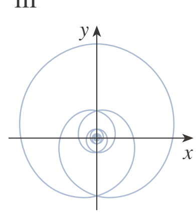
I



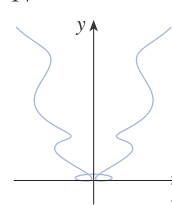
II



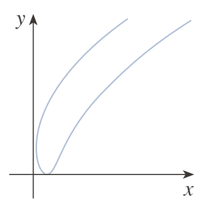
III



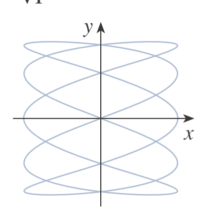
IV



V



VI



29. Trace la gráfica de la curva $x = y - 2 \operatorname{sen} \pi y$.

30. Trace la gráfica de las curvas $y = x^3 - 4x$ y $x = y^3 - 4y$, y encuentre sus puntos de intersección con una aproximación de un decimal.

31. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, describen el segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

(b) Encuentre las ecuaciones paramétricas para representar el segmento de recta de $(-2, 7)$ a $(3, -1)$.

32. Utilice un dispositivo de graficación y el resultado del ejercicio 31(a) para dibujar el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(1, 5)$.

33. Encuentre ecuaciones paramétricas para la trayectoria de una partícula que se mueve a lo largo de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ de la manera descrita.

(a) Una vuelta en dirección de las manecillas del reloj, empezando en (2, 1).

(b) Tres vueltas en dirección contraria a las manecillas del reloj, empezando en (2, 1).

(c) Media vuelta en dirección contraria a las manecillas del reloj, empezando en (0, 3).

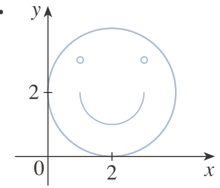
34. (a) Encuentre ecuaciones paramétricas para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Sugerencia*: modifique las ecuaciones de la circunferencia del ejemplo 2.]

(b) Utilice estas ecuaciones paramétricas para trazar la gráfica en la elipse cuando $a = 3$ y $b = 1, 2, 4$ y 8.

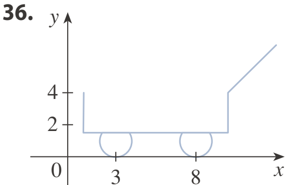
(c) ¿Cómo cambia la forma de la elipse cuando b varía?

35-36 Utilice una calculadora graficadora o computadora para reproducir el dibujo.

35.



36.



37-38 Compare las curvas representadas por las ecuaciones paramétricas. ¿Cómo difieren?

37. (a) $x = t^3, \quad y = t^2$ (b) $x = t^6, \quad y = t^4$
(c) $x = e^{-3t}, \quad y = e^{-2t}$

38. (a) $x = t, \quad y = t^{-2}$ (b) $x = \cos t, \quad y = \sec^2 t$
(c) $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

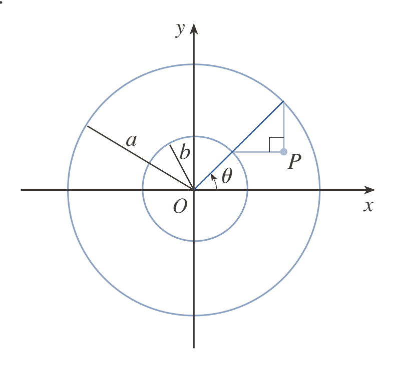
39. Deduzca las ecuaciones 1 para el caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

40. Sea P un punto a una distancia d del centro de una circunferencia de radio r. La curva trazada por P cuando el círculo rueda a lo largo de una línea recta se llama **trocoide**. (Piense en el movimiento de un punto sobre el rayo de una rueda de bicicleta.) La cicloide es el caso especial de una trocoide con $d = r$. Utilizando el mismo parámetro θ como para la cicloide y, suponiendo que la recta es el eje de las x y $\theta = 0$ cuando P es uno de sus puntos mínimos, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trocoide son

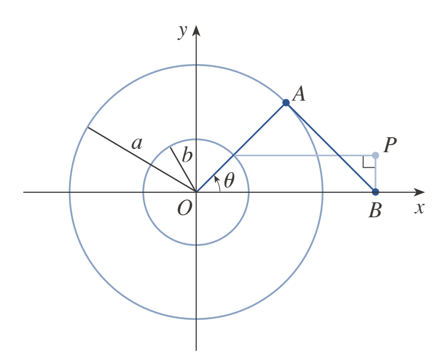
$$x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta \qquad y = r - d \cos \theta$$

Trace la trocoide para los casos $d < r$ y $d > r$.

41. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas para la curva que consiste de todas las posibles posiciones del punto P en la figura, utilizando el ángulo θ como parámetro. Después elimine el parámetro e identifique la curva.



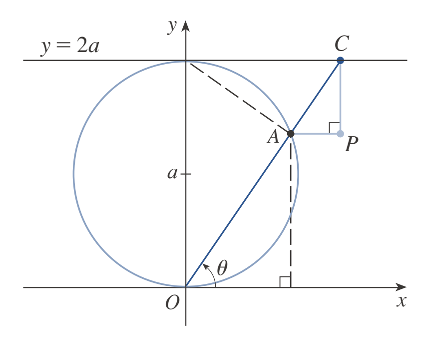
42. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva que consiste de todas las posiciones posibles del punto P en la figura, usando el ángulo θ como parámetro. El segmento de recta AB es tangente a la circunferencia más grande.



43. Una curva, llamada **bruja de María Agnesi**, consiste de todas las posibles posiciones del punto P en la figura. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva pueden expresarse como

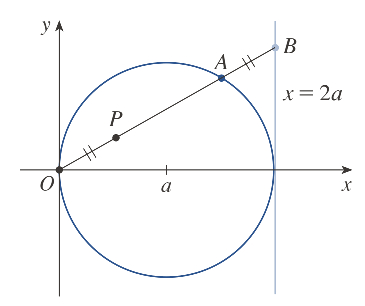
$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$$

Trace la curva.



44. (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para el conjunto de todos los puntos P como los que se muestran en la figura, tales que $|OP| = |AB|$. (Esta curva se llama **cisoide de Diocles** en honor del sabio griego Diocles, quien introdujo la cisoide como un método gráfico para construir el lado de un cubo cuyo volumen es dos veces el de un cubo dado.)

(b) Utilice la descripción geométrica para dibujar a mano un trazo de la curva. Verifique su trabajo utilizando las ecuaciones paramétricas para trazar la gráfica de la curva.



45. Suponga que la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t \qquad y_1 = 2\cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

y la posición de una segunda partícula está dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(a) Trace la gráfica de las trayectorias de ambas partículas. ¿Cuántos puntos de intersección hay?

(b) ¿Algunos de estos puntos de intersección son *puntos de colisión*? En otras palabras ¿las partículas están en el mismo lugar al mismo tiempo? Si es así, encuentre los puntos de colisión.

(c) Describa qué pasa si la trayectoria de la segunda partícula está dada por

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

46. Si un proyectil es disparado con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo a un ángulo α por encima de la horizontal y se supone que la resistencia del aire es insignifcante, entonces su posición después de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (9.8 m/s^2).

(a) Si un arma es disparada con $\alpha = 30°$ y $v_0 = 500$ m/s, ¿cuándo caerá la bala al suelo? ¿A qué distancia del arma llegará al suelo? ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la bala?

(b) Utilice un dispositivo de graficación para verificar sus respuestas al inciso (a). Después trace la gráfica de la trayectoria del proyectil para otros valores del ángulo α para ver dónde pegará en el suelo. Resuma sus hallazgos.

(c) Demuestre que la trayectoria es parabólica al eliminar el parámetro.

47. Investigue la familia de curvas definidas por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando c crece? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

48. Las **curvas catastróficas cola de golondrina** están definidas por las ecuaciones paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Trace la gráfica de varias de estas curvas. ¿Qué características tienen en común las curvas? ¿Cómo cambian cuando c crece?

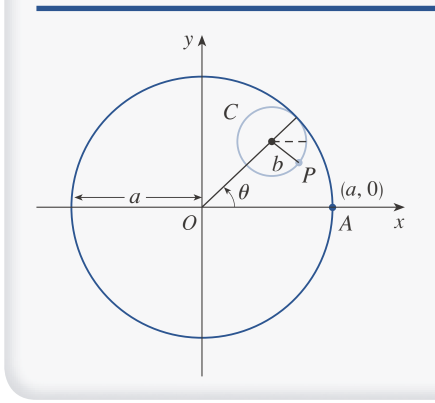
49. Trace la gráfica de varios miembros de la familia de curvas con ecuaciones paramétricas $x = t + a\cos t$, $y = t + a \operatorname{sen} t$, donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando a crece? ¿Para cuáles valores de a la curva tiene un lazo?

50. Trace la gráfica de varios miembros de la familia de curvas $x = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} nt$, $y = \cos t + \cos nt$ donde n es un entero positivo. ¿Qué características tienen en común las curvas? ¿Qué pasa cuando n crece?

51. Las curvas con ecuaciones $x = a \operatorname{sen} nt$, $y = b \cos t$ se llaman **figuras de Lissajous**. Investigue cómo varían estas curvas cuando varían a, b y n. (Tome n como un entero positivo.)

52. Investigue la familia de curvas definidas por las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} ct$, donde $c > 0$. Empiece por hacer c entero positivo y vea qué pasa con la forma cuando c crece. Después explore algunas de las posibilidades que ocurren cuando c es una fracción.

PROYECTO DE LABORATORIO CIRCUNFERENCIAS QUE CORREN ALREDEDOR DE CIRCUNFERENCIAS



En este proyecto se investigan familias de curvas, llamadas *hipocicloides* y *epicicloides*, que son generadas por el movimiento de un punto sobre una circunferencia que rueda dentro o fuera de otra circunferencia.

1. Una **hipocicloide** es una curva trazada por un punto fijo P sobre la circunferencia C de radio b cuando C rueda sobre el interior de la circunferencia con centro en O y radio a. Demuestre que si la posición inicial de P es $(a, 0)$ y el parámetro θ se elige como en la figura, entonces las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \qquad y = (a - b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

TEC Recurra a Module 10.1B para ver cómo se forman las hipocicloides y epicicloides por el movimiento de círculos rodando.

2. Utilice un dispositivo de graficación (o el graficador interactivo en **TEC** Module 10.1B) para trazar las gráficas de hipocicloides con a entero positivo y $b = 1$. ¿Cómo afecta el valor de a a la gráfica? Demuestre que si se toma $a = 4$, entonces las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide se reducen a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\,\text{sen}^3\theta$$

Esta curva se llama **hipocicloide de cuatro cúspides**, o un **astroide**.

3. Ahora intente $b = 1$ y $a = n/d$, una fracción donde n y d no tienen factores comunes. Primero haga $n = 1$ e intente determinar gráficamente el efecto del denominador d sobre la forma de la gráfica. Después haga que n varíe mientras d permanece constante. ¿Qué pasa cuando $n = d + 1$?

4. ¿Qué pasa si $b = 1$ y a es irracional? Experimente con un número irracional como $\sqrt{2}$ o $e - 2$. Tome valores cada vez más grandes para θ y especule sobre qué pasaría si se graficara la hipocicloide para todos los valores reales de θ.

5. Si el círculo C rueda sobre el *exterior* de la circunferencia fija, la curva trazada por P se llama **epicicloide**. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la epicicloide.

6. Investigue las posibles formas para las epicicloides. Use métodos semejantes a los problemas 2-4.

10.2 Cálculo con curvas paramétricas

Una vez que se ha visto cómo representar ecuaciones paramétricas, se aplicarán los métodos de cálculo a las curvas paramétricas. En particular, se resolverán problemas que implican tangentes, áreas, longitudes de arco y áreas de superficies.

Tangentes

Suponga que f y g son funciones derivables y se quiere encontrar la recta tangente en un punto sobre la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde y es también una función derivable de x. Entonces la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

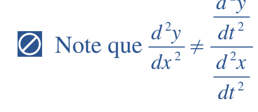
Si $dx/dt \neq 0$, se puede resolver para dy/dx:

Si se piensa la curva como trazada por el movimiento de una partícula, entonces dy/dt y dx/dt son las velocidades verticales y horizontales de la partícula y la fórmula 1 dice que la pendiente de la recta tangente es el cociente de estas velocidades.

1 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

La ecuación 1 (que puede usted pensar como si se eliminaran las dt) le posibilita para encontrar la pendiente dy/dx de la recta tangente a una curva paramétrica, sin tener que eliminar el parámetro t. En (1) se ve que la curva tiene una tangente horizontal cuando $dy/dt = 0$ (siempre que $dx/dt \neq 0$) y tiene una recta tangente vertical cuando $dx/dt = 0$ (siempre que $dy/dt \neq 0$). Esta información es útil para trazar curvas paramétricas.

Como se sabe del capítulo 4, también es útil considerar d^2y/dx^2. Esto se puede encontrar reemplazando y por dy/dx en la ecuación 1:



Note que $\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq \dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$



EJEMPLO 1 Una curva C está definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$.
(a) Demuestre que C tiene dos rectas tangentes en el punto (3, 0) y encuentre sus ecuaciones.
(b) Encuentre el punto sobre C donde la recta tangente es horizontal o vertical.
(c) Determine dónde la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
(d) Trace la curva.

SOLUCIÓN
(a) Observe que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ cuando $t = 0$ o $t = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, el punto (3, 0) sobre la curva C viene de dos valores del parámetro, $t = \sqrt{3}$ y $t = -\sqrt{3}$. Esto indica que C se cruza a sí misma en (3, 0). Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

la pendiente de la recta tangente cuando $t = \pm\sqrt{3}$ es $dy/dx = \pm 6/(2\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$, por lo que las ecuaciones de las rectas tangentes en (3, 0) son

$$y = \sqrt{3}\,(x - 3) \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$$

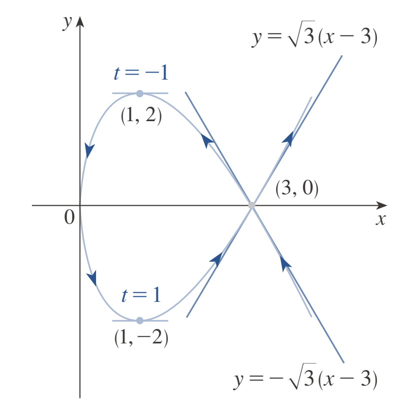


FIGURA 1

(b) C tiene una recta tangente horizontal cuando $dy/dx = 0$; esto es, cuando $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$. Puesto que $dy/dt = 3t^2 - 3$, esto sucede cuando $t^2 = 1$, es decir, $t = \pm 1$. Los puntos correspondientes sobre C son $(1, -2)$ y $(1, 2)$. C tiene una recta tangente vertical cuando $dx/dt = 2t = 0$, es decir, $t = 0$. (Observe que ahí $dy/dt \neq 0$.) El punto correspondiente sobre C es (0, 0).

(c) Para determinar concavidades se calculan segundas derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

Por lo que la curva es cóncava hacia arriba cuando $t > 0$ y cóncava hacia abajo cuando $t < 0$.

(d) Utilizando la información de los incisos (b) y (c), trace C en la figura 1. ■

EJEMPLO 2
(a) Encuentre la recta tangente a la cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ en el punto donde $\theta = \pi/3$. (Véase el ejemplo 10.1.7.)
(b) ¿En qué puntos la recta tangente es horizontal? ¿Cuándo es vertical?

SOLUCIÓN
(a) La pendiente de la recta tangente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r(1 - \cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}$$

Cuando $\theta = \pi/3$, se tiene

$$x = r\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r}{2}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{1 - \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente es $\sqrt{3}$ y su ecuación es

$$y - \frac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{o} \qquad \sqrt{3}\,x - y = r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

La recta tangente se traza en la figura 2.

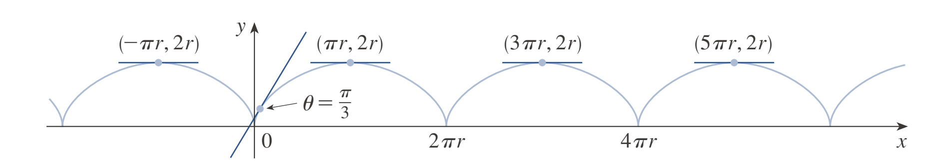


FIGURA 2

(b) La recta tangente es horizontal cuando $dy/dx = 0$, lo cual ocurre cuando sen $\theta = 0$ y $1 - \cos\theta \neq 0$, es decir, $\theta = (2n - 1)\pi$, con n un entero. El punto correspondiente sobre la cicloide es $((2n - 1)\pi r, 2r)$.

Cuando $\theta = 2n\pi$, tanto $dx/d\theta$ como $dy/d\theta$ son cero. De la gráfica, parece que hay rectas tangentes verticales en esos puntos. Esto es verificable por medio de la regla de L'Hôpital como sigue:

$$\lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \infty$$

Un cálculo semejante muestra que $dy/dx \to -\infty$ cuando $\theta \to 2n\pi^-$, así que finalmente existen rectas tangentes verticales cuando $\theta = 2n\pi$, esto es, cuando $x = 2n\pi r$. ■

Áreas

Se sabe que el área bajo una curva $y = F(x)$ de a a b es $A = \int_a^b F(x)\,dx$, donde $F(x) \geqslant 0$. Si la curva se traza por medio de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, entonces se puede calcular una fórmula para el área utilizando la regla de la sustitución para integrales definidas como sigue:

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt \qquad \left[\text{o} \quad \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt\right]$$

Los límites de integración para t se encuentran como de costumbre con la regla de sustitución. Cuando $x = a$, t es α o β. Cuando $x = b$, t es el valor restante.

EJEMPLO 3 Encuentre el área bajo uno de los arcos de la cicloide

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta)$$

(Véase la figura 3.)

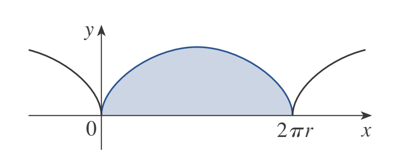


FIGURA 3

SOLUCIÓN Un arco de la cicloide está dado por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Utilizando la regla de sustitución con $y = r(1 - \cos\theta)$ y $dx = r(1 - \cos\theta)\,d\theta$, se tiene

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)\,r(1 - \cos\theta)\,d\theta \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta \\
&= r^2 \left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= r^2\left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2
\end{aligned}$$

■

El resultado del ejemplo 3 dice que el área bajo un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que al rodar genera la cicloide (ejemplo 10.1.7). Galileo intuyó este resultado pero fue demostrado por el matemático francés Roberval y el matemático italiano Torricelli.

Longitud de arco

Ya se sabe cómo encontrar la longitud L de una curva C dada en la forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. La fórmula 8.1.3 dice que, si F' es continua, entonces

2 $$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Suponga que C también se puede describir mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, donde $dx/dt = f'(t) > 0$. Esto significa que C es recorrida una vez, de izquierda a derecha, cuando t se incrementa de α a β y $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$. Al sustituir la fórmula 1 en la fórmula 2 con la regla de sustitución, se obtiene

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\, \frac{dx}{dt}\, dt$$

Como $dx/dt > 0$, se tiene

3 $$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

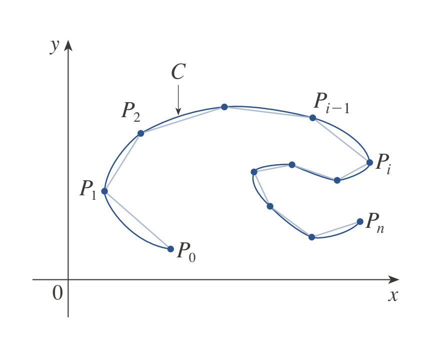


FIGURA 4

Incluso si C no se puede expresar en la forma $y = F(x)$, la fórmula aún es válida pero se obtiene por aproximaciones poligonales. Se divide el intervalo de parámetro $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos de igual ancho Δt. Si $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ son los puntos finales de estos subintervalos, entonces $x_i = f(t_i)$ y $y_i = g(t_i)$ son las coordenadas de los puntos $P_i(x_i, y_i)$ que están sobre C y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$ se aproxima a C. (Véase la figura 4.)

Como en la sección 8.1, se define la longitud L de C como el límite de las longitudes de estos polígonos de aproximación cuando $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

Cuando se aplica el teorema del valor medio a f sobre el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, da un número t_i^* en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Si se hace $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, esta ecuación se convierte en

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\, \Delta t$$

Del mismo modo, cuando se aplica a g, el teorema del valor medio da un número t_i^{**} en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**})\, \Delta t$$

Por tanto

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\Delta t]^2}$$
$$= \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t$$

y así

4 $$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t$$

La suma en (4) se parece a una suma de Riemann para la función $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$ pero no es exactamente una suma de Riemann porque, en general, $t_i^* \neq t_i^{**}$. Sin embargo, si f' y g' son continuas, se puede demostrar que el límite en (4) es el mismo como si t_i^* y t_i^{**} fueran iguales, es decir

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Por lo que con la notación de Leibniz, se tiene el siguiente resultado, el cual tiene la misma forma que la fórmula 3.

5 Teorema Si una curva C se describe mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, donde f' y g' son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y C es recorrida una sola vez cuando t aumenta de α a β, entonces la longitud de C es

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que la fórmula del teorema 5 es consistente con las fórmulas generales $L = \int ds$ y $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ de la sección 8.1.

EJEMPLO 4 Si se usa la representación de la circunferencia unitaria dada en el ejemplo 10.1.2,

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

entonces $dx/dt = -\operatorname{sen} t$ y $dy/dt = \cos t$, de modo que el teorema 5 da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

como se esperaba. Si, por otro lado, se usa la representación dada en el ejemplo 10.1.3,

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

entonces $dx/dt = 2 \cos 2t$, $dy/dt = -2 \operatorname{sen} 2t$, y la integral del teorema 5 da

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 2t + 4 \operatorname{sen}^2 2t}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$$

Observe que la integral da dos veces la longitud de arco de la circunferencia porque cuando t crece de 0 a 2π, el punto $(\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ recorre la circunferencia dos veces. En general, cuando se encuentra la longitud de una curva C a partir de una representación paramétrica, se debe asegurar que C sea recorrida una sola vez cuando t crece de α a β. ■

EJEMPLO 5 Encuentre la longitud de un arco de la cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$, $y = r(1 - \cos \theta)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 3, se ve que un arco se describe por el intervalo del parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Como

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos \theta) \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r \operatorname{sen} \theta$$



se tiene

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

El resultado del ejemplo 5 dice que la longitud de un arco de una cicloide es ocho veces el radio del círculo generador (véase la figura 5). El primero en demostrar esto fue Sir Christopher Wren, en 1658, quien posteriormente fue el arquitecto de la catedral de Saint Paul, en Londres.

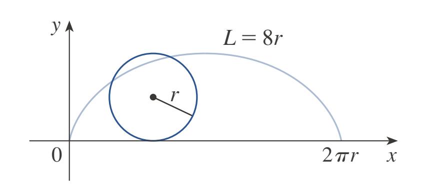


FIGURA 5

Para evaluar esta integral se utiliza la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ con $\theta = 2x$, la cual da $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$. Como $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, se tiene $0 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi$ y entonces $\operatorname{sen}(\theta/2) \geqslant 0$. Por tanto

$$\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)} = 2\left|\operatorname{sen}(\theta/2)\right| = 2\operatorname{sen}(\theta/2)$$

y así
$$L = 2r\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta/2)\, d\theta = 2r\Big[-2\cos(\theta/2)\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2r[2 + 2] = 8r$$

Área de una superficie

En la misma forma que para la longitud de arco, se puede adaptar la fórmula 8.2.5 para obtener una fórmula para el área de una superficie. Suponga que la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, donde f', g' son continuas y $g(t) \geqslant 0$, se hace rotar en torno al eje x. Si C se recorre exactamente una vez cuando t se incrementa de α a β, entonces el área de la superficie resultante está dada por

6
$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Las fórmulas simbólicas generales $S = \int 2\pi y\, ds$ y $S = \int 2\pi x\, ds$ (fórmulas 8.2.7 y 8.2.8) aún son válidas, pero para curvas paramétricas se usa

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

EJEMPLO 6 Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

SOLUCIÓN La esfera es obtenida al rotar el semicírculo

$$x = r\cos t \qquad y = r\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

en torno al eje x. Por tanto, de la fórmula 6, se obtiene

$$S = \int_0^\pi 2\pi r\operatorname{sen} t\sqrt{(-r\operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$

$$= 2\pi\int_0^\pi r\operatorname{sen} t\sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi\int_0^\pi r\operatorname{sen} t \cdot r\, dt$$

$$= 2\pi r^2\int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 2\pi r^2(-\cos t)\Big]_0^\pi = 4\pi r^2$$

10.2 EJERCICIOS

1-2 Encuentre dy/dx.

1. $x = \dfrac{t}{1 + t}, \quad y = \sqrt{1 + t}$

2. $x = te^t, \quad y = t + \text{sen } t$

3-6 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor del parámetro dado.

3. $x = t^3 + 1, \quad y = t^4 + t; \quad t = -1$

4. $x = \sqrt{t}, \quad y = t^2 - 2t; \quad t = 4$

5. $x = t^4 + 1, \quad y = t^3 + t; \quad t = -1$

6. $x = e^t \text{ sen } \pi t, \quad y = e^{2t}; \quad t = 0$

7-8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado por dos métodos: (a) sin eliminar el parámetro y (b) eliminando primero el parámetro.

7. $x = 1 + \ln t, \quad y = t^2 + 2; \quad (1, 3)$

8. $x = 1 + \sqrt{t}, \quad y = e^{t^2}; \quad (2, e)$

9-10 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado. Después trace la gráfica de la curva y la recta tangente.

9. $x = t^2 - t, \quad y = t^2 + t + 1; \quad (0, 3)$

10. $x = \text{sen } \pi t, \quad y = t^2 + t; \quad (0, 2)$

11-16 Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2. ¿Para cuáles valores de t la curva es cóncava hacia arriba?

11. $x = t^2 + 1, \quad y = t^2 + t$

12. $x = t^3 - 12t, \quad y = t^2 - 1$

13. $x = 2 \text{ sen } t, \quad y = 3 \cos t, \quad 0 < t < 2\pi$

14. $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 < t < \pi$

15. $x = t - \ln t, \quad y = t + \ln t$

16. $x = \cos t, \quad y = \text{sen } 2t, \quad 0 < t < \pi$

17-20 Encuentre los puntos sobre la curva donde la recta tangente es horizontal o vertical. Si dispone de un dispositivo de graficación, trace la gráfica de la curva para verificar su trabajo.

17. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^2 - 3$

18. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^3 - 3t^2$

19. $x = \cos \theta, \quad y = \cos 3\theta$

20. $x = e^{\text{sen } \theta}, \quad y = e^{\cos \theta}$

21. Utilice una gráfica para estimar las coordenadas del punto extremo derecho sobre la curva $x = t - t^6$, $y = e^t$. Después utilice cálculo para encontrar las coordenadas exactas.

22. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto más bajo y el de la extrema izquierda sobre la curva $x = t^4 - 2t$, $y = t + t^4$. Después encuentre las coordenadas exactas.

23-24 Trace la gráfica de la curva en un rectángulo de vista que muestre los aspectos más importantes de la curva.

23. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2, \quad y = t^3 - t$

24. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2, \quad y = 2t^2 - t$

25. Demuestre que la curva $x = \cos t$, $y = \text{sen } t \cos t$ tiene dos rectas tangentes en (0, 0) y encuentre sus ecuaciones. Trace la curva.

26. Trace la gráfica de la curva $x = -2 \cos t$, $y = \text{sen } t + \text{sen } 2t$ para descubrir dónde se intercepta consigo misma. Después encuentre ecuaciones para ambas rectas tangentes en ese punto.

27. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la trocoide $x = r\theta - d \text{ sen } \theta$, $y = r - d \cos \theta$ en términos de θ. (Véase el ejercicio 10.1.40.)
(b) Demuestre que si $d < r$, entonces el trocoide no tiene una recta tangente vertical.

28. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente al astroide $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \text{ sen}^3 \theta$ en términos de θ. (Los astroides se exploran en el proyecto de laboratorio de la página 649.)
(b) ¿En qué puntos la recta tangente es horizontal o vertical?
(c) ¿En qué puntos la recta tangente tiene pendiente 1 o -1?

29. ¿En qué puntos sobre la curva $x = 3t^2 + 1$, $y = t^3 - 1$ la recta tangente tiene pendiente $\frac{1}{2}$?

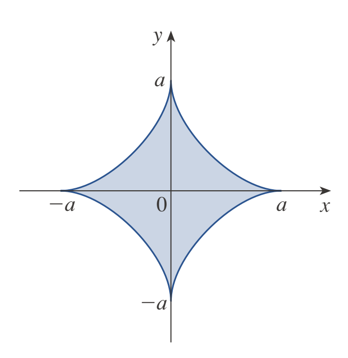
30. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^3 + 1$ que pasen por el punto (4, 3).

31. Use las ecuaciones paramétricas de una elipse $x = a \cos \theta$, $y = b \text{ sen } \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ para encontrar el área que encierra.

32. Encuentre el área encerrada por la curva $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ y el eje y.

33. Encuentre el área encerrada por el eje x y la curva $x = t^3 + 1$, $y = 2t - t^2$.

34. Encuentre el área de la región encerrada por el astroide $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \text{ sen}^3 \theta$. (Los astroides son explorados en el proyecto de laboratorio de la página 649.)



35. Encuentre el área bajo un arco del trocoide del ejercicio 10.1.40 para el caso $d < r$.

36. Sea $\mathcal{R}$ la región encerrada por el lazo de la curva en el ejemplo 1.
(a) Encuentre el área de $\mathcal{R}$.
(b) Si $\mathcal{R}$ gira en torno al eje x, encuentre el volumen del sólido resultante.
(c) Encuentre el centroide de $\mathcal{R}$.

37-40 Plantee una integral que represente la longitud de la curva. Luego utilice su calculadora para encontrar la longitud con una aproximación de cuatro decimales.

37. $x = t + e^{-t}, \quad y = t - e^{-t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = t^2 - t, \quad y = t^4, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

39. $x = t - 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - 2 \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

40. $x = t + \sqrt{t}, \quad y = t - \sqrt{t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

41-44 Encuentre la longitud exacta de la curva.

41. $x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

42. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

43. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

44. $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

45-46 Trace la gráfica de la curva y encuentre su longitud exacta.

45. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

46. $x = \cos t + \ln\left(\tan \frac{1}{2}t\right), \quad y = \operatorname{sen} t, \quad \pi/4 \leqslant t \leqslant 3\pi/4$

47. Trace la gráfica de la curva $x = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 1.5t$, $y = \cos t$ y encuentre su longitud redondeada a cuatro decimales.

48. Encuentre la longitud del lazo de la curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

49. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar la longitud de la curva $x = t - e^t$, $y = t + e^t$, $-6 \leqslant t \leqslant 6$.

50. En el ejercicio 10.1.43 se le pidió deducir las ecuaciones paramétricas $x = 2a \cot \theta$, $y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$ de la curva llamada bruja de María Agnesi. Use la regla de Simpson con $n = 4$ para estimar la longitud del arco de esta curva dada por $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

51-52 Encuentre la distancia recorrida por la partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo dado. Compárela con la longitud de la curva.

51. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi$

52. $x = \cos^2 t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

53. Demuestre que la longitud total de la elipse $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta$, $a > b > 0$, es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\; d\theta$$

donde e es la excentricidad de la elipse ($e = c/a$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

54. Encuentre la longitud total del astroide $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$, donde $a > 0$.

SAC **55.** (a) Trace la gráfica de la **epitrocoide** con ecuaciones

$$x = 11 \cos t - 4 \cos(11t/2)$$
$$y = 11 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}(11t/2)$$

¿Qué intervalo del parámetro da la curva completa?
(b) Use su SAC para encontrar la longitud aproximada de esta curva.

SAC **56.** Una curva llamada **espiral de Cornu** se define por las ecuaciones paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)\, du$$

$$y = S(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\pi u^2/2)\, du$$

donde C y S son las ecuaciones de Fresnel que se introdujeron en el capítulo 5.
(a) Trace la gráfica de esta curva. ¿Qué pasa cuando $t \to \infty$ y cuando $t \to -\infty$?
(b) Encuentre la longitud de la espiral de Cornu desde el origen al punto con valor de parámetro t.

57-60 Plantee una integral que represente el área de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje x. Después utilice su calculadora para encontrar el área de la superficie redondeada a cuatro decimales.

57. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

58. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

59. $x = t + e^t, \quad y = e^{-t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

60. $x = 1 + te^t, \quad y = (t^2 + 1)e^t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

61-63 Encuentre el área exacta de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje x.

61. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

62. $x = 2t^2 + 1/t, \quad y = 8\sqrt{t}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 3$

63. $x = a \cos^3\theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

64. Trace la gráfica de la curva

$$x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta \qquad y = 2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta$$

Si esta curva rota en torno al eje x, encuentre el área de la superficie resultante. (Use la gráfica para ayudarse a encontrar el intervalo correcto para el parámetro.)

65-66 Encuentre el área de la superficie generada al rotar la curva dada en torno al eje y.

65. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$

66. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

---

67. Si f' es continua y $f'(t) \neq 0$ para $a \leqslant t \leqslant b$, demuestre que la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, puede expresarse en la forma $y = F(x)$. [*Sugerencia*: demuestre que f^{-1} existe.]

68. Use la fórmula 1 para deducir la fórmula 6 de la fórmula 8.2.5 para el caso en el que la curva puede representarse en la forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

69. La **curvatura** en un punto P de una curva está definida como

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

donde ϕ es el ángulo de inclinación de la recta tangente en P, como se ve en la figura. Por lo que la curvatura es el valor absoluto de la razón de cambio de ϕ con respecto a la longitud de arco. Esto puede considerarse como una medida de la rapidez de cambio de la dirección de la curva en P y se estudiará con mucho detalle en el capítulo 13.

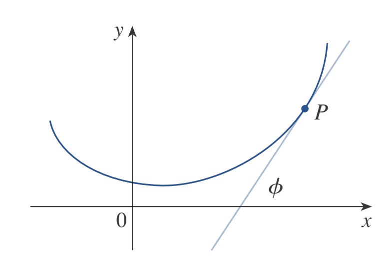
(a) Para una curva paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, deduzca la fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a t, de manera que $\dot{x} = (dx/dt)$. [*Sugerencia*: use $\phi = \tan^{-1}(dy/dx)$ y la fórmula 2 para encontrar $d\phi/dt$. Después use la regla de la cadena para encontrar $d\phi/ds$.]

(b) Considerando la curva $y = f(x)$ como la curva paramétrica $x = x$, $y = f(x)$, con parámetro x, demuestre que la fórmula del inciso (a) resulta

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$



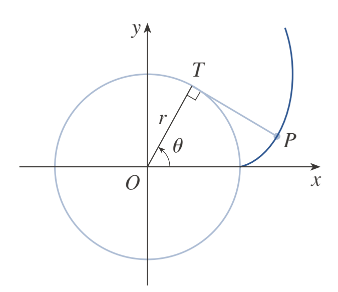
70. (a) Use la fórmula del ejercicio 69(b) para encontrar la curvatura de la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1).
(b) ¿En qué punto esta parábola tiene curvatura máxima?

71. Use la fórmula del ejercicio 69(a) para encontrar la curvatura de la cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ en la parte superior de uno de los arcos.

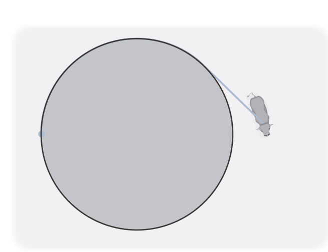
72. (a) Demuestre que la curvatura de cada punto de la línea recta es $\kappa = 0$.
(b) Demuestre que la curvatura en cada punto de una circunferencia de radio r es $\kappa = 1/r$.

73. Una cuerda se enrolla alrededor de un círculo y después se desenrolla manteniéndose tensa. La curva trazada por el punto P en el extremo de la cuerda se llama **involuta** del círculo. Si el círculo tiene radio r y centro O y la posición inicial de P es $(r, 0)$, y si el parámetro θ se elige como en la figura, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la involuta son

$$x = r(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



74. Una vaca está atada a un silo con radio r por una cuerda lo suficientemente larga para alcanzar el lado opuesto del silo. Encuentre el área disponible para el apacentamiento de la vaca.



PROYECTO DE LABORATORIO CURVAS DE BÉZIER

Las **curvas de Bézier** se emplean en el diseño auxiliado por computadora y se nombran así en honor del matemático francés Pierre Bézier (1910-1999), quien trabajó en la industria automotriz. Una curva cúbica de Bézier está determinada mediante cuatro *puntos de control*, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, y se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0(1 - t)^3 + 3x_1t(1 - t)^2 + 3x_2t^2(1 - t) + x_3t^3$$

$$y = y_0(1 - t)^3 + 3y_1t(1 - t)^2 + 3y_2t^2(1 - t) + y_3t^3$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$. Observe que cuando $t = 0$, se tiene $(x, y) = (x_0, y_0)$ y cuando $t = 1$ se tiene $(x, y) = (x_3, y_3)$, así que la curva empieza en P_0 y termina en P_3.

1. Trace la gráfica de la curva de Bézier con puntos de control $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ y $P_3(40, 5)$. Enseguida, en la misma pantalla, trace la gráfica de segmentos de recta P_0P_1, P_1P_2 y P_2P_3. (El ejercicio 10.1.31 muestra cómo hacer esto.) Observe que los puntos de control medios P_1 y P_2 no están sobre la curva; la curva empieza en P_0, se dirige hacia P_1 y P_2 sin alcanzarlos y termina en P_3.

2. En la gráfica del problema 1 parece que la recta tangente en P_0 pasa por P_1 y la recta tangente en P_3 pasa por P_2. Demuéstrelo.

3. Intente producir una curva de Bézier con un lazo cambiando el segundo punto de control en el problema 1.

4. Algunas impresoras láser usan las curvas de Bézier para representar letras y otros símbolos. Experimente con puntos de control hasta que encuentre una curva de Bézier que dé una representación razonable de la letra C.

5. Se pueden representar formas más complicadas juntando dos o más curvas de Bézier. Suponga que la primera curva de Bézier tiene puntos de control P_0, P_1, P_2, P_3 y la segunda tiene puntos de control P_3, P_4, P_5, P_6. Si se desea unir estos dos trozos de manera suave, entonces las rectas tangentes en P_3 deben corresponderse y, por tanto, los puntos P_2, P_3 y P_4 tienen que estar sobre esta recta tangente común. Con este principio, determine los puntos de control para un par de curvas de Bézier que representen la letra S.

10.3 Coordenadas polares

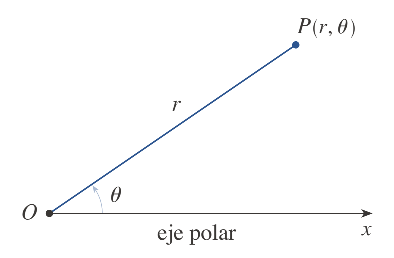


FIGURA 1

Un sistema coordenado representa un punto en el plano mediante un par ordenado de números llamados coordenadas. Por lo general se usan coordenadas cartesianas, que son las distancias dirigidas desde dos ejes perpendiculares. Aquí se describe un sistema coordenado introducido por Newton, llamado **sistema coordenado polar**, que es más conveniente para muchos propósitos.

Se elige un punto en el plano que se llama **polo** (u origen) y se identifica con O. Luego se dibuja un rayo (semirrecta) que empieza en O llamado **eje polar**. Usualmente, este eje se traza horizontalmente a la derecha, y corresponde al eje x positivo en coordenadas cartesianas.

Si P es cualquier otro punto en el plano, sea r la distancia de O a P y sea θ el ángulo (usualmente medido en radianes) entre el eje polar y la recta OP como en la figura 1. Entonces el punto P se representa mediante el par ordenado (r, θ) y r, θ se llaman **coordenadas polares** de P. Se usa la convención de que un ángulo es positivo si se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje polar, y negativo si se mide en el sentido de las manecillas del reloj. Si $P = 0$, entonces $r = 0$ y se está de acuerdo en que $(0, \theta)$ representa el polo para cualquier valor de θ.

Se extiende el significado de las coordenadas polares (r, θ) al caso en que r es negativa estando de acuerdo en que, como en la figura 2, los puntos $(-r, \theta)$ y (r, θ) están sobre la misma recta que pasa por O y a la misma distancia $|r|$ desde O, pero en lados opuestos de O. Si $r > 0$, el punto (r, θ) está en el mismo cuadrante que θ; si $r < 0$, está en el cuadrante sobre el lado opuesto del polo. Observe que $(-r, \theta)$ representa el mismo punto que $(r, \theta + \pi)$.

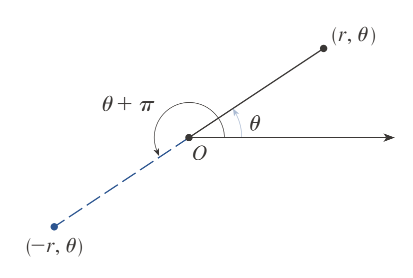
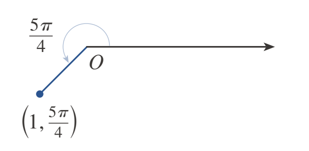
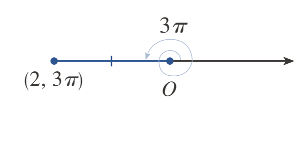


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de los puntos cuyas coordenadas polares están dadas.
(a) $(1, 5\pi/4)$ (b) $(2, 3\pi)$ (c) $(2, -2\pi/3)$ (d) $(-3, 3\pi/4)$

SOLUCIÓN Los puntos se grafican en la figura 3. En el inciso (d) el punto $(-3, 3\pi/4)$ se localiza a tres unidades del polo en el cuarto cuadrante porque el ángulo $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante y $r = -3$ es negativa.





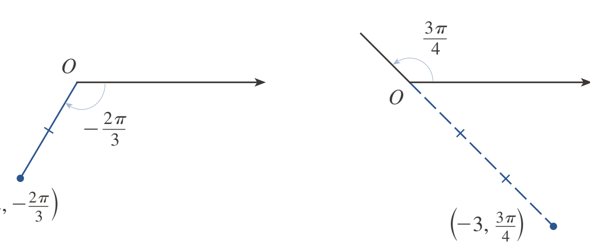
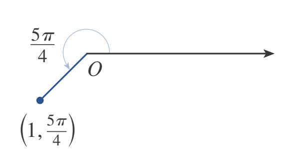
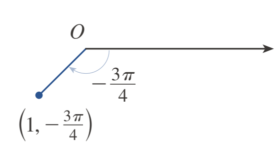
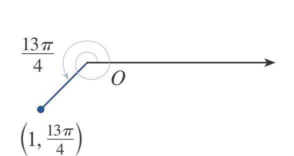


FIGURA 3

En el sistema coordenado cartesiano cada punto tiene una sola representación, pero en el sistema polar cartesiano todo punto tiene muchas representaciones. Por ejemplo, el punto $(1, 5\pi/4)$ en el ejemplo 1(a) se podría escribir como $(1, -3\pi/4)$ o $(1, 13\pi/4)$ o $(-1, \pi/4)$. (Véase la figura 4.)







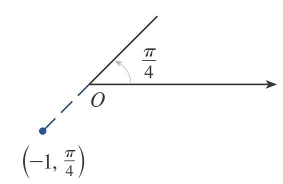


FIGURA 4

De hecho, puesto que una vuelta completa en sentido contrario a las manecillas del reloj está dada por un ángulo 2π, el punto representado por coordenadas polares (r, θ) se representa también por

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero.

La conexión entre coordenadas polares y cartesianas se puede ver en la figura 5, en la cual el polo corresponde al origen y el eje polar coincide con el eje x positivo. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), entonces, de la figura, se tiene

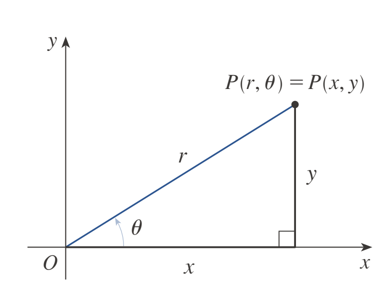


FIGURA 5

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

y por tanto



1 $$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Aunque las ecuaciones 1 se dedujeron de la figura 5, que ilustra el caso donde $r > 0$ y $0 < \theta < \pi/2$, estas ecuaciones son válidas para todos los valores de r y θ. (Véase la definición general de sen θ y cos θ en el apéndice D.)

Las ecuaciones 1 permiten determinar las coordenadas cartesianas de un punto cuando se conocen las coordenadas polares. Para determinar r y θ cuando se conocen x y y, se usan las ecuaciones

2

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

que pueden deducirse de las ecuaciones 1 o simplemente leyendo la figura 5.

EJEMPLO 2 Convierta el punto $(2, \pi/3)$ de coordenadas polares a cartesianas.

SOLUCIÓN Como $r = 2$ y $\theta = \pi/3$, las ecuaciones 1 dan

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Por tanto, el punto en coordenadas cartesianas es $(1, \sqrt{3})$. ■

EJEMPLO 3 Represente el punto con coordenadas cartesianas $(1, -1)$ en términos de coordenadas polares.

SOLUCIÓN Si se elige r como positiva, entonces la ecuación 2 da

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Como el punto $(1, -1)$ está en el cuarto cuadrante, se puede elegir $\theta = -\pi/4$ o $\theta = 7\pi/4$. Por lo que una de las posibles respuestas es $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; otra es $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$. ■

NOTA Las ecuaciones 2 no determinan de manera única a θ cuando se dan x y y, porque cuando θ crece en el intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$ cada valor de $\tan\theta$ ocurre dos veces. Por tanto, al convertir de coordenadas cartesianas a polares, no es suficiente encontrar r y θ para satisfacer las ecuaciones 2. Como en el ejemplo 3, se debe elegir θ de modo que el punto (r, θ) esté en el cuadrante correcto.



Curvas polares

La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$, o de manera más general $F(r, \theta) = 0$, consiste de todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

EJEMPLO 4 ¿Qué curva está representada por la ecuación polar $r = 2$?

SOLUCIÓN La curva consiste de todos los puntos (r, θ) con $r = 2$. Puesto que r representa la distancia del punto al polo, la curva $r = 2$ representa la circunferencia con centro O y radio 2. En general, la ecuación $r = a$ representa una circunferencia con centro O y radio $|a|$. (Véase la figura 6.) ■

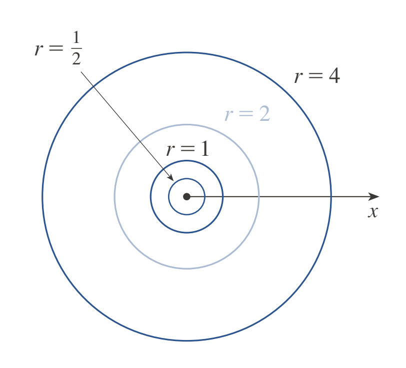


FIGURA 6

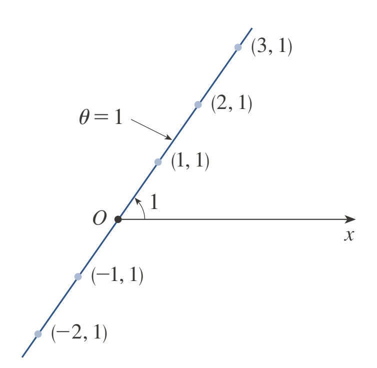


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Trace la curva polar $\theta = 1$.

SOLUCIÓN Esta curva consiste de todos los puntos (r, θ) tales que el ángulo polar θ es de 1 radián. Corresponde a la recta que pasa por O y forma un ángulo de 1 radián con el eje polar (véase la figura 7). Observe que los puntos $(r, 1)$ sobre la recta con $r > 0$ están en el primer cuadrante, mientras aquellos con $r < 0$ están en el tercer cuadrante. ■

EJEMPLO 6

(a) Trace la curva con ecuación polar $r = 2 \cos \theta$.
(b) Encuentre una ecuación cartesiana para esta curva.

SOLUCIÓN

(a) En la figura 8 se encuentran los valores de r para algunos valores convenientes de θ y se grafican los puntos correspondientes (r, θ). Después se unen estos puntos para trazar la curva, que parece ser una circunferencia. Se han usado solo valores de θ entre 0 y π, porque si se hace que θ se incremente más allá de π, se obtiene de nuevo los mismos puntos.

θ	$r = 2 \cos \theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

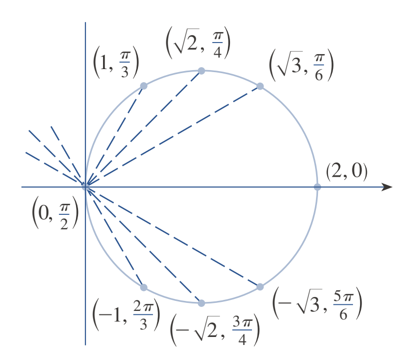


FIGURA 8
Tabla de valores y gráfica de $r = 2 \cos \theta$

(b) Para convertir la ecuación dada en una ecuación cartesiana se usan las ecuaciones 1 y 2. De $x = r \cos \theta$ se tiene $\cos \theta = x/r$, de modo que la ecuación $r = 2 \cos \theta$ se convierte en $r = 2x/r$, lo cual da

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Completando el cuadrado se obtiene

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

que es la ecuación de una circunferencia con centro en $(1, 0)$ y radio 1. ■

En la figura 9 se muestra una ilustración geométrica de que la circunferencia del ejemplo 6 tiene la ecuación $r = 2 \cos \theta$. El ángulo OPQ es un ángulo recto (¿por qué?), así que $r/2 = \cos \theta$.

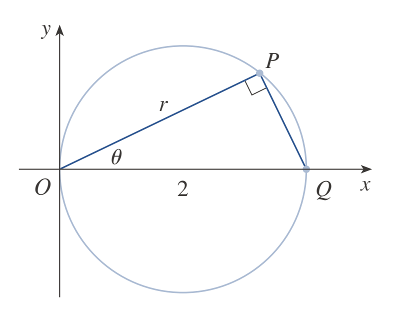


FIGURA 9

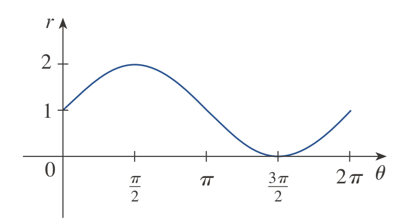


FIGURA 10
$r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ en coordenadas cartesianas, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

EJEMPLO 7 Trace la curva $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.

SOLUCIÓN En lugar de trazar puntos como en el ejemplo 6, primero haga el boceto de la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ en coordenadas *cartesianas* en la figura 10, desplazando la curva seno hacia arriba una unidad. Esto permite leer de un vistazo los valores de r que corresponden a valores crecientes de θ. Por ejemplo, se ve que cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/2$, r (la distancia desde O) se incrementa de 1 a 2, de modo que se traza la parte correspondiente de la curva polar de la figura 11(a). Cuando θ se incrementa de $\pi/2$ a π, la figura 10 muestra que r decrece de 2 a 1, así que se traza la parte siguiente de la curva como en la figura 11(b). Cuando θ se incrementa de π a $3\pi/2$, r decrece de 1 a 0, como se muestra en el inciso (c). Por último, cuando θ se incrementa de $3\pi/2$ a 2π, r se incrementa de 0 a 1 como se muestra en el inciso (d). Si hace que θ se incremente más allá de 2π o decrezca más allá de 0, se podría simplemente volver a trazar la trayectoria. Uniendo las partes de la curva de la figura 11(a)-(d), se traza la curva completa del inciso (e). Esta curva se llama **cardioide** porque tiene forma de corazón.

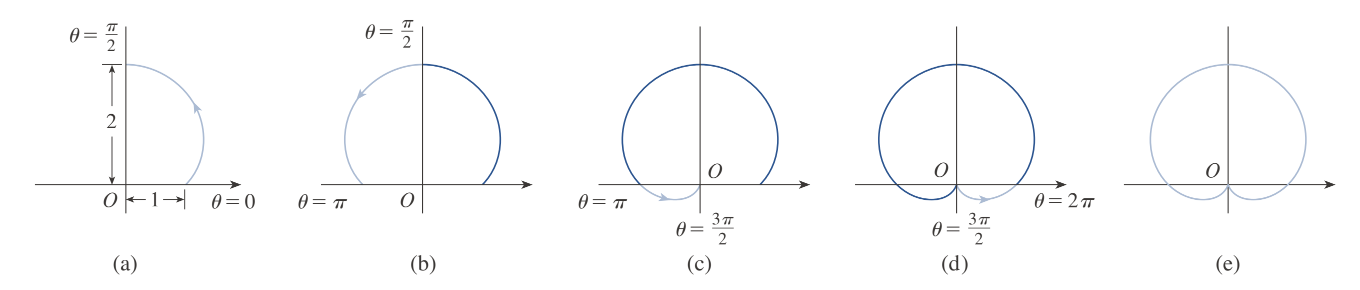
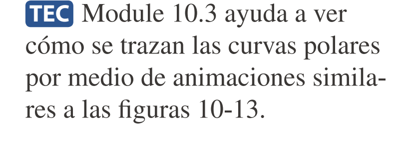


FIGURA 11 Etapas del trazo de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

EJEMPLO 8 Trace la curva $r = \cos 2\theta$.


TEC Module 10.3 ayuda a ver cómo se trazan las curvas polares por medio de animaciones similares a las figuras 10-13.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 7, primero se traza $r = \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), en coordenadas cartesianas en la figura 12. Cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/4$, se observa en la figura 12 que r decrece de 1 a 0 y, de este modo, se dibuja la parte correspondiente a la curva polar de la figura 13 (indicada por ①. Cuando θ se incrementa de $\pi/4$ a $\pi/2$, r va de 0 a -1. Esto significa que la distancia desde O se incrementa de 0 a 1, pero en lugar de estar en el primer cuadrante esta parte de la curva polar (indicada por ②) se ubica en el lado opuesto del polo en el tercer cuadrante. El resto de la curva se traza en forma similar, con flechas y números indicando el orden en el cual se trazan las porciones. La curva resultante tiene cuatro rizos y se llama **rosa de cuatro hojas**.

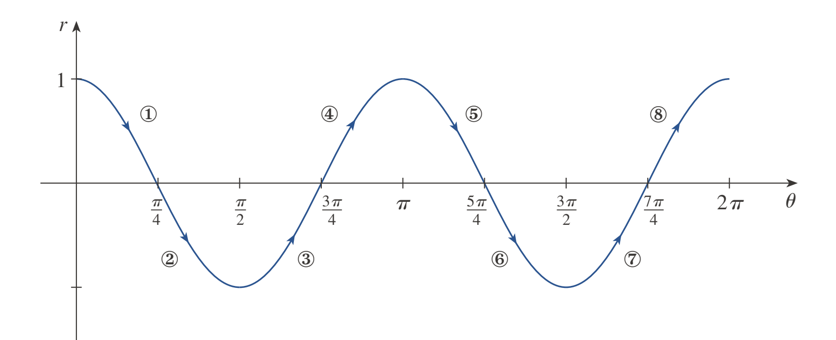


FIGURA 12
$r = \cos 2\theta$ en coordenadas cartesianas

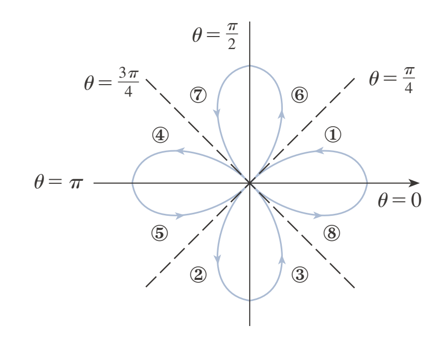


FIGURA 13
Rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$

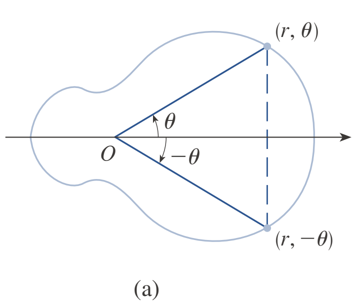
Simetría

Cuando se trazan curvas polares, a veces es útil aprovechar la simetría. Las tres reglas siguientes se explican mediante la figura 14.

(a) Si una ecuación polar permanece sin cambio cuando θ se reemplaza por $-\theta$, la curva es simétrica respecto al eje polar.

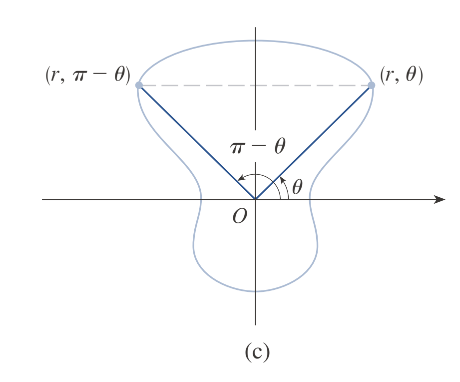
(b) Si la ecuación no cambia cuando r se reemplaza por $-r$, o cuando θ se sustituye por $\theta + \pi$ la curva es simétrica respecto al polo. (Esto significa que la curva permanece sin cambio si se rota 180° respecto al origen.)

(c) Si la ecuación no cambia cuando θ se reemplaza por $\pi - \theta$, la curva es simétrica respecto a la recta vertical $\theta = \pi/2$.



(a)

(b)



(c)

FIGURA 14

Las curvas trazadas en los ejemplos 6 y 8 son simétricas respecto al eje polar, porque $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Las curvas de los ejemplos 7 y 8 son simétricas respecto a $\theta = \pi/2$ porque $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$. La rosa de cuatro hojas también es simétrica respecto al polo. Estas propiedades de simetría se podrían haber usado para trazar las curvas. En el caso del ejemplo 6, solo se requiere hacer la gráfica de los puntos para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y después reflejar a través del eje polar para obtener la circunferencia completa.

Tangentes a curvas polares

Para encontrar una recta tangente a una curva polar $r = f(\theta)$, se considera θ como un parámetro y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Después, con el método para encontrar pendientes de curvas paramétricas (ecuación 10.2.1) y la regla del producto, se tiene

3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Las rectas tangentes horizontales se localizan al determinar los puntos donde $dy/d\theta = 0$ (siempre que $dx/d\theta \neq 0$). Del mismo modo, se localizan rectas tangentes verticales en los puntos donde $dx/d\theta = 0$ (siempre que $dy/d\theta \neq 0$).

Observe que si se están buscando rectas tangentes en el polo, entonces $r = 0$ y la ecuación 3 se simplifica a

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad \text{si} \quad \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

En el ejemplo 8 se encuentra que $r = \cos 2\theta = 0$ cuando $\theta = \pi/4$ o $3\pi/4$. Esto significa que las rectas $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ (o $y = x$ y $y = -x$) son rectas tangentes a $r = \cos 2\theta$ en el origen.

EJEMPLO 9

(a) Para la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ del ejemplo 7, encuentre la pendiente de la recta tangente cuando $\theta = \pi/3$.
(b) Encuentre los puntos sobre la cardioide donde la recta tangente es horizontal o vertical.

SOLUCIÓN Al utilizar la ecuación 3 con $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\,\cos\theta - (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta)}$$

(a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \pi/3$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\operatorname{sen}(\pi/3))}{(1 + \operatorname{sen}(\pi/3))(1 - 2\operatorname{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}/2)(1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

(b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \quad \text{cuando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Debido a que, hay rectas tangentes horizontales en los puntos $(2, \pi/2)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$ y las rectas tangentes verticales en $(\frac{3}{2}, \pi/6)$ y $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$. Cuando $\theta = 3\pi/2$, tanto $dy/d\theta$ como $dx/d\theta$ son 0, por lo que se debe tener cuidado. Usando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{1 + 2\operatorname{sen}\theta}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \infty$$

Por simetría, $$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^+}\frac{dy}{dx} = -\infty$$

Por lo que hay una recta tangente vertical en el polo (véase la figura 15). ■

$\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ $m=-1$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ $(0, 0)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$

FIGURA 15
Rectas tangentes para $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

NOTA En lugar de tener que recordar la ecuación 3, se podría usar el método empleado para deducirla. En el caso del ejemplo 9 se puede escribir

$$x = r\cos\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

Entonces se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\ \cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta}$$

que es equivalente a nuestra expresión previa.

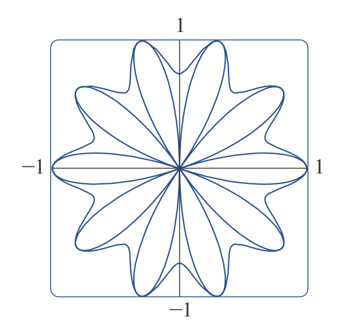


FIGURA 16
$r = \operatorname{sen}^3(2.5\theta) + \cos^3(2.5\theta)$

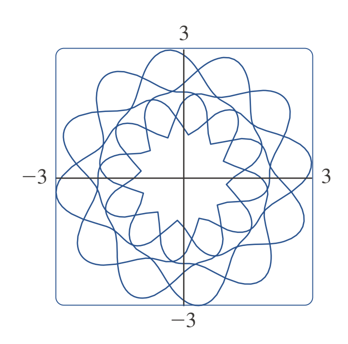


FIGURA 17
$r = 2 + \operatorname{sen}^3(2.4\theta)$

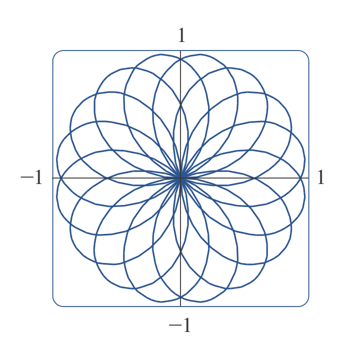


FIGURA 18
$r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$

Trazo de gráficas de curvas polares con dispositivos de graficación

Aunque es útil poder trazar a mano curvas polares simples, se necesita usar una calculadora o computadora cuando hay ante usted una curva tan complicada como las que se muestran en las figuras 16 y 17.

Algunos dispositivos de graficación tienen comandos que permiten trazar la gráfica de curvas polares directamente. Con otras máquinas se requiere convertir primero a ecuaciones paramétricas. En este caso se toma la ecuación polar $r = f(\theta)$ y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Algunas máquinas requieren que el parámetro se llame t en vez de θ.

EJEMPLO 10 Trace la gráfica de la curva $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$.

SOLUCIÓN Suponga que el dispositivo de graficación no tiene una instrucción de graficación polar integrado. En este caso se necesita trabajar con las correspondientes ecuaciones paramétricas

$$x = r\cos\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\operatorname{sen}\theta$$

En cualquier caso, se necesita determinar el dominio para θ, así que se hace la pregunta: ¿cuántas rotaciones completas se requieren hasta que la curva comience a repetirse por sí misma? Si la respuesta es n, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

y, por tanto, se requiere que $16n\pi/5$ sea un múltiplo par de π. Esto ocurrirá primero cuando $n = 5$. Por tanto, grafique la curva completa si se especifica que $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$. Al cambiar de θ a t, se tienen las ecuaciones

$$x = \operatorname{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \operatorname{sen}(8t/5)\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

cuya curva resultante se muestra en la figura 18. Observe que esta rosa tiene 16 lazos. ■

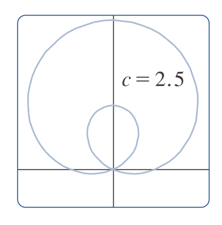
EJEMPLO 11 Investigue la familia de curvas polares dada por $r = 1 + c\operatorname{sen}\theta$. ¿Cómo cambia la forma cuando c cambia? (Estas curvas se llaman ***limaçones***, palabra francesa para los caracoles, debido a la forma de las curvas para ciertos valores de c.)

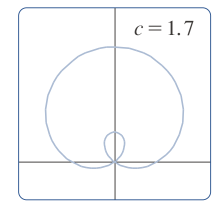
SOLUCIÓN En la figura 19 en la página 666 se muestran gráficas dibujadas por computadora para diferentes valores de c. Para $c > 1$ hay un lazo que decrece en tamaño cuando c decrece. Cuando $c = 1$ el lazo desaparece y la curva se convierte en la cardioide que se trazó en el ejemplo 7. Para c entre 1 y $\frac{1}{2}$ la cúspide de la cardioide desaparece y se convierte en un "hoyuelo". Cuando c decrece de $\frac{1}{2}$ a 0, la *limaçon* tiene forma

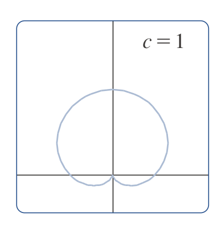


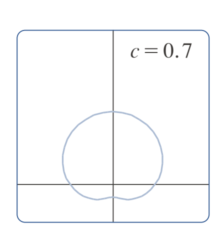
En el ejercicio 53, se le pide demostrar en forma analítica lo que se ha descubierto a partir de las gráficas de la figura 19.

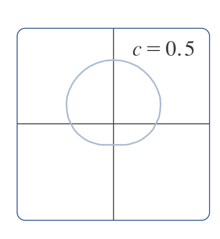
de óvalo. Este óvalo se vuelve más circular cuando $c \to 0$, y cuando $c = 0$ la curva es justo la circunferencia con $r = 1$.

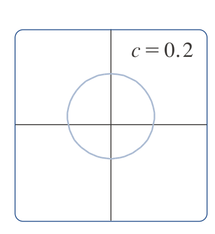


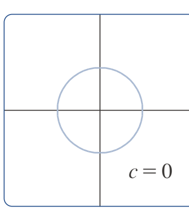


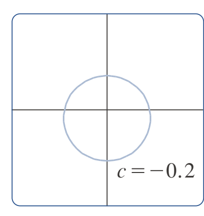


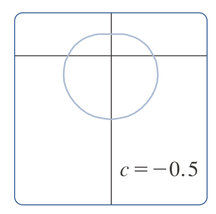


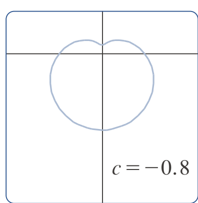


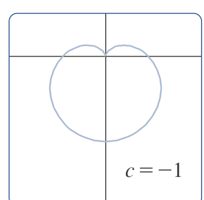












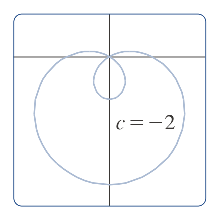


FIGURA 19
Miembros de la familia de *limaçons* $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$

Las partes restantes de la figura 19 muestran que cuando c se vuelve negativa, las formas cambian en orden inverso. De hecho, estas curvas son reflexiones respecto al eje horizontal de las curvas correspondientes con c positiva. ■

Las *limaçons* son muy útiles en el estudio del movimiento planetario. En particular, la trayectoria de Marte vista desde el planeta Tierra ha sido modelada con una *limaçon* de un lazo, como en los incisos de la figura 19 con $|c| > 1$.

10.3 EJERCICIOS

1-2 Trace la gráfica de los puntos cuyas coordenadas polares están dadas. Después encuentre otros dos pares de coordenadas polares de este punto, uno con $r > 0$ y otro con $r < 0$.

1. (a) $(1, \pi/4)$ (b) $(-2, 3\pi/2)$ (c) $(3, -\pi/3)$

2. (a) $(2, 5\pi/6)$ (b) $(1, -2\pi/3)$ (c) $(-1, 5\pi/4)$

3-4 Trace la gráfica del punto cuyas coordenadas polares están dadas. Luego, determine las coordenadas cartesianas del punto.

3. (a) $(2, 3\pi/2)$ (b) $(\sqrt{2}, \pi/4)$ (c) $(-1, -\pi/6)$

4. (a) $(4, 4\pi/3)$ (b) $(-2, 3\pi/4)$ (c) $(-3, -\pi/3)$

5-6 Se dan las coordenadas cartesianas de un punto.
(i) Encuentre las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r > 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.
(ii) Determine las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r < 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

5. (a) $(-4, 4)$ (b) $(3, 3\sqrt{3})$

6. (a) $(\sqrt{3}, -1)$ (b) $(-6, 0)$

7-12 Trace la región en el plano que consiste de todos los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas.

7. $r \geqslant 1$

8. $0 \leqslant r < 2, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$

9. $1 \leqslant r \leqslant 2$

10. $1 \leqslant r \leqslant 3, \quad \pi/6 < \theta < 5\pi/6$

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $r \geqslant 1, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

13. Encuentre la distancia entre los puntos con coordenadas polares $(4, 4\pi/3)$ y $(6, 5\pi/3)$.

14. Encuentre una fórmula para la distancia entre los puntos con coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2).

15-20 Identifique la curva encontrando una ecuación cartesiana para la curva.

15. $r = 2$

16. $r \cos \theta = 1$

17. $r = 5 \cos \theta$

18. $r = \tan \theta \sec \theta$

19. $r = 2 \cos \theta$

20. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 1$

21-26 Encuentre una ecuación polar para la curva representada por las ecuaciones cartesianas dadas.

21. $y = 2$ **22.** $y = x$

23. $y = 1 + 3x$ **24.** $xy = 4$

25. $x^2 + y^2 = 2cx$ **26.** $x^2 - y^2 = 4$

27-28 Para cada una de las curvas descritas, decida con qué ecuación se expresaría más fácilmente, con una polar o una cartesiana. Después escriba una ecuación para la curva.

27. (a) Una recta que pasa por el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje x positivo.
(b) Una recta vertical que pasa por el punto (3, 3).

28. (a) Una circunferencia con radio 5 y centro (2, 3).
(b) Una circunferencia centrada en el origen con radio 4.

29-46 Trace la curva con la ecuación polar dada, al trazar primero la gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas.

29. $r = -2 \operatorname{sen} \theta$ **30.** $r = 1 - \cos \theta$

31. $r = 2(1 + \cos \theta)$ **32.** $r = \ln \theta, \quad \theta \geqslant 1$

33. $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

34. $r = \theta^2, \quad -2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

35. $r = 3 \cos 3\theta$ **36.** $r = -\operatorname{sen} 5\theta$

37. $r = \cos 5\theta$ **38.** $r = 2 \operatorname{sen} 6\theta$

39. $r = 1 + 3 \cos \theta$ **40.** $r = 1 + 5 \operatorname{sen} \theta$

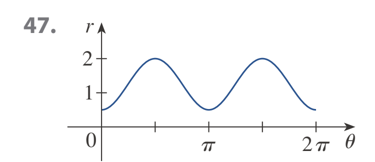
41. $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$ **42.** $r^2 = \cos 4\theta$

43. $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$ **44.** $r = 3 + 4 \cos \theta$

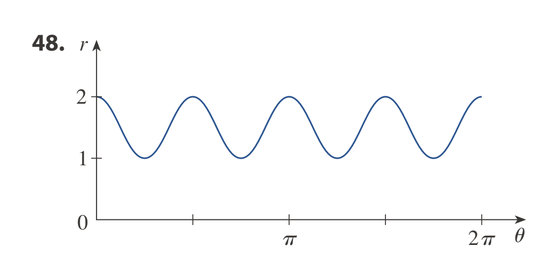
45. $r = \operatorname{sen}(\theta/2)$ **46.** $r = \cos(\theta/3)$

47-48 La figura muestra una gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas. Utilícela para trazar la correspondiente curva polar.

47.



48.



49. Demuestre que la curva polar $r = 4 + 2 \sec \theta$ (llamada una **concoide**) tiene la recta $x = 2$ como asíntota vertical demostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} x = 2$. Utilice este hecho para ayudarse a trazar la concoide.

50. Demuestre que la curva $r = 2 - \csc \theta$ (también una concoide) tiene la recta $y = -1$ como una asíntota horizontal demostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} y = -1$. Utilice este hecho para ayudarse a trazar la concoide.

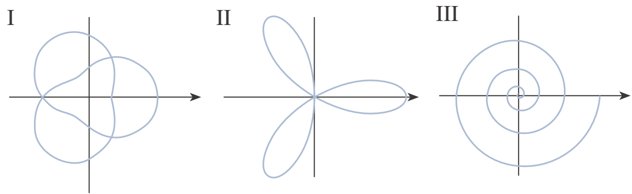
51. Demuestre que la curva $r = \operatorname{sen} \theta \tan \theta$ (llamada **cisoide de Diocles**) tiene la recta $x = 1$ como una asíntota vertical. Demuestre también que toda la curva está dentro de la banda vertical $0 \leqslant x < 1$. Utilice estos hechos para ayudarse a trazar la cisoide.

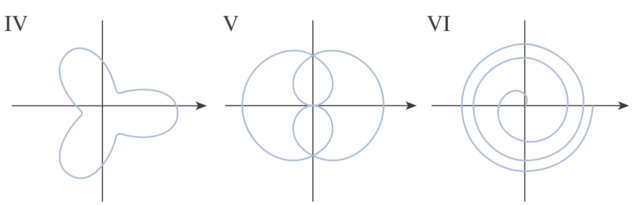
52. Trace la curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

53. (a) En el ejemplo 11, la gráfica sugiere que la *limaçon* $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ tiene un lazo interior cuando $|c| > 1$. Demuestre que esto es cierto y encuentre los valores de θ que corresponden a este lazo interior.
(b) En la figura 19 parece que la *limaçon* pierde su hoyuelo cuando $c = \frac{1}{2}$. Demuéstrelo.

54. Relacione las ecuaciones polares con las gráficas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No utilice dispositivos de graficación.)

(a) $r = \ln \theta, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant 6\pi$ (b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 8\pi$
(c) $r = \cos 3\theta$ (d) $r = 2 + \cos 3\theta$
(e) $r = \cos(\theta/2)$ (f) $r = 2 + \cos(3\theta/2)$





55-60 Encuentre la pendiente de la recta tangente para la curva polar dada en el punto especificado por el valor de θ.

55. $r = 2 \cos \theta, \quad \theta = \pi/3$ **56.** $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta, \quad \theta = \pi/4$

57. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$ **58.** $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

59. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$ **60.** $r = 1 + 2 \cos \theta, \quad \theta = \pi/3$

61-64 Encuentre los puntos sobre la curva dada donde la recta tangente es horizontal o vertical.

61. $r = 3 \cos \theta$ **62.** $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

63. $r = 1 + \cos \theta$ **64.** $r = e^{\theta}$

65. Demuestre que la ecuación polar $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$, donde $ab \neq 0$, representa una circunferencia y encuentre su centro y radio.

66. Demuestre que las curvas $r = a \operatorname{sen} \theta$ y $r = a \cos \theta$ se cortan en ángulos rectos.

67-72 Utilice un dispositivo de graficación para trazar la curva polar. Elija el intervalo para el parámetro para asegurarse que se trace toda la curva.

67. $r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide de Freeth)

68. $r = \sqrt{1 - 0.8 \operatorname{sen}^2 \theta}$ (hipopede)

69. $r = e^{\operatorname{sen} \theta} - 2 \cos(4\theta)$ (curva mariposa)

70. $r = |\tan \theta|^{|\cot \theta|}$ (curva valentina)

71. $r = 1 + \cos^{999} \theta$ (curva Pac-Man)

72. $r = 2 + \cos(9\theta/4)$

---

73. ¿Cómo se relacionan las gráficas de $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ con la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$? En general, ¿cómo se relaciona la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

74. Utilice una gráfica para estimar la coordenada y de los puntos superiores sobre la curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$. Después utilice su calculadora para encontrar el valor exacto.

75. Investigue la familia de curvas con ecuaciones polares $r = 1 + c \cos \theta$, donde c es un número real. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando c cambia?

76. Investigue la familia de curvas polares

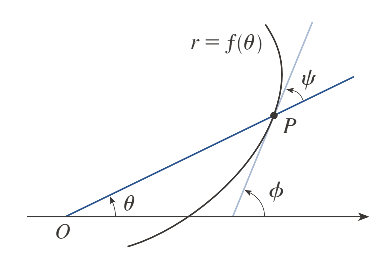
$$r = 1 + \cos^n \theta$$

donde n es un entero positivo. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando n crece? ¿Qué pasa cuando n es muy grande? Explique la forma para n muy grande considerando la gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas.

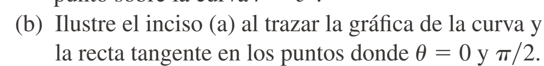
77. Sea P un número cualquiera (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es el ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, demuestre que

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[*Sugerencia*: observe que $\psi = \phi - \theta$ en la figura.]



78. (a) Utilice el ejercicio 77 para demostrar que el ángulo entre la recta tangente y la recta radial es $\psi = \pi/4$ en todo punto sobre la curva $r = e^{\theta}$.



(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y la recta tangente en los puntos donde $\theta = 0$ y $\pi/2$.

(c) Demuestre que cualquier curva polar $r = f(\theta)$, con la propiedad de que el ángulo ψ entre la recta radial y la recta tangente es una constante, debe tener la forma $r = Ce^{k\theta}$, donde C y k son constantes.

PROYECTO DE LABORATORIO FAMILIAS DE CURVAS POLARES

En este proyecto descubrirá lo interesante y bello que pueden ser las formas de las familias de curvas polares. También verá cómo cambia la forma de las curvas cuando varían las constantes.

1. (a) Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones polares $r = \operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo. ¿Cómo se relaciona n con el número de lazos?

(b) ¿Qué pasa si la ecuación del inciso (a) se reemplaza por $r = |\operatorname{sen} n\theta|$?

2. Una familia de curvas está dada por las ecuaciones $r = 1 + c \operatorname{sen} n\theta$, donde c es un número real y n es un entero positivo. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando n crece? ¿Cómo cambia cuando c cambia? Ilustre graficando suficientes miembros de la familia para apoyar sus conclusiones.

3. Una familia de curvas tiene las ecuaciones polares

$$r = \frac{1 - a \cos \theta}{1 + a \cos \theta}$$

Investigue cómo cambian las gráficas cuando el número a cambia. En particular, debe identificar la transición de los valores de a para los cuales la forma básica de la curva cambia.

4. El astrónomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudió la familia de curvas con ecuaciones polares

$$r^4 - 2c^2r^2 \cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

donde a y c son números reales positivos. Estas curvas se llaman **óvalos de Cassini** aunque tienen la forma de óvalo solo para ciertos valores de a y c. (Cassini pensó que estas curvas podían representar órbitas planetarias mejor que las elipses de Kepler.) Investigue la variedad de formas que estas curvas pueden tener. En particular, ¿cómo se relacionan a y c entre sí cuando la curva se divide en dos partes?

10.4 Áreas y longitudes en coordenadas polares

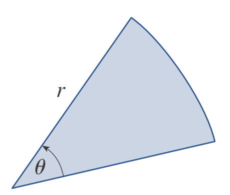


FIGURA 1

En esta sección se desarrolla la fórmula para el área de una región cuya frontera está dada por una ecuación polar. Se necesita utilizar la fórmula para el área de un sector de un círculo:



1 $$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

donde, como se ve en la figura 1, r es el radio y θ es la medida en radianes del ángulo central. La fórmula 1 se sigue del hecho de que el área de un sector es proporcional a su ángulo central: $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. (Véase también el ejercicio 7.3.35.)

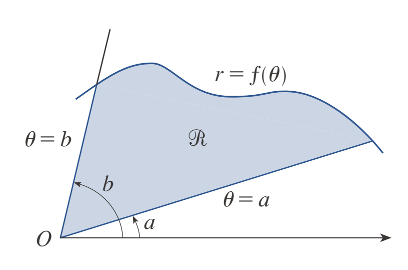


FIGURA 2

Sea $\mathcal{R}$ la región, ilustrada en la figura 2, acotada por la curva polar $r = f(\theta)$ y por los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$, donde f es una función positiva continua y donde $0 < b - a \leqslant 2\pi$. Se divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos con puntos extremos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ e igual ancho $\Delta\theta$. Entonces los rayos $\theta = \theta_i$ dividen a $\mathcal{R}$ en n pequeñas regiones con ángulo central $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Si se elige θ_i^* en el i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, entonces el área ΔA_i de la i-ésima región está aproximada por el área del sector de un círculo con ángulo central $\Delta\theta$ y radio $f(\theta_i^*)$. (Véase la figura 3.)

Por lo que de la fórmula 1 se tiene

$$\Delta A_i \approx \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta$$

y así una aproximación al área total A de $\mathcal{R}$ es

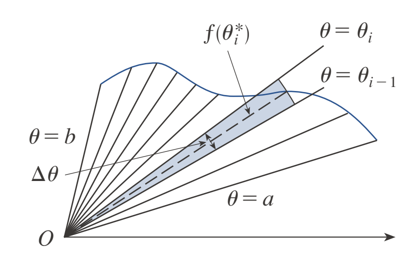


FIGURA 3

2 $$A \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta$$

En la figura 3 parece que la aproximación en (2) mejora cuando $n \to \infty$. Pero las sumas en (2) son sumas de Riemann para la función $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta$$

Por eso parece razonable (y de hecho puede demostrarse) que la fórmula para el área A de la región polar $\mathcal{R}$ sea

3
$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

Usualmente, la fórmula 3 se escribe como

4
$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta$$

con el entendido de que $r = f(\theta)$. Observe la semejanza entre las fórmulas 1 y 4.

Cuando se aplica la fórmula 3 o 4 es útil pensar que el área es barrida por un rayo que gira alrededor de O empezando con un ángulo a y terminando en un ángulo b.

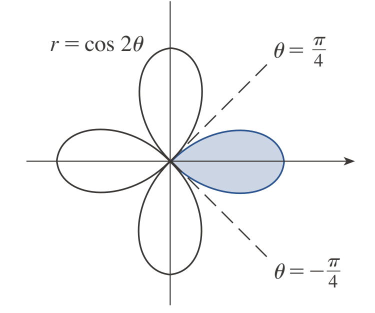


FIGURA 4

EJEMPLO 1 Encuentre el área encerrada por un lazo de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN La curva $r = \cos 2\theta$ se trazó en el ejemplo 10.3.8. Observe de la figura 4 que la región encerrada por el lazo de la derecha es barrida por un rayo que gira de $\theta = -\pi/4$ a $\theta = \pi/4$. Por tanto, la fórmula 4 da

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$ ■

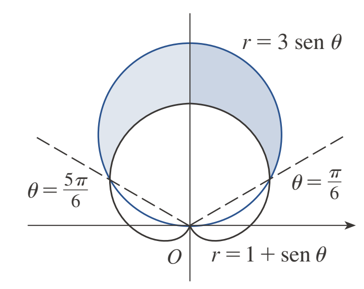


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Encuentre el área de la región que está dentro de la circunferencia $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y fuera del cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.

SOLUCIÓN El cardioide (véase ejemplo 10.3.7) y la circunferencia están trazadas en la figura 5 y la región deseada está sombreada. Los valores de a y b en la fórmula 4 se determinan encontrando los puntos de intersección de las dos curvas. La intersección de estas se da cuando $3 \operatorname{sen} \theta = 1 + \operatorname{sen} \theta$, lo que da $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$, por lo que $\theta = \pi/6$, $5\pi/6$. El área deseada puede encontrarse restando el área dentro del cardioide entre $\theta = \pi/6$ y $\theta = 5\pi/6$ del área dentro de la circunferencia de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Así

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 \operatorname{sen} \theta)^2\,d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \operatorname{sen} \theta)^2\,d\theta$$

Como la región es simétrica respecto al eje vertical $\theta = \pi/2$, se puede escribir

$$A = 2\left[\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 9 \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta\right]$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8 \operatorname{sen}^2\theta - 1 - 2\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4\cos 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \qquad \Big[\text{ya que } \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\Big]$$

$$= 3\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta + 2\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi$$ ■

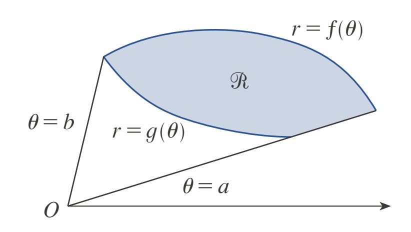


FIGURA 6

En el ejemplo 2 se ilustra el procedimiento para encontrar el área de la región acotada por dos curvas polares. En general, dada $\mathcal{R}$ una región, como la que se ilustra en la figura 6, que está acotada por curvas con ecuaciones polares $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$ y $\theta = b$, donde $f(\theta) \geqslant g(\theta) \geqslant 0$ y $0 < b - a \leqslant 2\pi$. El área A de $\mathcal{R}$ se encuentra restando el área bajo $r = g(\theta)$ del área bajo $r = f(\theta)$, de modo que al utilizar la fórmula 3 se tiene

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_a^b \left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta$$

PRECAUCIÓN El hecho de que un solo punto tenga muchas representaciones en coordenadas polares, dificulta a veces encontrar todos los puntos de intersección de dos curvas polares. Por ejemplo, es obvio de la figura 5 que la circunferencia y la cardioide tienen tres puntos de intersección; sin embargo, en el ejemplo 2 se resolvieron las ecuaciones $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ y $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y se encontraron solo dos puntos $\left(\tfrac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\tfrac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. El origen también es un punto de intersección, pero no se puede determinar resolviendo las ecuaciones de las curvas porque el origen no tiene representación única en coordenadas polares que satisfaga ambas ecuaciones. Observe que, cuando se representa como $(0, 0)$ o $(0, \pi)$, el origen satisface $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ y, por tanto, está dentro de la circunferencia; cuando se representa como $(0, 3\pi/2)$, satisface $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y, por lo tanto, está sobre la cardioide. Considere dos puntos que se mueven a lo largo de las curvas cuando el valor de parámetro θ se incrementa de 0 a 2π. Sobre una curva se alcanza el origen en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; sobre la otra curva se alcanza en $\theta = 3\pi/2$. Los puntos no chocan en el origen porque llegan en diferentes tiempos, no obstante, allí se cortan las curvas.

Por lo que, para encontrar *todos* los puntos de intersección de dos curvas polares, se recomienda dibujar las gráficas de ambas curvas. Es especialmente conveniente usar una calculadora graficadora o computadora como medio auxiliar para esta tarea.

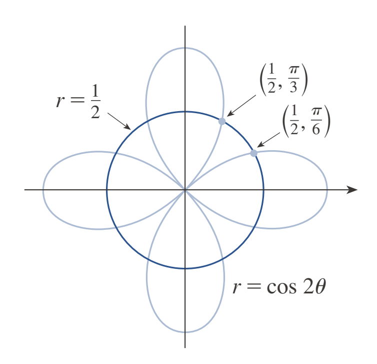


FIGURA 7

EJEMPLO 3 Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = \cos 2\theta$ y $r = \tfrac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Si se resuelven las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \tfrac{1}{2}$, se obtiene $\cos 2\theta = \tfrac{1}{2}$ y, por tanto, $2\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Por lo que los valores de θ entre 0 y 2π que satisfacen ambas ecuaciones son $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Se encontraron cuatro puntos de intersección: $\left(\tfrac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 5\pi/6\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 7\pi/6\right)$ y $\left(\tfrac{1}{2}, 11\pi/6\right)$.

Sin embargo, se puede ver de la figura 7 que las curvas tienen otros cuatro puntos de intersección, a saber, $\left(\tfrac{1}{2}, \pi/3\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 4\pi/3\right)$ y $\left(\tfrac{1}{2}, 5\pi/3\right)$. Estos puntos se pueden encontrar utilizando la simetría o advirtiendo que la otra ecuación de la circunferencia es $r = -\tfrac{1}{2}$ y después resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\tfrac{1}{2}$. ■

Longitud de arco

Para determinar la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, se considera θ como un parámetro y se escriben las ecuaciones paramétricas de la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Usando la regla del producto y derivando con respecto a θ se obtiene

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$$



por lo que utilizando $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, se tiene

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta \ \operatorname{sen}\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$+ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta \ \cos\theta + r^2\cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

Suponiendo que f' es continua, se puede utilizar el teorema 10.2.5 para expresar la longitud de arco como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Por tanto, la longitud de una curva con ecuación polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, es

5
$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

EJEMPLO 4 Encuentre la longitud de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN La cardioide se muestra en la figura 8. (Trazada en el ejemplo 10.3.7.) Su longitud total está dada por el intervalo del parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), por lo que la fórmula 5 da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

Se podría haber evaluado esta integral multiplicando y dividiendo el integrando por $\sqrt{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$, o se podría utilizar la computadora. En cualquier caso, se ve que la longitud de la cardioide es $L = 8$. ■

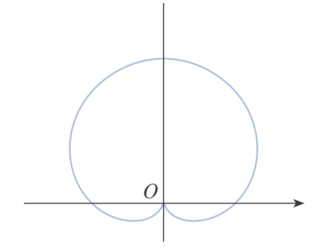


FIGURA 8
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

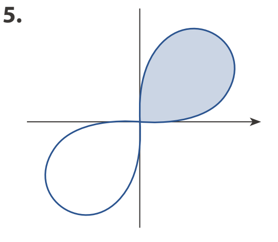
10.4 EJERCICIOS

1-4 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas y que están en el sector especificado.

1. $r = \theta^2$, $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$
2. $r = e^{\theta/2}$, $\quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
3. $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$, $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$
4. $r = 1/\theta$, $\quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

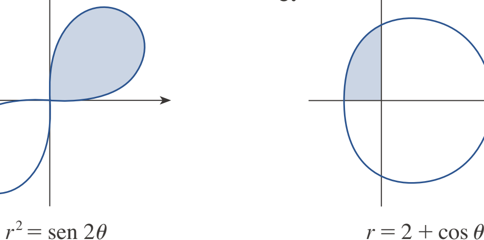
5-8 Encuentre el área de la región sombreada.

5.



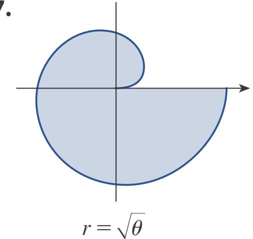
$r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

6.

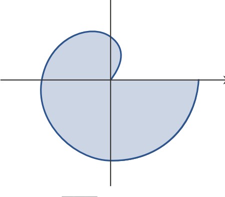


$r = 2 + \cos\theta$

7.



8.



9-12 Trace la curva y encuentre el área que encierra.

9. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **10.** $r = 4 + 3 \operatorname{sen} \theta$

11. $r = 3 + 2 \cos \theta$ **12.** $r = 2 - \cos \theta$

13-16 Trace la gráfica de la curva y encuentre el área que encierra.

13. $r = 2 + \operatorname{sen} 4\theta$ **14.** $r = 3 - 2 \cos 4\theta$

15. $r = \sqrt{1 + \cos^2(5\theta)}$ **16.** $r = 1 + 5 \operatorname{sen} 6\theta$

17-21 Encuentre el área de la región encerrada por uno de los lazos de la curva.

17. $r = 4 \cos 3\theta$ **18.** $r^2 = 4 \cos 2\theta$

19. $r = \operatorname{sen} 4\theta$ **20.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

21. $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$ (lazo interno)

22. Encuentre el área encerrada por el lazo de la **estrofoide** $r = 2 \cos \theta - \sec \theta$.

23-28 Encuentre el área de la región que está dentro de la primera curva y fuera de la segunda curva.

23. $r = 4 \operatorname{sen} \theta, \quad r = 2$

24. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta, \quad r = 1$

25. $r = 2 \cos \theta, \quad r = 1$

26. $r = 1 + \cos \theta, \quad r = 2 - \cos \theta$

27. $r = 3 \cos \theta, \quad r = 1 + \cos \theta$

28. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta, \quad r = 3 \operatorname{sen} \theta$

29-34 Encuentre el área de la región que está dentro de ambas curvas.

29. $r = 3 \operatorname{sen} \theta, \quad r = 3 \cos \theta$

30. $r = 1 + \cos \theta, \quad r = 1 - \cos \theta$

31. $r = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = \cos 2\theta$

32. $r = 3 + 2 \cos \theta, \quad r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$

33. $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = 1$

34. $r = a \operatorname{sen} \theta, \quad r = b \cos \theta, \quad a > 0, \ b > 0$

35. Encuentre el área dentro del lazo más grande y fuera del lazo más pequeño de la *limaçon* $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$.

36. Encuentre el área entre el lazo más grande y el lazo pequeño encerrado dentro de la curva $r = 1 + 2 \cos 3\theta$.

37-42 Encuentre todos los puntos de intersección de las curvas dadas.

37. $r = \operatorname{sen} \theta, \quad r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

38. $r = 1 + \cos \theta, \quad r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

39. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta, \quad r = 3 \operatorname{sen} \theta$

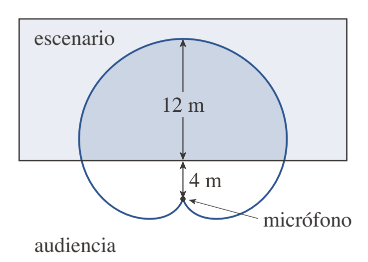
40. $r = \cos 3\theta, \quad r = \operatorname{sen} 3\theta$

41. $r = \operatorname{sen} \theta, \quad r = \operatorname{sen} 2\theta$

42. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

43. Los puntos de intersección de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y el lazo en espiral $r = 2\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, no se pueden encontrar exactamente. Utilice un dispositivo de graficación para aproximar los valores de θ en los que se intersecan. Después use estos valores para estimar el área que está dentro de ambas curvas.

44. Cuando se graban programas en vivo, es frecuente que los ingenieros de sonido utilicen un micrófono con un fonocaptor en forma de cardioide porque suprime el ruido de la audiencia. Suponga que el micrófono se coloca a 4 m del frente del escenario (como en la figura) y la frontera de la región de captación óptima está dada por la cardioide $r = 8 + 8 \operatorname{sen} \theta$, donde r se mide en metros y el micrófono está en el polo. Los músicos quieren conocer el área que tendrán en el escenario dentro del campo óptimo de captación del micrófono. Conteste esta pregunta.



45-48 Encuentre la longitud exacta de la curva polar.

45. $r = 2 \cos \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

46. $r = 5^\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

47. $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

48. $r = 2(1 + \cos \theta)$

49-50 Encuentre la longitud exacta de la curva. Utilice una gráfica para determinar el intervalo del parámetro.

49. $r = \cos^4(\theta/4)$ **50.** $r = \cos^2(\theta/2)$

51-54 Utilice una calculadora para encontrar la longitud de la curva redondeada a cuatro decimales. Si es necesario, trace la gráfica de la curva para determinar el intervalo del parámetro.

51. Un lazo de la curva $r = \cos 2\theta$

52. $r = \tan\theta, \quad \pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$

53. $r = \operatorname{sen}(6 \operatorname{sen}\theta)$

54. $r = \operatorname{sen}(\theta/4)$

---

55. (a) Utilice la fórmula 10.2.6 para demostrar que el área de la superficie generada al rotar la curva polar

$$r = f(\theta) \qquad a \leqslant \theta \leqslant b$$

(donde f' es continua y $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$) en torno al eje polar es

$$S = \int_a^b 2\pi r \operatorname{sen}\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

(b) Utilice la fórmula del inciso (a) para encontrar el área de la superficie generada al girar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ en torno al eje polar.

56. (a) Encuentre una fórmula para el área de la superficie generada al rotar la curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$ (donde f' es continua y $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$), en torno a la recta $\theta = \pi/2$.

(b) Encuentre el área de la superficie generada al hacer rotar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ en torno a la recta $\theta = \pi/2$.

10.5 Secciones cónicas

En esta sección se darán definiciones geométricas de las parábolas, elipses e hipérbolas, y se deducirán sus ecuaciones estándar. Se llaman **secciones cónicas**, o **cónicas**, porque resultan de cortar un cono con un plano, como se muestra en la figura 1.

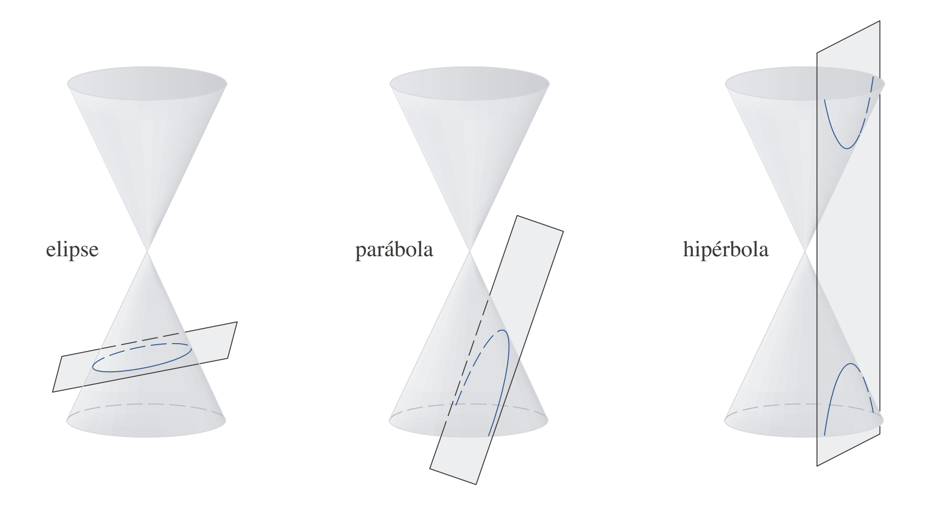


FIGURA 1
Cónicas

Parábolas

eje parábola foco F vértice directriz

FIGURA 2

Una **parábola** es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de un punto fijo F (llamado **foco**) y una recta fija (llamada **directriz**). Esta definición se ilustra en la figura 2. Observe que el punto a la mitad entre el foco y la directriz está sobre la parábola y se llama **vértice**. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se llama **eje** de la parábola.

En el siglo XVI Galileo demostró que la trayectoria de un proyectil disparado al aire con un ángulo respecto al suelo, es una parábola. Desde entonces, las formas parabólicas se han usado en el diseño de los faros de automóviles, telescopios reflectores y puentes suspendidos. (Véase en el problema 22 de la página 273 para la propiedad de reflexión de parábolas que las hace tan útiles.)

Se obtiene una ecuación particularmente simple para una parábola si se coloca su vértice en el origen O y su directriz paralela al eje x como en la figura 3. Si el foco está

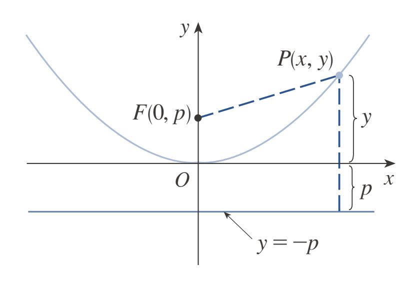


FIGURA 3

en el punto $(0, p)$, entonces la directriz tiene la ecuación $y = -p$. Si $P(x, y)$ es cualquier punto sobre la parábola, entonces la distancia de P al foco es

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

y la distancia de P a la directriz es $|y + p|$. (La figura 3 ilustra el caso donde $p > 0$.) La propiedad que define a una parábola es que estas distancias son iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Una ecuación equivalente se obtiene elevando al cuadrado y simplificando:

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2$$

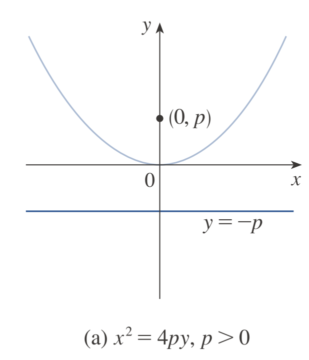
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

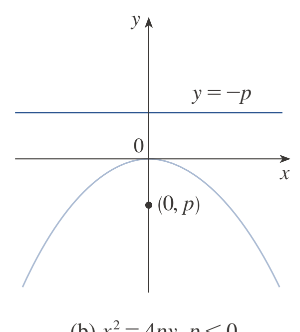
1 La ecuación de la parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$ es

$$x^2 = 4py$$

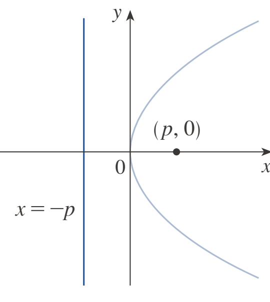
Si se escribe $a = 1/(4p)$, entonces la ecuación estándar de una parábola (1) se convierte en $y = ax^2$. Abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$ [véase la figura 4, incisos (a) y (b)]. La gráfica es simétrica con respecto al eje y porque (1) permanece sin cambio cuando x se sustituye por $-x$.



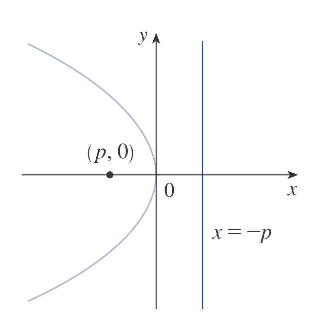
(a) $x^2 = 4py$, $p > 0$



(b) $x^2 = 4py$, $p < 0$



(c) $y^2 = 4px$, $p > 0$



(d) $y^2 = 4px$, $p < 0$

FIGURA 4

Si se intercambian x y y en (1), se obtiene



$$y^2 = 4px$$

que es una ecuación de la parábola con foco en $(p, 0)$ y directriz $x = -p$. (Intercambiar x y y equivale a reflejar a través de la recta $y = x$.) La parábola abre hacia la derecha si $p > 0$ y hacia la izquierda si $p < 0$ [véase la figura 4, incisos (c) y (d)]. En ambos casos, la gráfica es simétrica respecto al eje x, que es el eje de la parábola.

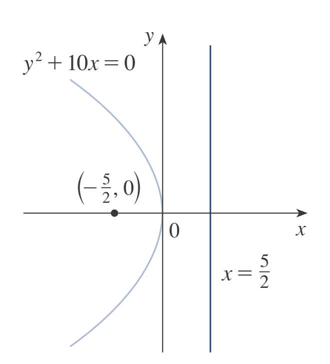


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 10x = 0$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Si se escribe la ecuación como $y^2 = -10x$ y se compara con la ecuación 2, se ve que $4p = -10$, de modo que $p = -\frac{5}{2}$. Por lo que el foco es $(p, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{5}{2}$. El trazo se muestra en la figura 5. ■

Elipses

Una **elipse** es el conjunto de puntos en un plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante (véase la figura 6). Estos dos puntos fijos se llaman **focos** (plural del lugar geométrico **foco**). Una de las leyes de Kepler es que las órbitas de los planetas en el sistema solar son elipses con el Sol en un foco.

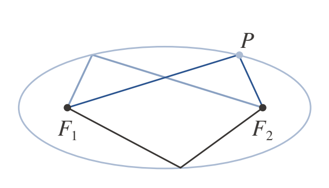


FIGURA 6

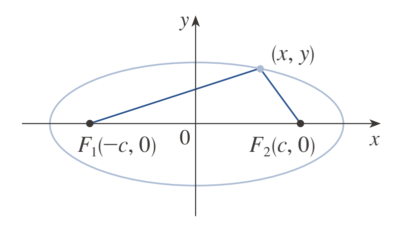


FIGURA 7

Con el fin de obtener la ecuación más simple para una elipse, se coloca los focos en el eje x en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ como en la figura 7, de modo que el origen esté a la mitad entre los focos. Sea $2a > 0$ la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos. Entonces $P(x, y)$ es un punto sobre la elipse cuando

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

es decir,
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o
$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados, se tiene

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

que se puede simplificar como $a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$

Elevando al cuadrado otra vez:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

lo que resulta
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Del triángulo F_1F_2P de la figura 7 se ve que $2c < 2a$, por lo que $c < a$, y por tanto, $a^2 - c^2 > 0$. Por conveniencia, sea $b^2 = a^2 - c^2$. Entonces la ecuación de la elipse se convierte en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ o, si ambos lados se dividen entre a^2b^2.

3
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

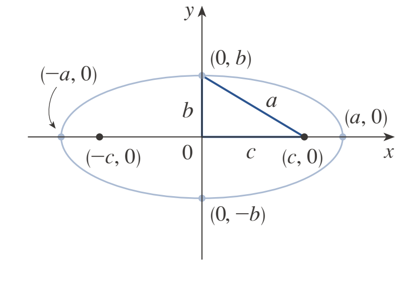


FIGURA 8
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geqslant b$

Puesto que $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, se deduce que $b < a$. Las intersecciones con el eje x se encuentran al hacer $y = 0$. Entonces $x^2/a^2 = 1$, o bien $x^2 = a^2$, de modo que $x = \pm a$. Los puntos correspondientes $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se llaman **vértices** de la elipse y el segmento de recta que une los vértices se llama **eje mayor**. Para encontrar las intersecciones con el eje y se hace $x = 0$ y se obtiene $y^2 = b^2$, por lo que $y = \pm b$. El segmento de recta que une $(0, b)$ y $(0, -b)$ es el **eje menor**. La ecuación 3 no cambia si x se sustituye por $-x$ o y se reemplaza por $-y$, por lo que la elipse es simétrica respecto a ambos ejes. Observe que si los focos coinciden, entonces $c = 0$, de modo que $a = b$ y la elipse se convierte en una circunferencia con radio $r = a = b$.

Se resume esta discusión como se muestra enseguida (véase la figura 8).



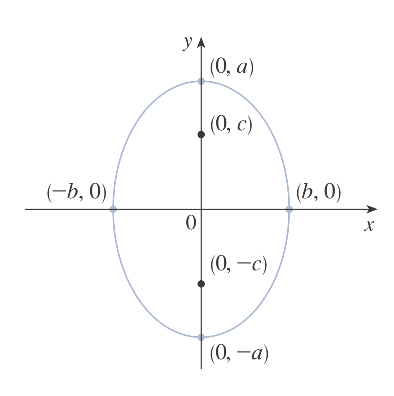


FIGURA 9
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a \geqslant b$

4 La elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$

tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(\pm a, 0)$.

Si los focos de una elipse se localizan en el eje y en $(0, \pm c)$, entonces se puede encontrar su ecuación al intercambiar x y y en (4). (Véase la figura 9.)

5 La elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$

tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(0, \pm a)$.

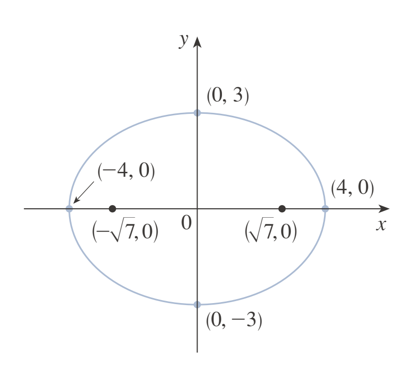


FIGURA 10
$9x^2 + 16y^2 = 144$

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$ y localice los focos.

SOLUCIÓN Se dividen ambos lados de la ecuación entre 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación está ahora en la forma estándar para una elipse, así que se tiene $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ y $b = 3$. Las intersecciones con el eje x son ± 4 y las intersecciones con el eje y son ± 3. También, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, por lo que $c = \sqrt{7}$ y los focos son $(\pm\sqrt{7}, 0)$. La gráfica se traza en la figura 10. ■

EJEMPLO 3 Obtenga la ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 2)$ y vértices $(0, \pm 3)$.

SOLUCIÓN Al usar la notación de (5), se tiene $c = 2$ y $a = 3$. Entonces se obtiene $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$, por lo que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Otra forma de escribir la ecuación es $9x^2 + 5y^2 = 45$. ■

Al igual que las parábolas, las elipses tienen una propiedad de reflexión interesante que tiene consecuencias prácticas. Si se coloca una fuente de luz o sonido en un foco con secciones transversales elípticas, entonces toda la luz o sonido se refleja de la superficie al otro foco (véase el ejercicio 65). Este principio se usa en *litotripsia*, un tratamiento para cálculos renales. Un reflector con sección transversal elíptica se coloca de tal manera que el cálculo está en un foco. Ondas sonoras de alta intensidad generadas en el otro foco, se reflejan hacia el cálculo y lo destruyen sin dañar el tejido circundante. Se ahorra al paciente el traumatismo de la cirugía y se recupera en pocos días.

Hipérbolas

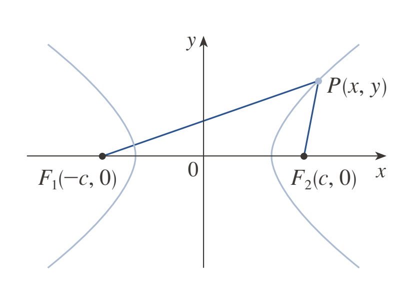


FIGURA 11
P está sobre la hipérbola cuando $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$.

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (los **focos**) es una constante. Esta definición se ilustra en la figura 11.

Las hipérbolas aparecen con frecuencia como gráficas de ecuaciones en química, física, biología y economía (ley de Boyle, ley de Ohm, curvas de oferta y demanda). Una aplicación particularmente importante de las hipérbolas se encuentra en los sistemas de navegación desarrollados en la I y la II guerras mundiales (véase el ejercicio 51).

Observe que la definición de una hipérbola es similar a la de una elipse; el único cambio es que la suma de las distancias se convirtió en una diferencia de distancias. De hecho, la deducción de la ecuación de una hipérbola es también similar a la que se dio antes para una elipse. Se deja demostrar en el ejercicio 52 que cuando los focos están sobre el eje x en $(\pm c, 0)$ y la diferencia de distancias es $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, entonces la ecuación de la hipérbola es

6 $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$. Observe que las intersecciones con el eje x son de nuevo $\pm a$ y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. Pero si se hace $x = 0$ en la ecuación 6 se obtiene $y^2 = -b^2$, que es imposible, así que no hay intersección con el eje y. La hipérbola es simétrica respecto a ambos ejes.

Para analizar más la hipérbola, de la ecuación 6 se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

Esto demuestra que $x^2 \geqslant a^2$, de modo que $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Por consiguiente, se tiene que $x \geqslant a$ o $x \leqslant -a$. Esto significa que la hipérbola consta de dos partes, llamadas *ramas*.

Cuando se dibuja una hipérbola, es útil dibujar primero sus **asíntotas**, que son las rectas discontinuas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ que se muestran en la figura 12. Ambas ramas de la hipérbola se aproximan a las asíntotas; es decir, se acercan de manera arbitraria a las asíntotas. (Véase el ejercicio 4.5.73, donde estas rectas se muestran como asíntotas inclinadas.)

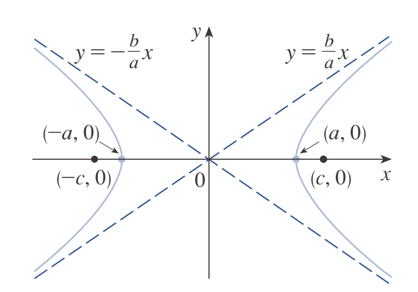


FIGURA 12
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

> **7** La hipérbola
> $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
> tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(\pm a, 0)$ y asíntotas $y = \pm(b/a)x$.

Si los focos de una hipérbola están en el eje y, entonces al invertir los roles de x y y se obtiene la siguiente información, que se ilustra en la figura 13.

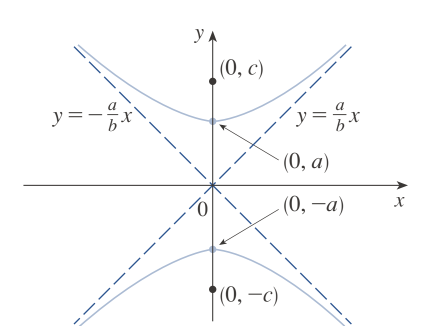


FIGURA 13
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

> **8** La hipérbola
> $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
> tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(0, \pm a)$ y asíntotas $y = \pm(a/b)x$.

EJEMPLO 4 Encuentre los focos y las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ y trace su gráfica.

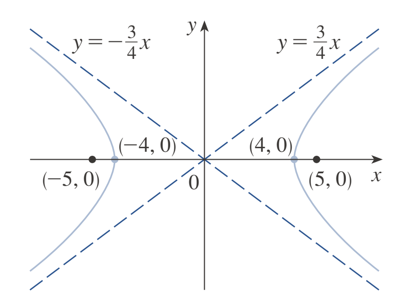


FIGURA 14
$9x^2 - 16y^2 = 144$

SOLUCIÓN Si se dividen ambos lados de la ecuación entre 144, resulta

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

lo cual es de la forma dada en (7) con $a = 4$ y $b = 3$. Como $c^2 = 16 + 9 = 25$, los focos son $(\pm 5, 0)$. Las asíntotas son las rectas $y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$. La gráfica se muestra en la figura 14. ■

EJEMPLO 5 Encuentre los focos y la ecuación de la hipérbola con vértices $(0, \pm 1)$ y asíntota $y = 2x$.

SOLUCIÓN De (8) y la información dada, se ve que $a = 1$ y $a/b = 2$. Por lo que $b = a/2 = \frac{1}{2}$ y $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$. Los focos son $(0, \pm\sqrt{5}/2)$ y la ecuación de la hipérbola es

$$y^2 - 4x^2 = 1$$ ■

Cónicas desplazadas

Como se discute en el apéndice C, las cónicas se desplazan tomando las ecuaciones estándar (1), (2), (4), (5), (7) y (8) y se reemplazan x y y por $x - h$ y $y - k$.

EJEMPLO 6 Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(2, -2)$, $(4, -2)$ y vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$.

SOLUCIÓN El eje mayor es el segmento de recta que une los vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$ y tiene longitud 4, de manera que $a = 2$. La distancia entre los focos es 2, así que $c = 1$. Por lo que $b^2 = a^2 - c^2 = 3$. Como el centro de la elipse es $(3, -2)$, se reemplazan x y y en (4) por $x - 3$ y $y + 2$ para obtener

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

como la ecuación de la elipse. ■

EJEMPLO 7 Trace la cónica $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$ y encuentre sus focos.

SOLUCIÓN Complete los cuadrados como sigue:

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 - 8x) = 176$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 - 8x + 16) = 176 + 4 - 144$$

$$4(y-1)^2 - 9(x-4)^2 = 36$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$$

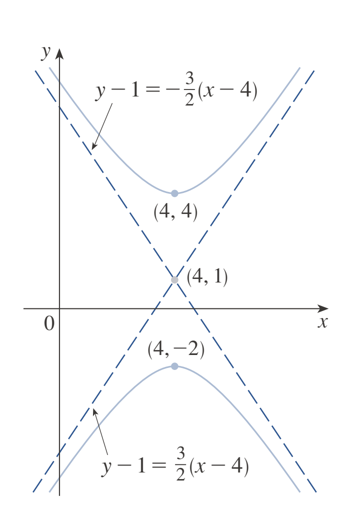


FIGURA 15
$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$

Esta es de la forma (8) excepto que x y y son reemplazadas por $x - 4$ y $y - 1$. Por lo que $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ y $c^2 = 13$. La hipérbola es desplazada cuatro unidades a la derecha y una unidad hacia arriba. Los focos son $(4, 1 + \sqrt{13})$ y $(4, 1 - \sqrt{13})$ y los vértices son $(4, 4)$ y $(4, -2)$. Las asíntotas son $y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x - 4)$. El trazo de la hipérbola se da en la figura 15. ■

10.5 EJERCICIOS

1-8 Encuentre el vértice, focos y directriz de la parábola y trace su gráfica.

1. $x^2 = 6y$

2. $2y^2 = 5x$

3. $2x = -y^2$

4. $x - 1 = (y + 5)^2$

5. $(x + 2)^2 = 8(y - 3)$

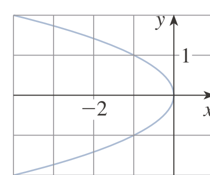
6. $(y - 2)^2 = 2x + 1$

7. $y^2 + 6y + 2x + 1 = 0$

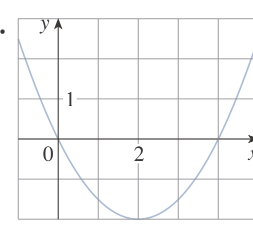
8. $2x^2 - 16x - 3y + 38 = 0$

9-10 Encuentre la ecuación de la parábola. Después determine el foco y la directriz.


9.



10.



11-16 Encuentre los vértices y focos de la elipse y trace su gráfica.

11. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

12. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

13. $x^2 + 9y^2 = 9$

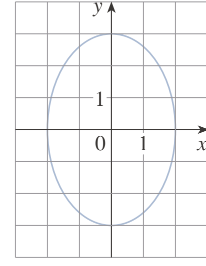
14. $100x^2 + 36y^2 = 225$

15. $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$

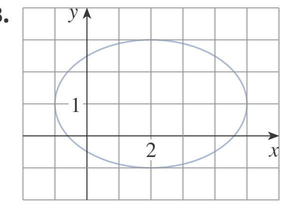
16. $x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$

17-18 Determine una ecuación de la elipse. Luego encuentre sus focos.


17.



18.



19-24 Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.

19. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

20. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

21. $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 28 = 0$

22. $y^2 - 4x^2 - 2y + 16x = 31$

23. $x^2 - y^2 + 2y = 2$

24. $9y^2 - 4x^2 - 36y - 8x = 4$

25-30 Identifique el tipo de sección cónica cuya ecuación se da y determine los vértices y focos.

25. $4x^2 = y^2 + 4$

26. $4x^2 = y + 4$

27. $x^2 = 4y - 2y^2$

28. $y^2 - 2 = x^2 - 2x$

29. $3x^2 - 6x - 2y = 1$

30. $x^2 - 2x + 2y^2 - 8y + 7 = 0$

31-48 Determine una ecuación para la cónica que satisface las condiciones dadas.

31. Parábola, vértice $(0, 0)$, foco $(1, 0)$

32. Parábola, foco $(0, 0)$, directriz $y = 6$

33. Parábola, foco $(-4, 0)$, directriz $x = 2$

34. Parábola, foco $(2, -1)$, vértice $(2, 3)$

35. Parábola, vértice $(3, -1)$, eje horizontal que pasa por $(-15, 2)$

36. Parábola, eje vertical, que pasa por $(0, 4)$, $(1, 3)$ y $(-2, -6)$

37. Elipse, focos $(\pm 2, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$

38. Elipse, focos $(0, \pm\sqrt{2})$, vértices $(0, \pm 2)$

39. Elipse, focos $(0, 2)$, $(0, 6)$, vértices $(0, 0)$, $(0, 8)$

40. Elipse, focos $(0, \pm 5)$, vértice $(0, \pm 13)$

41. Elipse, centro $(-1, 4)$, vértice $(-1, 0)$, foco $(-1, 6)$

42. Elipse, focos $(\pm 4, 0)$, que pasa por $(-4, 1.8)$

43. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, focos $(\pm 5, 0)$

44. Hipérbola, vértices $(0, \pm 2)$, focos $(0, \pm 5)$

45. Hipérbola, vértices $(-3, -4)$, $(-3, 6)$, focos $(-3, -7)$, $(-3, 9)$

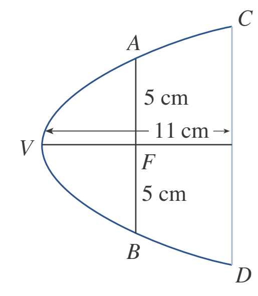
46. Hipérbola, vértices $(-1, 2)$, $(7, 2)$, focos $(-2, 2)$, $(8, 2)$

47. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

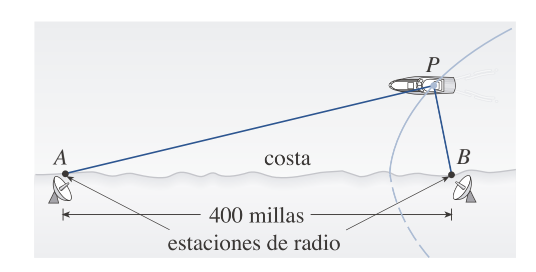
48. Hipérbola, focos $(2, 0)$, $(2, 8)$, asíntotas $y = 3 + \frac{1}{2}x$ y $y = 5 - \frac{1}{2}x$

49. El punto en una órbita lunar próxima a la superficie de la Luna se llama *perilunio*, y el punto más alejado de la superficie se llama *apolunio*. La nave espacial *Apolo 11* se colocó en una órbita lunar elíptica con altitud de perilunio de 110 km y altitud de apolunio de 314 km (arriba de la Luna). Encuentre una ecuación para esta elipse si el radio de la Luna es de 1728 km y su centro está en uno de los focos.

50. En la figura se muestra una sección transversal de un reflector parabólico. El bulbo se localiza en el foco y la abertura en el foco es de 10 cm.
(a) Encuentre una ecuación de la parábola.
(b) Determine el diámetro de la abertura $|CD|$, a 11 cm del vértice.



51. El sistema de navegación por radio loran (LOng RAnge Navigation) era ampliamente utilizado hasta la década de 1990 cuando fue reemplazado por el sistema GPS. En el sistema loran, dos estaciones de radio, localizadas en A y B, transmiten en forma simultánea señales a un barco o un avión localizado en P. La computadora de a bordo convierte la diferencia de tiempo de recibir estas señales en una diferencia de distancia $|PA| - |PB|$, y esto, de acuerdo con la definición de una hipérbola, localice al barco o avión en una rama de una hipérbola (véase la figura). Suponga que la estación B se localiza a 400 millas al este de la estación A sobre la costa. Un barco recibe la señal de B 1200 microsegundos (μs) antes de recibir la señal de A.
(a) Si se supone que la señal de radio viaja a una rapidez de 980 pies/μs, encuentre la ecuación de la hipérbola sobre la que se localiza el barco.
(b) Si el barco se dirige al norte de B, ¿qué tan lejos de la costa está el barco?



52. Use la definición de hipérbola para deducir la ecuación 6 para una hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

53. Demuestre que la función definida por la rama superior de la hipérbola $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ es cóncava hacia arriba.

54. Encuentre la ecuación para la elipse con focos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ y eje principal de longitud 4.

55. Determine el tipo de curva representada por la ecuación

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k - 16} = 1$$

en cada uno de los siguientes casos:
(a) $k > 16$ (b) $0 < k < 16$ (c) $k < 0$
(d) Demuestre que todas las curvas en los incisos (a) y (b) tienen los mismos focos, sin importar el valor de k.

56. (a) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0) se puede expresar como

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

(b) ¿Cuál es la intersección de esta recta tangente con el eje x? Use este hecho para dibujar la recta tangente.

57. Demuestre que las rectas tangentes a la parábola $x^2 = 4py$ trazadas desde cualquier punto sobre la directriz son perpendiculares.

58. Demuestre que, si una elipse y una hipérbola tienen los mismos focos, entonces sus rectas tangentes en cada punto de intersección son perpendiculares.

59. Use ecuaciones paramétricas y la regla de Simpson con $n = 8$ para estimar la circunferencia de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

60. El planeta enano Plutón viaja en una órbita elíptica alrededor del Sol (en un foco). La longitud del eje mayor es 1.18×10^{10} km y la longitud del eje menor es 1.14×10^{10} km. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la distancia que viaja el planeta durante una órbita completa alrededor del Sol.

61. Encuentre el área de la región encerrada por la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y la recta vertical que pasa por un foco.

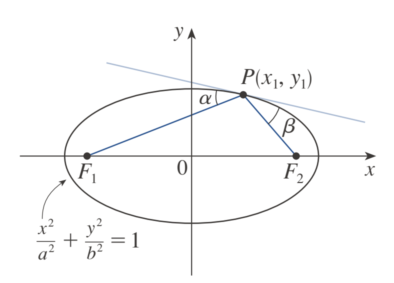
62. (a) Si una elipse gira alrededor de su eje mayor, encuentre el volumen del sólido resultante.
(b) Si gira alrededor de su eje menor, encuentre el volumen resultante.

63. Encuentre el centroide de la región encerrada por el eje x y la mitad superior de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

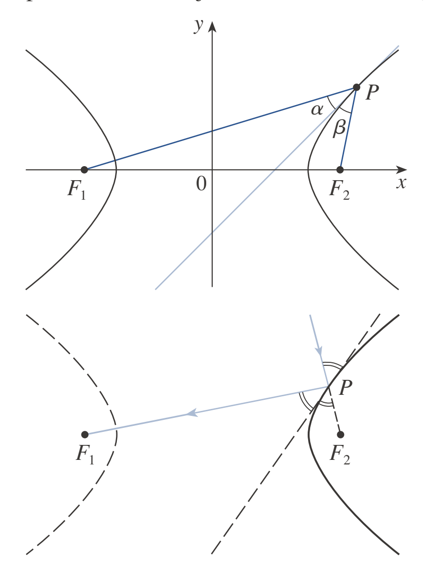
64. (a) Calcule el área de la superficie del elipsoide generado al girar una elipse en torno a su eje mayor.
(b) ¿Cuál es el área de la superficie si la elipse gira en torno de su eje menor?

65. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las rectas PF_1, PF_2 y la elipse como se muestra en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. Esto explica cómo funcionan las cúpulas susurrantes y la litotripsia. El sonido que viene de un foco se refleja y pasa

por el otro foco. [*Sugerencia*: use la fórmula del problema 21 de la página 273 para demostrar que $\tan \alpha = \tan \beta$.]



66. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las rectas PF_1, PF_2 y la hipérbola como se muestra en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (Esta es la propiedad de reflexión de la hipérbola. Demuestra que la luz dirigida a un foco F_2 de un espejo hiperbólico, se refleja hacia el otro foco F_1.)



10.6 Secciones cónicas en coordenadas polares

En la sección precedente se definió la parábola en términos de un foco y una directriz, pero se definieron la elipse y la hipérbola en términos de dos focos. En esta sección se da un tratamiento más unificado de los tres tipos de secciones cónicas en términos de un foco y la directriz. Además, si se coloca el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar simple, la cual es una descripción cómoda del movimiento de planetas, satélites y cometas.

1 Teorema Sea F un punto fijo (llamado foco) y l una recta fija (llamada directriz) en un plano. Sea e un número positivo fijo (llamado excentricidad). El conjunto de todos los puntos P en el plano, tales que

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(esto es, el cociente de la distancia desde F entre la distancia desde l es la constante e) es una sección cónica. La cónica es

(a) una elipse si $e < 1$
(b) una parábola si $e = 1$
(c) una hipérbola si $e > 1$

COMPROBACIÓN Observe que si la excentricidad es $e = 1$, entonces $|PF| = |Pl|$, por lo cual la condición dada simplemente se convierte en la definición de una parábola como se da en la sección 10.5.

Se coloca el foco F en el origen y la directriz paralela al eje y y d unidades a la derecha. Por lo que la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el

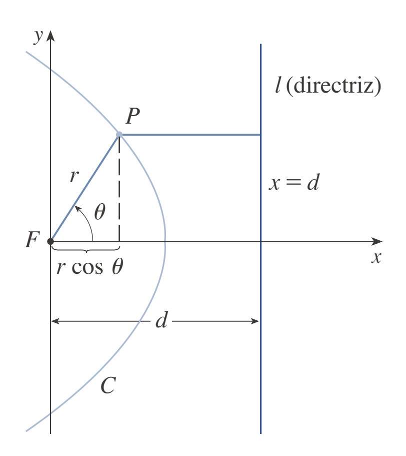


FIGURA 1

punto P tiene coordenadas polares (r, θ), se ve de la figura 1 que

$$|PF| = r \qquad |Pl| = d - r\cos\theta$$

Por lo que la condición $|PF| / |Pl| = e$ o $|PF| = e|Pl|$, resulta

2 $$r = e(d - r\cos\theta)$$

Si se elevan al cuadrado ambas partes de esta ecuación polar y se convierten a coordenadas rectangulares, se obtiene

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

o $$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2$$

Después de completar los cuadrados, se tiene

3 $$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Si $e < 1$, se reconoce a la ecuación 3 como la ecuación de una elipse. De hecho, es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

4 $$h = -\frac{e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

En la sección 10.5 se ve que los focos de una elipse están a una distancia c del centro, donde

5 $$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Esto demuestra que $$c = \frac{e^2d}{1 - e^2} = -h$$

y confirma que el foco como se definió en el teorema 1 significa lo mismo que el foco definido en la sección 10.5. Se deduce también de las ecuaciones 4 y 5 que la excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a}$$

Si $e > 1$, entonces $1 - e^2 < 0$ y se tiene que la ecuación 3 representa una hipérbola. Tal y como se hizo antes, se podría reescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

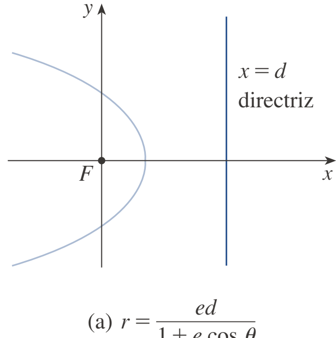
y se ve que

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{donde} \quad c^2 = a^2 + b^2$$ ■

Al resolver la ecuación 2 para r, se ve que la ecuación polar de la cónica que se muestra en la figura 1 se puede expresar como

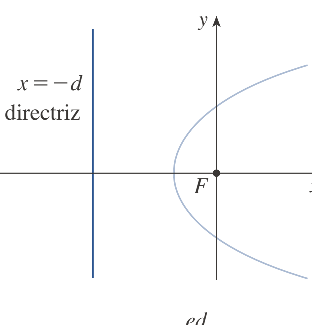
$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

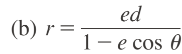
Si se elige que la directriz esté a la izquierda del foco como $x = -d$, o si se elige la directriz paralela al eje polar como $y = \pm d$, entonces la ecuación polar de la cónica está dada por el siguiente teorema, que se ilustra mediante la figura 2. (Véanse los ejercicios 21-23.)



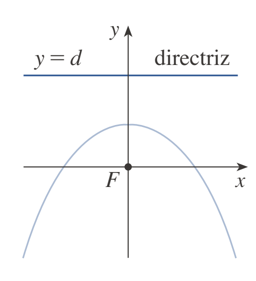


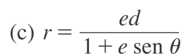
(a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$



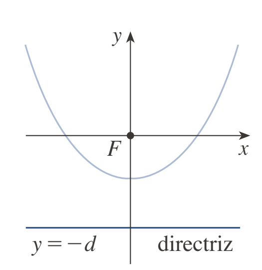


(b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$





(c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$



(d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$

FIGURA 2
Ecuación polar de la cónica

6 Teorema Una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

representa una sección cónica con excentricidad e. La cónica es una elipse si $e < 1$, una parábola si $e = 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación polar para una parábola que tiene su foco en el origen y cuya directriz es la recta $y = -6$.

SOLUCIÓN Al usar el teorema 6 con $e = 1$ y $d = 6$, y emplear el inciso (d) de la figura 2, se ve que la ecuación de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \text{sen}\,\theta}$$ ■

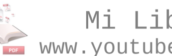
EJEMPLO 2 Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

Encuentre la excentricidad, identifique la cónica, localice la directriz y trace la cónica.

SOLUCIÓN Al dividir numerador y denominador entre 3, se escribe la ecuación como

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$



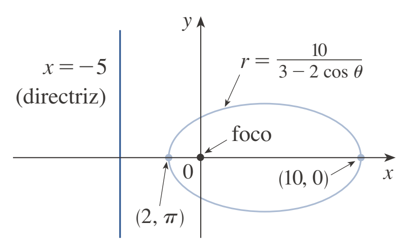


FIGURA 3

Del teorema 6 se ve que esta ecuación representa una elipse con $e = \frac{2}{3}$. Puesto que $ed = \frac{10}{3}$, se tiene

$$d = \frac{\frac{10}{3}}{e} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}} = 5$$

por lo que la directriz tiene la ecuación cartesiana $x = -5$. Cuando $\theta = 0$, $r = 10$; cuando $\theta = \pi$, $r = 2$. Por lo que los vértices tienen coordenadas polares (10, 0) y $(2, \pi)$. La elipse se traza en la figura 3. ■

EJEMPLO 3 Trace la cónica $r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en la forma

$$r = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

se ve que la excentricidad es $e = 2$ y, por tanto, la ecuación representa una hipérbola. Puesto que $ed = 6$, $d = 3$ y la directriz tiene ecuación $y = 3$. Los vértices ocurren cuando $\theta = \pi/2$ y $3\pi/2$, por lo que son $(2, \pi/2)$ y $(-6, 3\pi/2) = (6, \pi/2)$. También es útil trazar la gráfica de las intersecciones con el eje x. Estas ocurren cuando $\theta = 0, \pi$; en ambos casos $r = 6$. Para más exactitud, se podrían dibujar las asíntotas. Observe que $r \to \pm\infty$ cuando $1 + 2 \operatorname{sen} \theta \to 0^+$ o 0^- y $1 + 2 \operatorname{sen} \theta = 0$ cuando $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$. Por lo que las asíntotas son paralelas a los rayos $\theta = 7\pi/6$ y $\theta = 11\pi/6$. La hipérbola se traza en la figura 4.

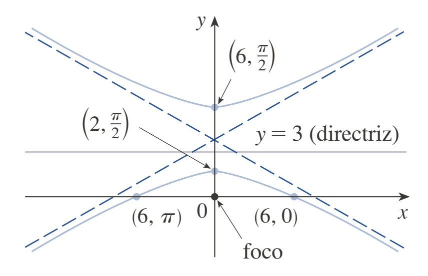
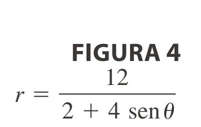


FIGURA 4



$r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$ ■

Al hacer girar secciones cónicas, es mucho más conveniente usar ecuaciones polares que cartesianas. Se usa el hecho (véase el ejercicio 10.3.73) de que la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ girada en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen por un ángulo α.

EJEMPLO 4 Si la elipse del ejemplo 2 se hace girar por un ángulo $\pi/4$ en torno al origen, determine una ecuación polar y trace la gráfica de la elipse resultante.

SOLUCIÓN La ecuación de la elipse rotada se obtiene reemplazando θ con $\theta - \pi/4$ en la ecuación dada en el ejemplo 2. Por lo que la nueva ecuación es

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

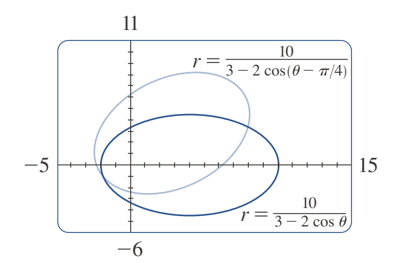


FIGURA 5

Se usa esta ecuación para trazar la gráfica de la elipse girada en la figura 5. Observe que la elipse ha sido girada en torno a su foco izquierdo. ■

En la figura 6 se utiliza una computadora para trazar varias cónicas para mostrar el efecto de variar la excentricidad e. Observe que cuando e es cercana a 0 la elipse es casi circular, mientras que se vuelve más alargada cuando $e \to 1^-$. Cuando $e = 1$, por supuesto, la cónica es una parábola.

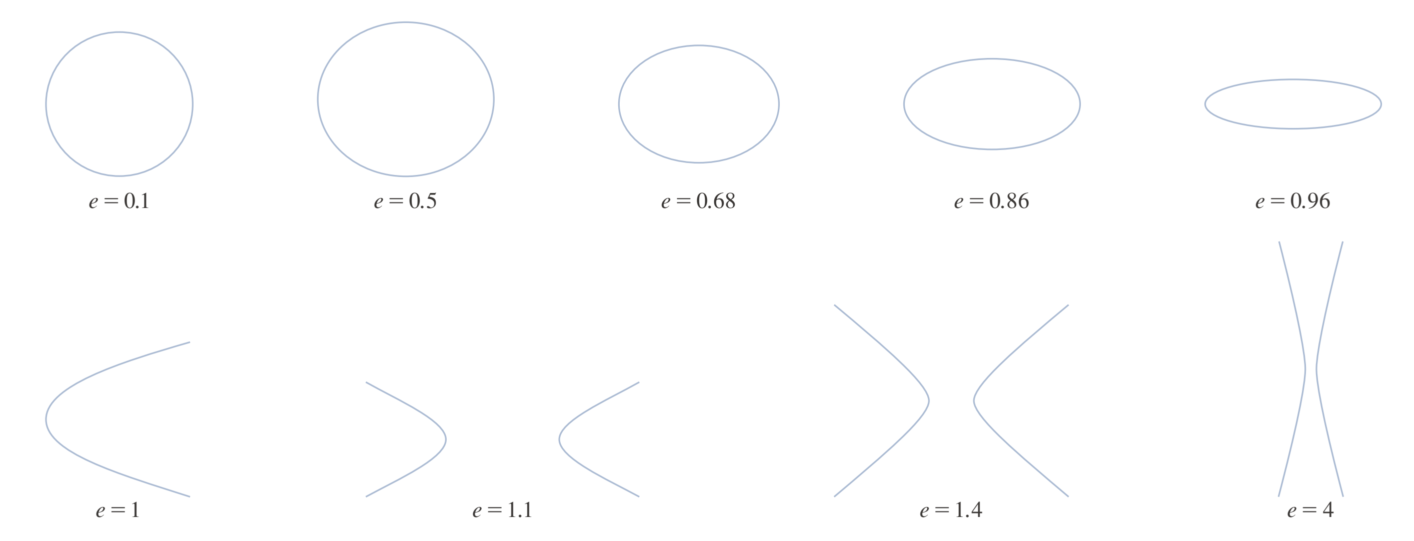


FIGURA 6

Leyes de Kepler

En 1609 el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler, con base en enormes cantidades de datos astronómicos, publicó las tres leyes del movimiento planetario siguientes.

Leyes de Kepler

1. Un planeta gira alrededor del Sol en órbita elíptica con el Sol en uno de los focos.
2. La recta que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Aun cuando Kepler formuló sus leyes en términos del movimiento de planetas alrededor del Sol, se aplican igualmente bien al movimiento de lunas, cometas, satélites y otros cuerpos que giran sujetos a una sola fuerza gravitacional. En la sección 13.4 se demuestra cómo deducir las leyes de Kepler a partir de las leyes de Newton. Aquí se emplea la primera ley de Kepler, junto con la ecuación polar de una elipse, para calcular cantidades de interés en astronomía.

Para fines de cálculos astronómicos, es útil expresar la ecuación de una elipse en términos de su excentricidad e y su semieje mayor a. Se puede expresar la distancia d del foco a la directriz en términos de a si se usa (4):

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \Rightarrow \qquad d^2 = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{e^2} \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

Entonces $ed = a(1 - e^2)$. Si la directriz es $x = d$, entonces la ecuación polar es

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

7 La ecuación polar de una elipse con foco en el origen, semieje mayor a, excentricidad e y directriz $x = d$ se puede expresar en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

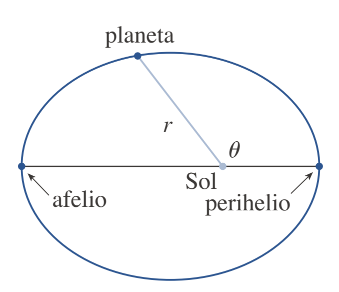


FIGURA 7

Las posiciones de un planeta que sean más cercanas al Sol, y más lejanas a este, se denominan **perihelio** y **afelio**, respectivamente, y corresponden a los vértices de la elipse (véase la figura 7). Las distancias del Sol al perihelio y afelio reciben el nombre de distancia al perihelio y distancia al afelio, respectivamente. En la figura 1 de la página 683 el Sol está en el foco F, por lo que en el perihelio se tiene $\theta = 0$ y, de la ecuación 7,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos 0} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e)$$

Del mismo modo, en el afelio $\theta = \pi$ y $r = a(1 + e)$.

8 La distancia al perihelio de un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia al afelio es $a(1 + e)$.

EJEMPLO 5

(a) Encuentre una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol (en un foco), dado que la excentricidad es alrededor de 0.017 y la longitud del eje mayor es aproximadamente 2.99×10^8 km.
(b) Encuentre la distancia de la Tierra al Sol en el perihelio y el afelio.

SOLUCIÓN

(a) La longitud del eje mayor es $2a = 2.99 \times 10^8$, por lo que $a = 1.495 \times 10^8$. Un dato es que $e = 0.017$ y, por tanto, de la ecuación 7, una ecuación de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} = \frac{(1.495 \times 10^8)[1 - (0.017)^2]}{1 + 0.017\cos\theta}$$

o, aproximadamente,

$$r = \frac{1.49 \times 10^8}{1 + 0.017\cos\theta}$$

(b) De (8), la distancia al perihelio de la Tierra al Sol es

$$a(1 - e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 - 0.017) \approx 1.47 \times 10^8 \text{ km}$$

y la distancia al afelio es

$$a(1 + e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 + 0.017) \approx 1.52 \times 10^8 \text{ km}$$ ■

10.6 EJERCICIOS

1-8 Escriba una ecuación polar de una cónica con el foco en el origen y los datos dados.

1. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $x = 4$
2. Parábola, directriz $x = -3$
3. Hipérbola, excentricidad 1.5, directriz $y = 2$
4. Elipse, excentricidad 0.8, vértice $(1, \pi/2)$
5. Elipse, excentricidad $\frac{2}{3}$, vértice $(2, \pi)$
6. Elipse, excentricidad 0.6, directriz $r = 4 \csc \theta$
7. Parábola, vértice $(3, \pi/2)$
8. Hipérbola, excentricidad 2, directriz $r = -2 \sec \theta$

9-16 (a) Encuentre la excentricidad, (b) identifique la cónica, (c) dé una ecuación de la directriz y (d) trace la cónica.

9. $r = \dfrac{12}{3 - 10 \cos \theta}$
10. $r = \dfrac{1}{2 + \operatorname{sen} \theta}$
11. $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$
12. $r = \dfrac{5}{2 - 4 \cos \theta}$
13. $r = \dfrac{9}{6 + 2 \cos \theta}$
14. $r = \dfrac{1}{3 - 3 \operatorname{sen} \theta}$
15. $r = \dfrac{10}{5 - 6 \operatorname{sen} \theta}$
16. $r = \dfrac{4}{2 + 3 \cos \theta}$

17. (a) Encuentre la excentricidad y la directriz de la cónica $r = 1/(1 - 2 \operatorname{sen} \theta)$ y trace la gráfica de la cónica y su directriz.
    (b) Si esta cónica se hace girar en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen con un ángulo $3\pi/4$, escriba la ecuación resultante y trace la gráfica de su curva.

18. Trace la gráfica de la cónica $r = 4/(5 + 6 \cos \theta)$ y su directriz. También grafique la cónica obtenida al girar esta curva en torno al origen con un ángulo $\pi/3$.

19. Trace la gráfica de las cónicas $r = e/(1 - e \cos \theta)$ con $e = 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 en una pantalla común. ¿Cómo afecta el valor de e la forma de la curva?

20. (a) Trace la gráfica de las cónicas $r = ed/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$ para $e = 1$ y varios valores de d. ¿Cómo afecta el valor de d la forma de la cónica?
    (b) Trace la gráfica de estas cónicas para $d = 1$ y varios valores de e. ¿Cómo afecta el valor de e la forma de la cónica?

21. Demuestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $x = -d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

22. Demuestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

23. Demuestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = -d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

24. Demuestre que las parábolas $r = c/(1 + \cos \theta)$ y $r = d/(1 - \cos \theta)$ se cortan en ángulos rectos.

25. La órbita de Marte alrededor del Sol es una elipse con excentricidad 0.093 y semieje mayor de 2.28×10^8 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.

26. La órbita de Júpiter tiene excentricidad de 0.048 y la longitud del eje mayor es 1.56×10^9 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.

27. La órbita del cometa Halley, visto por última vez en 1986 y que debe volver en 2061, es una elipse con excentricidad 0.97 y un foco en el Sol. La longitud de su eje principal es 36.18 UA. [Una unidad astronómica (UA) es la distancia media entre la Tierra y el Sol, aproximadamente 150 millones de kilómetros.] Encuentre una ecuación polar para la órbita del cometa Halley. ¿Cuál es la distancia máxima desde el cometa al Sol?

28. El cometa Hale-Bopp, descubierto en 1995, tiene una órbita elíptica con excentricidad 0.9951 y la longitud del eje mayor es 356.5 UA. Encuentre una ecuación polar para la órbita de este cometa. ¿Qué tan cerca del Sol llega?


© Dean Ketelsen

29. El planeta Mercurio viaja en una órbita elíptica con excentricidad 0.206. Su distancia mínima del Sol es 4.6×10^7 km. Determine su distancia máxima del Sol.

30. La distancia desde el planeta enano Plutón al Sol es de 4.43×10^9 km en el perihelio y 7.37×10^9 km en el afelio. Determine la excentricidad de la órbita de Plutón.

31. Con los datos del ejercicio 29, calcule la distancia que recorre el planeta Mercurio durante una órbita completa alrededor del Sol. (Si su calculadora o sistema algebraico computacional evalúa integrales definidas, utilícelo. De lo contrario, use la regla de Simpson.)

10 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una curva paramétrica?
(b) ¿Cómo se traza una curva paramétrica?

2. (a) ¿Cómo se encuentra la pendiente de una recta tangente a una curva paramétrica?
(b) Determine el área debajo de una curva paramétrica.

3. Escriba una expresión para cada una de las siguientes descripciones:
(a) La longitud de una curva paramétrica.
(b) El área de la superficie obtenida al hacer girar una curva paramétrica en torno al eje x.

4. (a) Use un diagrama para explicar el significado de las coordenadas polares (r, θ) de un punto.
(b) Escriba ecuaciones que expresen las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto en términos de las coordenadas polares.
(c) ¿Qué ecuaciones usaría para obtener las coordenadas polares de un punto si conociera las coordenadas cartesianas?

5. (a) ¿Cómo se determina la pendiente de una recta tangente a una curva polar?
(b) ¿Cómo se calcula el área de una región acotada por una curva polar?
(c) ¿Cómo se determina la longitud de una curva polar?

6. (a) Dé una definición geométrica de una parábola.
(b) Escriba una ecuación de una parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$. ¿Qué pasa si el foco es $(p, 0)$ y la directriz es $x = -p$?

7. (a) Dé una definición de una elipse en términos de los focos.
(b) Escriba una ecuación para la elipse con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

8. (a) Dé una definición de una hipérbola en términos de los focos.
(b) Escriba una ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.
(c) Escriba ecuaciones para las asíntotas de la hipérbola del inciso (b).

9. (a) ¿Cuál es la excentricidad de una sección cónica?
(b) ¿Qué se puede decir acerca de la excentricidad si la sección cónica es una elipse? ¿Una hipérbola? ¿Una parábola?
(c) Escriba una ecuación polar para una sección cónica con excentricidad e y directriz $x = d$. ¿Qué pasa si la directriz es $x = -d$? ¿$y = d$? ¿$y = -d$?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ satisface $g'(1) = 0$, entonces tiene una recta tangente horizontal cuando $t = 1$.

2. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son derivables dos veces, entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$$

3. La longitud de la curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$.

4. Si un punto se representa por (x, y) en coordenadas cartesianas (donde $x \neq 0$) y (r, θ) en coordenadas polares, entonces $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.

5. Las curvas polares

$$r = 1 - \operatorname{sen} 2\theta \qquad r = \operatorname{sen} 2\theta - 1$$

tienen la misma gráfica.

6. Las ecuaciones $r = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ y $x = 2 \operatorname{sen} 3t$, $y = 2 \cos 3t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ tienen la misma gráfica.

7. Las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^4$ tienen la misma gráfica que $x = t^3$, $y = t^6$.

8. La gráfica de $y^2 = 2y + 3x$ es una parábola.

9. Una recta tangente a una parábola corta la parábola solo una vez.

10. Una hipérbola nunca corta su directriz.

EJERCICIOS

1-4 Trace la curva paramétrica y elimine el parámetro para encontrar la ecuación cartesiana de la curva.

1. $x = t^2 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad -4 \leq t \leq 1$

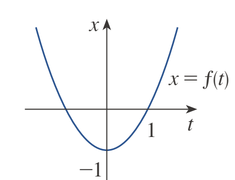
2. $x = 1 + e^{2t}, \quad y = e^t$

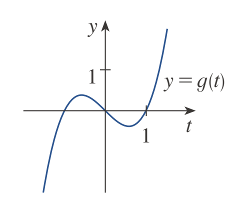
3. $x = \cos\theta, \quad y = \sec\theta, \quad 0 \leq \theta < \pi/2$

4. $x = 2\cos\theta, \quad y = 1 + \operatorname{sen}\theta$

5. Escriba tres diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas para la curva $y = \sqrt{x}$.

6. Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para trazar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en la que se traza la curva cuando se t crece.





7. (a) Ubique el punto con coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$. A continuación, encuentre sus coordenadas cartesianas.
(b) Las coordenadas cartesianas de un punto son $(-3, 3)$. Encuentre dos conjuntos de coordenadas polares para el punto.

8. Trace la región formada de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen $1 \leq r < 2$ y $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$.

9-16 Trace la curva polar.

9. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

10. $r = 1 - \cos\theta$

11. $r = \cos 3\theta$

12. $r = 3 + \cos 3\theta$

13. $r = 1 + \cos 2\theta$

14. $r = 2\cos(\theta/2)$

15. $r = \dfrac{3}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

16. $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\theta}$

17-18 Encuentre la ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

17. $x + y = 2$

18. $x^2 + y^2 = 2$

19. La curva con ecuación polar $r = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ se llama **cocleoide**. Use una gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas para trazar la cocleoide a mano. Después trace la gráfica con una máquina para comprobar su trazo.

20. Trace la gráfica de la elipse $r = 2/(4 - 3\cos\theta)$ y su directriz. Trace la gráfica también de la elipse obtenida por rotación en torno al origen por un ángulo de $2\pi/3$.

21-24 Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor especificado del parámetro.

21. $x = \ln t, \; y = 1 + t^2; \quad t = 1$

22. $x = t^3 + 6t + 1, \quad y = 2t - t^2; \quad t = -1$

23. $r = e^{-\theta}; \quad \theta = \pi$

24. $r = 3 + \cos 3\theta; \quad \theta = \pi/2$

25-26 Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2.

25. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = t - \cos t$

26. $x = 1 + t^2, \quad y = t - t^3$

27. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto mínimo sobre la curva $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 + t + 1$. Después use el cálculo para determinar las coordenadas exactas.

28. Encuentre el área encerrada por el lazo de la curva del ejercicio 27.

29. ¿En qué puntos la curva

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t \qquad y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t$$

tiene rectas tangentes verticales u horizontales? Use esta información para ayudarse a trazar la curva.

30. Determine el área encerrada por la curva del ejercicio 29.

31. Obtenga el área encerrada por la curva $r^2 = 9\cos 5\theta$.

32. Encuentre el área encerrada por el lazo interior de la curva $r = 1 - 3\operatorname{sen}\theta$.

33. Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = 2$ y $r = 4\cos\theta$.

34. Obtenga los puntos de intersección de las curvas $r = \cot\theta$ y $r = 2\cos\theta$.

35. Determine el área de la región que está dentro de ambas circunferencias $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

36. Encuentre el área de la región que está dentro de la curva $r = 2 + \cos 2\theta$ pero fuera de la curva $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$.

37-40 Encuentre la longitud de la curva.

37. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 2$

38. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leq t \leq 1$

39. $r = 1/\theta, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$

40. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

41-42 Calcule el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada en torno al eje x.

41. $x = 4\sqrt{t}, \quad y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{2t^2}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

42. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$



43. Las curvas definidas por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{t^2 - c}{t^2 + 1} \qquad y = \frac{t(t^2 - c)}{t^2 + 1}$$

se llaman **estrofoides** (de una palabra griega que significa “voltear o torcer”). Investigue cómo varían estas curvas cuando varía c.

44. Una familia de curvas tiene ecuaciones polares $r^a = |\text{sen } 2\theta|$ donde a es un número positivo. Investigue cómo cambian estas curvas cuando cambia a.

45-48 Encuentre los focos y vértices, trace la gráfica.

45. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

46. $4x^2 - y^2 = 16$

47. $6y^2 + x - 36y + 55 = 0$

48. $25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y = 59$

---

49. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(\pm 4, 0)$ y vértices $(\pm 5, 0)$.

50. Encuentre una ecuación de la parábola con focos $(2, 1)$ y directriz $x = -4$.

51. Encuentre una ecuación de la hipérbola con focos $(0, \pm 4)$ y asíntotas $y = \pm 3x$.

52. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(3, \pm 2)$ y un eje con longitud 8.

53. Obtenga una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y que tiene su otro foco en el origen.

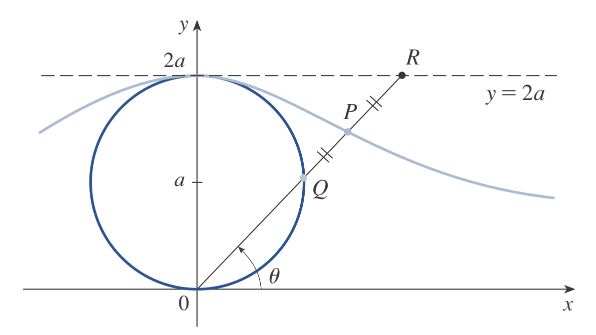
54. Demuestre que si m es cualquier número real, entonces hay exactamente dos rectas de pendiente m que son tangentes a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y sus ecuaciones son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

55. Encuentre una ecuación polar para la elipse con foco en el origen, excentricidad $\frac{1}{3}$ y directriz con ecuación $r = 4 \sec \theta$.

56. Demuestre que los ángulos entre el eje polar y las asíntotas de la hipérbola $r = ed/(1 - e \cos \theta)$, $e > 1$, están dados por $\cos^{-1}(\pm 1/e)$.

57. En la figura el círculo de radio está fijo y para toda θ, el punto P es el punto medio del segmento QR. La curva trazada que pasa por P para $0 < \theta < \pi$, la curva se llama **curva de arco largo**. Encuentre las ecuaciones paramétricas de esta curva.



58. La curva llamada **folium de Descartes** está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

(a) Demuestre que si (a, b) está sobre la curva, entonces (b, a) también lo está; es decir, la curva es simétrica respecto a la recta $y = x$. ¿En dónde se interseca la curva con esta recta?

(b) Encuentre los puntos sobre la curva donde las rectas tangentes son horizontales o verticales.

(c) Demuestre que la recta $y = -x - 1$ es una asíntota oblicua.

(d) Trace la curva.

(e) Demuestre que una ecuación cartesiana de esta curva es $x^3 + y^3 = 3xy$.

(f) Demuestre que la ecuación polar puede expresarse en la forma

$$r = \frac{3 \sec \theta \tan \theta}{1 + \tan^3 \theta}$$

(g) Encuentre el área encerrada por el lazo de esta curva.

SAC (h) Demuestre que el área del lazo es la misma que el área que está entre la asíntota y las ramas infinitas de la curva. (Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar la integral.)

Problemas adicionales

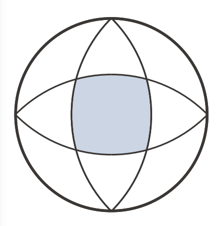


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

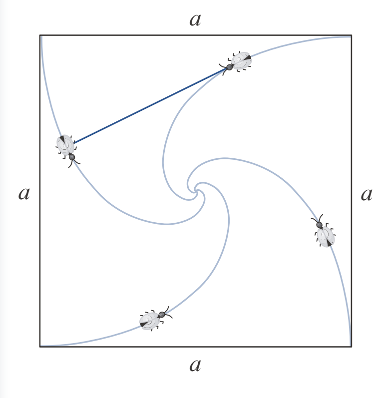
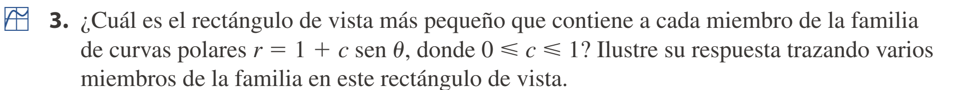


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

1. El círculo exterior en la figura tiene radio 1 y los centros de los arcos circulares interiores se encuentren en el círculo externo. Encuentre el área de la región sombreada.

2. (a) Encuentre los puntos máximo y mínimo de la curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
(b) Trace la curva. (Observe que es simétrica con respecto a ambos ejes y a ambas rectas $y = \pm x$, de modo que es suficiente considerar inicialmente $y \geqslant x \geqslant 0$.)
SAC (c) Utilice coordenadas polares y un sistema algebraico computacional para encontrar el área encerrada por la curva.



3. ¿Cuál es el rectángulo de vista más pequeño que contiene a cada miembro de la familia de curvas polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$, donde $0 \leqslant c \leqslant 1$? Ilustre su respuesta trazando varios miembros de la familia en este rectángulo de vista.

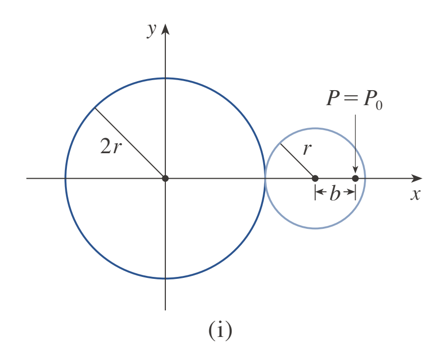
4. Se colocan cuatro insectos en cuatro esquinas de un cuadrado con longitud a. Los insectos avanzan en sentido contrario a las manecillas del reloj a la misma rapidez, y cada uno avanza directamente hacia el siguiente insecto todo el tiempo. Se aproximan al centro del cuadrado a lo largo de trayectorias espirales.
(a) Obtenga la ecuación polar de la trayectoria de un insecto al suponer que el polo está en el centro del cuadrado. (Use el hecho de que la recta que une a un insecto con el siguiente es tangente a la trayectoria del insecto.)
(b) Encuentre la distancia recorrida por un insecto hasta el momento que se encuentra con los otros insectos en el centro.

5. Demuestre que cualquier recta tangente a una hipérbola toca la hipérbola a la mitad del camino entre los puntos de intersección de la recta tangente y las asíntotas.

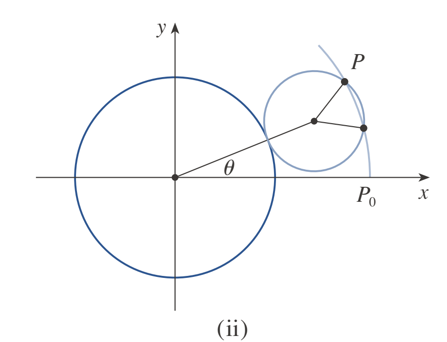
6. Una circunferencia C de radio $2r$ tiene su centro en el origen. Un círculo de radio r rueda sin resbalar en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj alrededor de C. Un punto P está situado en un radio fijo del círculo giratorio a una distancia b de su centro, $0 < b < r$. [Véase las partes (i) e (ii) de la figura.] Sea L la recta desde el centro de C al centro del círculo que rueda y sea θ el ángulo que L forma con el eje x positivo.
(a) Usando θ como un parámetro, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada que pasa por P son

$$x = b \cos 3\theta + 3r \cos \theta \qquad y = b \operatorname{sen} 3\theta + 3r \operatorname{sen} \theta$$

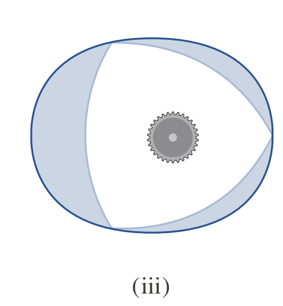
Nota: si $b = 0$, la trayectoria es una circunferencia de radio $3r$; si $b = r$, la trayectoria es una *epicicloide*. La trayectoria trazada por P para $0 < b < r$ se llama *epitrocoide*.
(b) Trace la gráfica de la curva para varios valores de b entre 0 y r.
(c) Demuestre que un triángulo equilátero puede inscribirse en el epitrocoide y que su centroide está sobre la circunferencia de radio b con centro en el origen.
Nota: este es el principio del motor rotatorio Wankel. Cuando el triángulo equilátero gira con sus vértices en el epitrocoide, su centroide recorre una circunferencia cuyo centro está en el centro de la curva.
(d) En casi todos los motores rotatorios, los lados de los triángulos equiláteros son sustituidos por arcos de circunferencia con centro en los vértices opuestos como en el inciso (iii) de la figura. (Entonces el diámetro del rotor es constante.) Demuestre que el rotor se ajusta en el epitrocoide si $b \leqslant \frac{3}{2}(2 - \sqrt{3})r$.



(i)



(ii)



(iii)

11 Sucesiones y series infinitas



© STScI / NASA / ESA / Galaxy / Galaxy Picture Library / Alamy

Betelgeuse es una estrella supergigante roja, una de las más grande y más brillante de las estrellas observables. En el proyecto de la página 783 le piden comparar la radiación emitida por Betelgeuse con la de otras estrellas.

LAS SUCESIONES Y SERIES INFINITAS se introdujeron brevemente en *Un adelanto del cálculo*, en relación con las paradojas de Zenón y la representación decimal de números. Su importancia en el cálculo proviene de la idea de Newton de representar funciones como sumas de sucesiones infinitas. Por ejemplo, para encontrar áreas, con frecuencia integraba una función expresándola primero como una serie y después integrando cada uno de sus términos. En la sección 11.10 se tratará de seguir esta idea para integrar funciones como e^{-x^2}. (Hay que recordar que antes no era posible enfrentar esto.) Muchas de las funciones que aparecen en física matemática y química, como las funciones de Bessel, están definidas como sumas de series, así que es muy importante familiarizarse con los conceptos básicos de convergencia de sucesiones y series infinitas.

Los físicos también usan las series en otro modo, tal como se verá en la sección 11.11. En el estudio de fenómenos tan diversos como la óptica, la relatividad especial y el electromagnetismo, los físicos analizan los fenómenos reemplazándolos primero por unos cuantos términos de las series que los representan.

11.1 Sucesiones

Una **sucesión** se puede pensar como una lista de números escritos en un orden definido:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n, \ldots$$

El número a_1 recibe el nombre de *primer término*, a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término*. Aquí se tratará exclusivamente con sucesiones infinitas, por lo que cada término a_n tiene un sucesor a_{n+1}.

Observe que para todo entero positivo n hay un número correspondiente a_n, por lo que una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Pero es usual escribir a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

NOTACIÓN La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ también se denota mediante

$$\{a_n\} \qquad \text{o} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EJEMPLO 1 Algunas sucesiones se pueden definir dando una fórmula para el n-ésimo término. En los ejemplos siguientes se ofrecen tres descripciones de la sucesión: una en la que se aplica la notación anterior, en otra en la que se usa una fórmula definida y una tercera en la que se escriben los términos de la sucesión. Observe que n no tiene que empezar en 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\qquad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\qquad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}$$

y suponga que el patrón de los primeros términos continúa.

SOLUCIÓN Se sabe que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3125}$$

Observe que los numeradores de estas fracciones empiezan con 3 y aumentan una unidad al pasar al término siguiente. El segundo término tiene numerador 4, el numerador siguiente es 5; en general, el n-ésimo término tendrá como numerador $n + 2$. Los denominadores son las potencias de 5, por lo que a_n tiene por denominador 5^n. Los signos de

los términos son alternadamente positivo y negativo, por lo que es necesario multiplicar por una potencia de -1. En el ejemplo 1(b) el factor $(-1)^n$ significa que empieza con un término negativo. Como aquí se busca iniciar con un término positivo, se usa $(-1)^{n-1}$ o $(-1)^{n+1}$. Por tanto

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$

EJEMPLO 3 En este caso hay algunas sucesiones que no tienen una ecuación que las defina en forma sencilla.

(a) La sucesión $\{p_n\}$, donde p_n es la población mundial el 1 de enero del año n.

(b) Sea a_n el n-ésimo dígito en el desarrollo decimal del número e, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión bien definida cuyos primeros términos son

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) Las condiciones siguientes definen en forma recursiva la **sucesión de Fibonacci** $\{f_n\}$

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada uno de los términos es la suma de los dos anteriores. Los primeros términos son

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Esta sucesión surgió cuando el matemático italiano del siglo XIII, a quien se conoce como Fibonacci, resolvió un problema que se relacionaba con la cría de conejos (véase ejercicio 83).

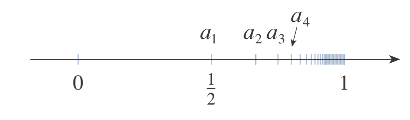


FIGURA 1

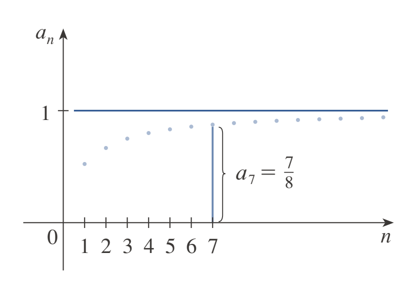


FIGURA 2

Una sucesión como la del ejemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$ se puede representar trazando sus términos en una recta numérica como en la figura 1, o trazando la gráfica como en la figura 2. Observe que, como una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, su gráfica consta de puntos aislados con coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

En las figuras 1 o 2 parece que los términos de la sucesión $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando n es suficientemente grande. De hecho, la diferencia

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera al hacer a n lo suficientemente grande. Lo anterior se indica al escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

En general, la notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

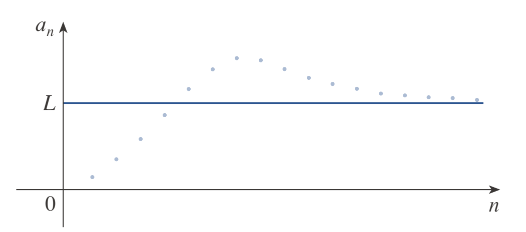
significa que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a L cuando se hace n suficientemente grande. Observe que la definición siguiente del límite de una sucesión es muy parecida a la definición de límite de una función en el infinito dada en la sección 2.6.

1 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y se escribe como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si se hace que los términos a_n se aproximen a L tanto como se quiera tomando n lo suficientemente grande. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, se dice que la sucesión **converge** (o que es **convergente**). De lo contrario, se dice que la sucesión **diverge** (o es **divergente**).

En la figura 3 se ilustra la definición 1 mostrando las gráficas de dos sucesiones que tienen como límite L.



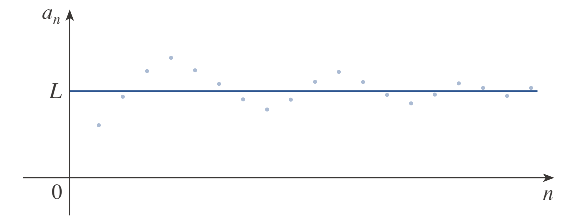


FIGURA 3
Gráficas de dos sucesiones con $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Una versión más precisa de la definición 1 es como sigue.

Compare esta definición con la definición 2.6.7.

2 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y se escribe como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

La definición 2 se ilustra en la figura 4, en la cual los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se trazan sobre una recta numérica. No importa qué tan pequeño se elija un intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ existe una N tal que todos los términos de la sucesión desde a_{N+1} en adelante deben estar en ese intervalo.

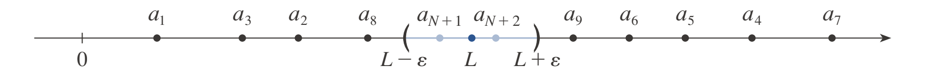


FIGURA 4

Otra ilustración de la definición 2 es la figura 5. Los puntos sobre la gráfica de $\{a_n\}$ deben estar entre las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ si $n > N$. Esta imagen debe ser válida sin importar qué tan pequeño se haya escogido ε, pero usualmente se requiere un valor de ε mucho muy pequeño y un valor de N mucho muy grande.

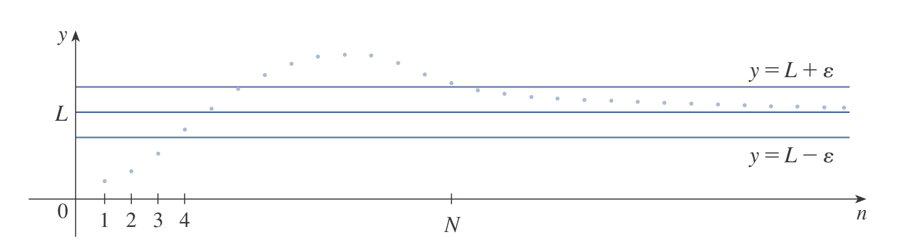


FIGURA 5

Si se compara la definición 2 con la definición 2.6.7 se verá que la única diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es que se requiere que n sea un entero. En este sentido se tiene el teorema siguiente, ilustrado en la figura 6.

3 Teorema Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

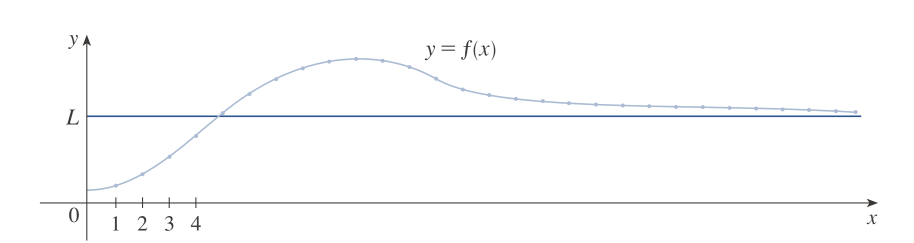


FIGURA 6

En particular, ya que se sabe que $\lim_{x\to\infty} (1/x^r) = 0$ cuando $r > 0$ (teorema 2.6.5), se tiene

4
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{si } r > 0$$

Si a_n es muy grande cuando n es muy grande, se usa la notación $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. La definición precisa siguiente es parecida a la definición 2.6.9.

5 Definición $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M existe un entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad a_n > M$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es divergente pero de una manera especial. Se dice que $\{a_n\}$ diverge a ∞.

Las leyes de los límites dadas en la sección 2.3 también se cumplen para los límites de sucesiones y sus demostraciones son similares.

Leyes de límites para sucesiones

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{si } p > 0 \text{ y } a_n > 0$$

El teorema de la compresión también se puede adaptar a las sucesiones como sigue (véase figura 7).

Teorema de compresión para sucesiones

Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

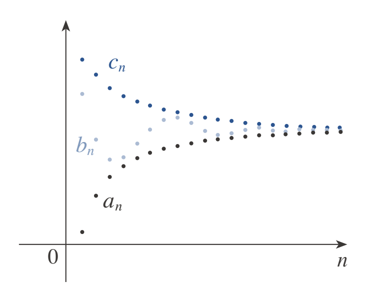


FIGURA 7
La sucesión $\{b_n\}$ está comprimida entre las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$

Otro hecho útil con respecto a los límites de sucesiones se evidencia en el teorema siguiente, cuya demostración se deja para el ejercicio 87.

6 Teorema Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 4 Determine $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN El método es similar al que se usa en la sección 2.6: dividir tanto el numerador como el denominador entre la potencia más alta de n del denominador y luego aplicar las leyes de los límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Esto demuestra que la inferencia que se hizo antes a partir de las figuras 1 y 2 era correcta.

Aquí se usa la ecuación 4 con $r = 1$. ■

EJEMPLO 5 La sucesión $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$ ¿es convergente o divergente?

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 4, se divide el numerador y el denominador entre n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{10}{n^2} + \dfrac{1}{n}}} = \infty$$

porque el numerador es una constante y el denominador se aproxima a 0, así que $\{a_n\}$ es divergente. ■

EJEMPLO 6 Determine $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUCIÓN Observe que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando $n \to \infty$. No se puede aplicar directamente la regla de L'Hôpital porque no se aplica a sucesiones, sino a funciones de una variable real. Sin embargo, se puede aplicar la regla de L'Hôpital a la función relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ y obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$ ■

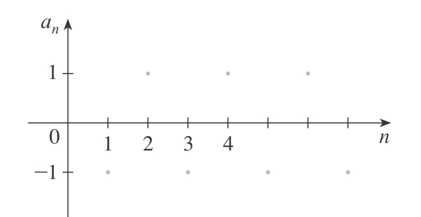


FIGURA 8

EJEMPLO 7 Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Si se escriben algunos términos de la sucesión se obtiene

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 8. Como los términos oscilan entre 1 y -1 en forma infinita, a_n no se aproxima a ningún número. Por tanto, $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ no existe; la sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente. ■

La gráfica de la sucesión del ejemplo 8 se muestra en la figura 9 y apoya la respuesta.

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n}$ si este existe.

SOLUCIÓN Primero se calcula el límite del valor absoluto:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

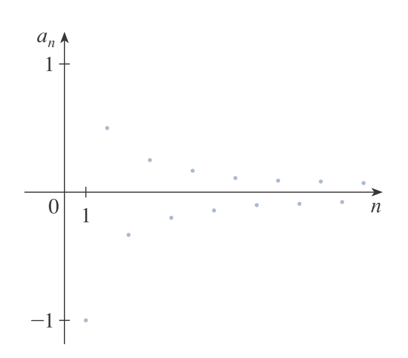


FIGURA 9

Por tanto, de acuerdo con el teorema 6,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$ ■

El teorema siguiente dice que, si se acopla una función continua a los términos de una sucesión convergente, el resultado también es convergente. La demostración se deja para el ejercicio 88.



7 Teorema Si $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ y la función f es continua en L, entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(L)$$

Creando gráficas de sucesiones
Algunos sistemas algebraicos computacionales contienen comandos especiales que permiten crear sucesiones y dibujarlas directamente. Sin embargo, con la mayoría de las calculadoras para trazar gráficas se pueden dibujar sucesiones usando ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, la sucesión del ejemplo 10 se puede dibujar al introducir las ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

y dibujar en el modo punto, iniciando con $t = 1$; se establece el t-ésimo paso igual a 1. El resultado se muestra en la figura 10.

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$

SOLUCIÓN Como la función seno es continua en 0, el teorema 7 permite escribir

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n \to \infty} (\pi/n)\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$ ■

EJEMPLO 10 Analice la convergencia de la sucesión $a_n = n!/n^n$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

SOLUCIÓN Tanto numerador como denominador se aproximan al infinito cuando $n \to \infty$, pero no cabe utilizar la regla de L'Hôpital ($x!$ no está definida cuando x no es un número entero). Se escribirán algunos términos para ver si es posible intuir qué pasa con a_n cuando n es muy grande:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

8 $$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

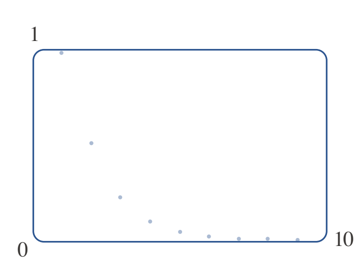


FIGURA 10

Esta expresión y la gráfica de la figura 10 sugieren que los términos están decreciendo y parecen aproximarse a 0. Para confirmar esto, observe de la ecuación 8 que

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}\right)$$

Observe que la expresión entre paréntesis es a lo más 1 porque el numerador es menor que (o igual a) el denominador. Por lo que

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Se sabe que $1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ por el teorema de la compresión. ■

EJEMPLO 11 ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

SOLUCIÓN Se sabe, por la sección 2.6 y las gráficas de las funciones exponenciales de la sección 1.4, que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ y $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Por tanto, si se hace $a = r$ y se usa el teorema 3 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

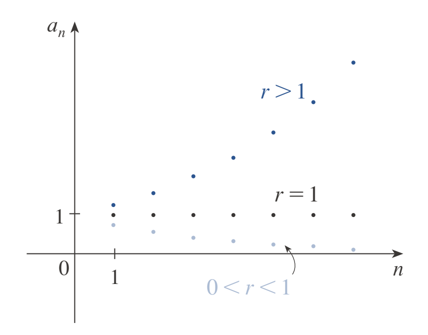
Es obvio que

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Si $-1 < r < 0$, entonces $0 < |r| < 1$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

y, por tanto, $\lim_{x\to\infty} r^n = 0$ de acuerdo con el teorema 6. Si $r \leqslant -1$, entonces $\{r^n\}$ diverge como en el ejemplo 7. En la figura 11 se ilustran las gráficas de varios valores de r. (El caso $r = -1$ se muestra en la figura 8.)



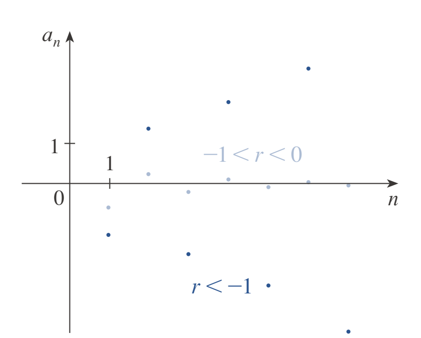


FIGURA 11
La sucesión $a_n = r^n$

■

Los resultados del ejemplo 11 se resumen para uso futuro como sigue.

9 La sucesión $\{r^n\}$ es convergente si $-1 < r \leqslant 1$ y divergente para todos los otros valores de r

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

10 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ se llama **creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$, es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Se denomina **decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

EJEMPLO 12 La sucesión $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ es decreciente porque

El lado derecho es menor porque tiene un denominador mayor.

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

y, por tanto, $a_n > a_{n+1}$, para toda $n \geqslant 1$. ■

EJEMPLO 13 Demuestre que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 1 Se debe demostrar que $a_{n+1} < a_n$, es decir,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Esta desigualdad es equivalente a la obtenida por multiplicación cruzada:

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \iff (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1]$$

$$\iff n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$$

$$\iff 1 < n^2 + n$$

Ya que $n \geqslant 1$, se sabe que la desigualdad $n^2 + n > 1$ es verdadera. Por tanto, $a_{n+1} < a_n$ y también que $\{a_n\}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 2 Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \qquad \text{siempre que } x^2 > 1$$

Por lo que f es decreciente sobre $(1, \infty)$ así que $f(n) > f(n+1)$, por tanto $\{a_n\}$ es decreciente. ■

11 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si existe un número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Está **acotada por abajo** si existe un número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Si está acotada por arriba y por abajo, entonces $\{a_n\}$ es una **sucesión acotada**.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n$ está acotada por abajo $(a_n > 0)$, pero no por arriba. La sucesión $a_n = n/(n+1)$ está acotada porque $0 < a_n < 1$ para toda n.

Se sabe que no toda sucesión acotada es convergente [por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ satisface $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, pero es divergente del ejemplo 7] y no toda sucesión monótona es convergente $(a_n = n \to \infty)$. Pero si una sucesión es tanto acotada como



monótona, entonces tiene que ser convergente. Este hecho se demuestra en la forma del teorema 12, pero intuitivamente se entiende por qué es cierto viendo la figura 12. Si $\{a_n\}$ es creciente y $a_n \leqslant M$ para toda n, entonces los términos están forzados a juntarse y aproximarse a un número L.

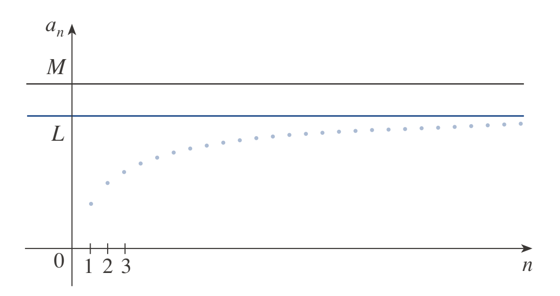


FIGURA 12

La demostración del teorema 12 se apoya en el **axioma de completez** para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que dice que si S es un conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior M ($x \leqslant M$ para toda x en S), entonces S tiene una **mínima cota superior** b. (Esto significa que b es una cota superior para S, pero si M es cualquier otra cota superior, entonces $b \leqslant M$.) El axioma de completez expresa el hecho de que la recta de los números reales no tiene brechas o agujeros.

12 Teorema de la sucesión monótona Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente. Ya que $\{a_n\}$ está acotada, el conjunto $S = \{a_n | n \geqslant 1\}$ tiene una cota superior. De acuerdo con el axioma de completez, tiene una mínima cota superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ *no* es una cota superior para S (ya que L es la *mínima* cota superior). Por tanto,

$$a_N > L - \varepsilon \text{ para algún entero } N$$

Pero la sucesión es creciente por lo que $a_n \geqslant a_N$ para toda $n > N$. Por lo que si $n > N$, se tiene

$$a_n > L - \varepsilon$$

de manera que $$0 \leqslant L - a_n < \varepsilon$$

ya que $a_n \leqslant L$. Por lo que,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{siempre que } n > N$$

así que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Una demostración similar (aplicando la máxima cota inferior) funciona si $\{a_n\}$ es decreciente. ■

La demostración del teorema 12 demuestra que una sucesión creciente y acotada por arriba es convergente. (De igual manera, una sucesión decreciente que está acotada por abajo es convergente.) Este hecho se aplica muchas veces al trabajar con series infinitas.

EJEMPLO 14 Investigue la sucesión $\{a_n\}$ definida por la *relación recursiva*

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUCIÓN Para empezar se calculan los primeros términos:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5.5 \qquad a_5 = 5.75 \qquad a_6 = 5.875$$

$$a_7 = 5.9375 \qquad a_8 = 5.96875 \qquad a_9 = 5.984375$$

Con frecuencia, la inducción matemática se aplica cuando se trabaja con sucesiones recursivas. Véase la página 72 donde se encuentra un análisis del principio de inducción matemática.

Estos términos iniciales hacen pensar que la sucesión es creciente y que los términos se aproximan a 6. Para confirmar que la sucesión es creciente, se utiliza inducción matemática para demostrar que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geqslant 1$. Esto es cierto para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Si se supone que se cumple para $n = k$, entonces se tiene

$$a_{k+1} > a_k$$

por lo que $$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

y $$\tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

Así $$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Ya se dedujo que $a_{n+1} > a_n$ es cierta para $n = k + 1$. Por tanto, la desigualdad se cumple para toda n por inducción.

Luego se verifica que $\{a_n\}$ está acotada demostrando que $a_n < 6$ para toda n. (Ya que la sucesión es creciente, se sabe que tiene una cota inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para toda n.) Se sabe que $a_1 < 6$, por lo que la aseveración es cierta para $n = 1$. Si se supone que se cumple para $n = k$. Entonces

$$a_k < 6$$

por lo que $$a_k + 6 < 12$$

y $$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Así $$a_{k+1} < 6$$

Esto demuestra, por inducción matemática, que $a_n < 6$ para toda n.

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada, el teorema 12 garantiza que tiene un límite. El teorema no dice cuál es el valor del límite, pero ahora que se sabe que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, por lo que se puede aplicar la relación recursiva para escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

En el ejercicio 70 se pide una demostración de este hecho.

Como $a_n \to L$, también se deduce que $a_{n+1} \to L$ (también cuando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$). De este modo se tiene

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Al resolver esta ecuación para L, se determina que $L = 6$, tal como se había predicho. ■



11.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una sucesión?
(b) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión convergente? Dé dos ejemplos.
(b) ¿Qué es una sucesión divergente? Dé dos ejemplos.

3-12 Liste los primeros cinco términos de la sucesión.

3. $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$

4. $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

5. $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$

6. $a_n = \dfrac{3^n}{1+2^n}$

7. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

8. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

9. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n - 3$

10. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

11. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

12. $a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

13-18 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que se mantenga el patrón de los primeros términos.

13. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots\right\}$

14. $\left\{4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right\}$

15. $\left\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots\right.$

16. $\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$

17. $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots\right\}$

18. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$

19-22 Calcule, con una aproximación de cuatro decimales, los primeros diez términos de la sucesión y úselos para trazar la gráfica a mano de la sucesión. ¿Parece tener límite la sucesión? Si es así, calcúlelo. Si no, explique por qué.

19. $a_n = \dfrac{3n}{1+6n}$

20. $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

21. $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

22. $a_n = 1 + \dfrac{10^n}{9^n}$

23-56 Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, encuentre el límite.

23. $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$

24. $a_n = \dfrac{3+5n^2}{1+n}$

25. $a_n = \dfrac{n^4}{n^3-2n}$

26. $a_n = 2 + (0.86)^n$

27. $a_n = 3^n 7^{-n}$

28. $a_n = \dfrac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2}$

29. $a_n = e^{-1/\sqrt{n}}$

30. $a_n = \dfrac{4^n}{1+9^n}$

31. $a_n = \sqrt{\dfrac{1+4n^2}{1+n^2}}$

32. $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{n+1}\right)$

33. $a_n = \tan\left(\dfrac{2n\pi}{1+8n}\right)$

34. $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{9n+1}}$

35. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

36. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$

37. $\left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

38. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

39. $\{\operatorname{sen} n\}$

40. $a_n = \dfrac{\tan^{-1} n}{n}$

41. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n}-1}\right\}$

42. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

43. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

44. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

45. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

46. $a_n = 2^{-n}\cos n\pi$

47. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

48. $a_n = \sqrt[n]{n}$

49. $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+1)$

50. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1+\sqrt{n}}$

51. $a_n = \arctan(\ln n)$

52. $a_n = n - \sqrt{n+1}\,\sqrt{n+3}$

53. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

54. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right.$

55. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

56. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

57-63 Con la ayuda de una gráfica de la sucesión, establezca si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente, infiera el valor del límite a partir de la gráfica y luego demuestre su conjetura. (Veáse la nota al margen de la página 699 relacionada con la advertencia sobre las gráficas de sucesiones.)

57. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

58. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

59. $a_n = \arctan\left(\dfrac{n^2}{n^2+4}\right)$

60. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

61. $a_n = \sqrt{\dfrac{3+2n^2}{8n^2+n}}$

62. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$

63. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$

64. (a) Determine si la sucesión definida como sigue es convergente o divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) ¿Qué ocurre si el primer término es $a_1 = 2$?

65. Si se invierten 1000 dólares a 6% de interés compuesto anualmente, entonces n años después la inversión tiene un valor de $a_n = 1000(1.06)^n$ dólares.
(a) Determine los primeros cinco términos de la sucesión $\{a_n\}$.
(b) ¿La sucesión es convergente o divergente? Explique.

66. Si se depositan 100 dólares al final de cada mes en una cuenta que paga 3% de interés al año capitalizado mensualmente, la cantidad de interés acumulado después de n meses está dada por la sucesión

$$I_n = 100\left(\frac{1.0025^n - 1}{0.0025} - n\right)$$

(a) Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.
(b) ¿Cuánto interés habrá obtenido después de dos años?

67. En una granja piscícola se tienen 5000 bagres en un estanque de crías. El número de bagres aumenta en 8% al mes y el productor cosecha 300 bagres al mes.
(a) Demuestre que la población P_n de bagres después de n meses está dada recursivamente por

$$P_n = 1.08P_{n-1} - 300 \qquad P_0 = 5000$$

(b) ¿Cuántos bagres hay en el estanque después de seis meses?

68. Determine los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número par} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo si $a_1 = 25$. Infiera con respecto al tipo de sucesión.

69. ¿Para qué valores de r converge la sucesión $\{nr^n\}$?

70. (a) Si $\{a_n\}$ es convergente, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(b) Una sucesión $\{a_n\}$ se define por $a_1 = 1$ y $a_n+_1 = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Si se supone que $\{a_n\}$ es convergente, calcule su límite.

71. Suponga que se sabe que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y que todos sus términos están entre los números 5 y 8. Explique por qué la sucesión tiene un límite. ¿Qué puede decir respecto al valor del límite?

72-78 Determine si la sucesión es creciente, decreciente o es no monótona. ¿Está acotada la sucesión?

72. $a_n = \cos n$

73. $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$

74. $a_n = \dfrac{1-n}{2+n}$

75. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

76. $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

77. $a_n = 3 - 2ne^{-n}$

78. $a_n = n^3 - 3n + 3$

79. Encuentre el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

80. Una sucesión $\{a_n\}$ está dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
(a) Mediante inducción u otro método, demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y que su cota superior es 3. Aplique el teorema de sucesión monótona para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.
(b) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

81. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

es creciente y $a_n < 3$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y encuentre su límite.

82. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisface $0 < a_n \leqslant 2$ y es decreciente. Deduzca que la sucesión es convergente y encuentre su límite.

83. (a) Fibonacci planteó el problema siguiente: suponga que los conejos viven toda la vida, que cada mes todas las parejas tienen un nuevo par de conejitos, los cuales empiezan a ser productivos a la edad de dos meses. Si empieza con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos tendrá en el n-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es f_n, donde $\{f_n\}$ es la sucesión de Fibonacci que se define en el ejemplo 3(c).

(b) Sea $a_n = f_{n+1}/f_n$ demuestre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Suponiendo que $\{a_n\}$ es convergente, determine su límite.

84. (a) Sea $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a))$,..., $a_{n+1} = f(a_n)$, donde f es una función continua. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $f(L) = L$.

(b) Ilustre el inciso (a) haciendo $f(x) = \cos x$, $a = 1$, y estimando el valor de L con una aproximación de cinco cifras decimales.

85. (a) Mediante una gráfica, deduzca el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Con una gráfica de la sucesión del inciso (a) calcule los valores más pequeños de N que corresponden a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.001$ en la definición 2.

86. Aplique directamente la definición 2 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ cuando $|r| < 1$.

87. Demuestre el teorema 6.
[*Sugerencia*: utilice la definición 2 o el teorema de la compresión.]

88. Demuestre el teorema 7.

89. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

90. Sea $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(a) Demuestre que si $0 \leqslant a < b$, entonces

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

(b) Deduzca que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.

(c) Utilice $a = 1 + 1/(n + 1)$ y $b = 1 + 1/n$ del inciso (b) para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente.

(d) Use $a = 1$ y $b = 1 + 1/(2n)$ en el inciso (b) para demostrar que $a_{2n} < 4$.

(e) Mediante los incisos (c) y (d) demuestre que $a_n < 4$ para toda n.

(f) Utilice el teorema 12 para demostrar que $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ existe. (El límite es e. Véase la ecuación 3.6.6.)

91. Sean a y b números positivos con $a > b$. Sea a_1 la media aritmética y b_1 la media geométrica:

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita el proceso tal que, en general

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Mediante la inducción matemática demuestre que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduzca que tanto $\{a_n\}$ como $\{b_n\}$ son convergentes.

(c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss llamó al valor común de estos límites la **media aritmética-geométrica** de los números a y b.

92. (a) Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$ entonces $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(b) Si $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

calcule los primeros ocho términos de la sucesión $\{a_n\}$. Luego use el inciso (a) para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ Esto da el **desarrollo en fracción continua**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

93. El tamaño de una población inalterada de peces se ha modelado mediante la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

donde p_n es la población de peces después de n años, y a y b son constantes positivas que dependen de las especies y su medio ambiente. Suponga que la población en el año 0 es $p_0 > 0$.

(a) Demuestre que si $\{p_n\}$ es convergente, entonces los únicos valores posibles de este límite son 0 y $b - a$.

(b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

(c) Mediante el inciso (b) demuestre que si $a > b$, entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$; en otras palabras, la población muere.

(d) Ahora suponga que $a < b$. Demuestre que si $p_0 < b - a$, entonces $\{p_n\}$ es creciente y $0 < p_n < b - a$. Demuestre que si $p_0 > b - a$, entonces $\{p_n\}$ es decreciente y $p_n > b - a$. Deduzca que si $a < b$, entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROYECTO DE LABORATORIO SAC SUCESIONES LOGÍSTICAS

Una sucesión que surge en ecología como un modelo para el crecimiento poblacional se define por medio de la **ecuación logística en diferencias**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

donde p_n mide el tamaño de la población de la n-ésima generación de una sola especie. Para mantener manejables los números, p_n es una fracción del tamaño máximo de la población, por lo que $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Observe que la forma de la ecuación es similar a la ecuación diferencial logística de la sección 9.4. El modelo discreto, con sucesiones en lugar de funciones continuas, es preferible para modelar las poblaciones de insectos, en las cuales el apareamiento y la muerte ocurren de un modo periódico.

Un ecologista se interesa en predecir el tamaño de la población a medida que el tiempo avanza, y plantea estas preguntas: ¿se estabilizará en un valor límite?, ¿cambiará de manera cíclica? o ¿mostrará un comportamiento aleatorio?

Escriba un programa para calcular los n primeros términos de esta sucesión con una población inicial p_0, donde $0 < p_0 < 1$. Con este programa efectúe lo siguiente:

1. Calcule 20 o 30 términos de la sucesión para $p_0 = \frac{1}{2}$ y para dos valores de k tales que $1 < k < 3$. Grafique cada sucesión. ¿Parecen converger? Repita para un valor distinto de p_0 entre 0 y 1. ¿El límite depende del valor elegido de p_0? ¿Depende del valor elegido de k?
2. Calcule términos de la sucesión para un valor de k entre 3 y 3.4 y dibújelos. ¿Qué observa con respecto al comportamiento de los términos?
3. Experimente con valores de k entre 3.4 y 3.5. ¿Qué sucede con los términos?
4. Para valores de k entre 3.6 y 4, calcule y dibuje por lo menos 100 términos y comente el comportamiento de la sucesión. ¿Qué sucede si cambia p_0 por 0.001? Este tipo de comportamiento se llama *caótico* y lo muestran poblaciones de insectos bajo ciertas condiciones.

11.2 Series

El récord actual para calcular una aproximación decimal de π lo obtuvieron Shigeru Kondo y Alexander Yee en 2011 y contiene más de 10 billones de decimales.

¿A qué se refiere cuando se expresa un número con una cantidad infinita de decimales? Por ejemplo, qué significa escribir

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ \ldots$$

La convención que hay detrás de la notación decimal es que cualquier número con una cantidad infinita de decimales se puede escribir como una suma infinita. Aquí, el significado es que

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

donde los puntos suspensivos (...) indican que la suma continúa por siempre y que cuantos más términos se agreguen, se estará más cerca del valor verdadero de π.

En general, si se trata de sumar los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se obtiene una expresión de la forma

1 $$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que se denomina **serie infinita** (o solo **serie**) y se denota con el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

Pero ¿tiene sentido hablar de suma de una infinidad de términos?



Sería imposible encontrar la suma finita de la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque si se suman los términos, se obtienen sumas acumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... y después del n-ésimo término, se llega a $n(n + 1)/2$, lo cual resulta muy grande cuando n se incrementa.

Sin embargo, si se empieza por sumar los términos de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

n	Suma de los primeros n términos
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

se obtiene $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$ En la tabla se puede ver que cuando se suman más y más términos, estas *sumas parciales* se vuelven más y más cercanas a 1. (Véase también la figura 11 en *Un adelanto del cálculo* en la página 6.) De hecho, al sumar suficientes términos de la serie es posible hacer que las sumas parciales sean tan cercanas a 1 como se quiera. Así que es razonable decir que la suma de esta serie infinita es igual a 1 y escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Se usará una idea similar para determinar si una serie infinita (1) tiene o no tiene suma. Se consideran las **sumas parciales**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y, en general,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Estas sumas parciales forman una nueva sucesión $\{s_n\}$, la cual puede tener o no tener un límite. Si $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ existe (como un número finito), entonces, como en el ejemplo anterior, recibe el nombre de suma de la serie infinita Σa_n.

2 Definición Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, sea s_n la n-ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ existe como un número real, entonces la serie Σa_n se dice **convergente** y se escribe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

El número s se llama **suma** de la serie. Si la sucesión $\{s_n\}$ es divergente, entonces la serie es **divergente**.

Por lo que la suma de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales. Así que cuando se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, quiere decir que al sumar suficientes términos de la serie, se puede llegar tan cerca como se quiera al número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Compare con la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} f(x)\,dx$$

Para determinar esa integral se integra de 1 a t y después se hace que $t \to \infty$. En el caso de series, se suma desde 1 hasta n y después se hace que $n \to \infty$.

EJEMPLO 1 Suponga que se sabe que la suma de los primeros n términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n+5}$$

Entonces la suma de la serie es el límite de la sucesión $\{s_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\dfrac{5}{n}} = \frac{2}{3}$$ ■

En el ejemplo 1 se da una expresión para la suma de los primeros n términos, pero usualmente no es fácil *encontrar* tal expresión. Sin embargo, en el ejemplo 2, se tiene una famosa serie para la cual se *puede* encontrar una fórmula explícita para s_n.

EJEMPLO 2 Un importante ejemplo de una serie infinita es la **serie geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada término se obtiene a partir del término precedente multiplicándolo por la **razón común** r. (Ya se ha considerado el caso especial cuando $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ en la página 708.)

Si $r = 1$, entonces $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Ya que $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe, la serie geométrica diverge en este caso.

Si $r \neq 1$, se tiene

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

y

$$rs_n = \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Al restar estas ecuaciones se obtiene

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

3 $$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

La figura 1 proporciona una demostración geométrica del resultado del ejemplo 2. Si los triángulos se construyen como se indica y s es la suma de la serie, entonces, por triángulos semejantes

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a-ar} \quad \text{por lo que} \quad s = \frac{a}{1-r}$$

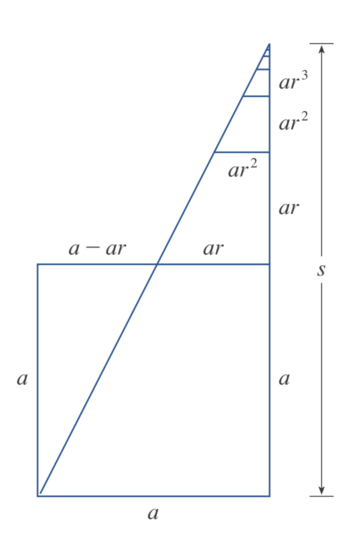


FIGURA 1

Si $-1 < r < 1$, se sabe de (11.1.9) que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1-r}$$

Por lo que, cuando $|r| < 1$, la serie geométrica es convergente y su suma es $a/(1-r)$.

Si $r \leqslant -1$ o, $r > 1$, la sucesión $\{r^n\}$ es divergente de acuerdo con (11.1.9) y, de ese modo, conforme la ecuación 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe. Por tanto, la serie geométrica diverge en esos casos. ■

Los resultados del ejemplo 2 se resumen como sigue.

4 La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

Si $|r| \geqslant 1$, la serie geométrica es divergente.

En palabras: la suma de una serie geométrica convergente es

$$\frac{\text{primer término}}{1 - \text{razón común}}$$

EJEMPLO 3 Calcule la suma de la serie geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUCIÓN El primer término es $a = 5$ y la razón común es $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la serie es convergente por (4) y su suma es

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$ ■

¿Qué se quiere realmente decir cuando se afirma que la suma de la serie del ejemplo 3 es 3? Por supuesto, no se puede sumar una infinidad de términos de uno en uno. Pero, de acuerdo con la definición 2, la suma total es el límite de la sucesión de sumas parciales. De este modo, al efectuar la suma de suficientes términos, se acerca tanto como se quiera al número 3. La tabla muestra las primeras diez sumas parciales s_n y en la gráfica de la figura 2 se ilustra cómo la sucesión de las sumas parciales se aproxima a 3.

n	s_n
1	5.000000
2	1.666667
3	3.888889
4	2.407407
5	3.395062
6	2.736626
7	3.175583
8	2.882945
9	3.078037
10	2.947975

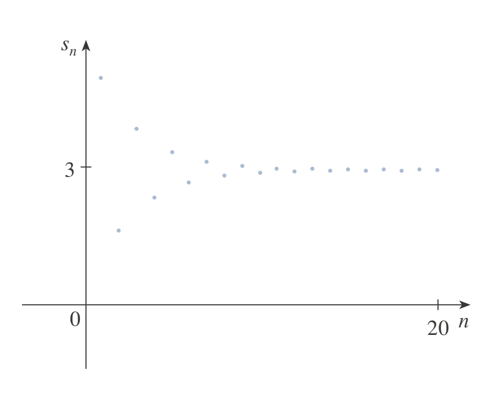


FIGURA 2

EJEMPLO 4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$, ¿es convergente o divergente?

SOLUCIÓN Escriba el n-ésimo término de la serie en la forma ar^{n-1}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Otra manera de identificar a y r es escribir los primeros términos.

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

Se identifica esta serie como una serie geométrica con $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, la serie diverge, de acuerdo con (4). ■

EJEMPLO 5 Se administra un fármaco a un paciente a la misma hora todos los días. Suponga que la concentración del fármaco es C_n (medido en mg/mL) después de la inyección en el n-ésimo día. Antes de la inyección del día siguiente, solo 30% del fármaco permanece en el torrente sanguíneo y la dosis diaria aumenta la concentración en 0.2 mg/mL.

(a) Encuentre la concentración después de tres días.

(b) ¿Cuál es la concentración después de la n-ésima dosis?
(c) ¿Cuál es la concentración límite?

SOLUCIÓN
(a) Justo antes de que se administre la dosis diaria del medicamento, la concentración se reduce a 30% de la concentración del día anterior; es decir, $0.3C_n$. Con la nueva dosis se incrementa la concentración en 0.2 mg/mL y así

$$C_{n+1} = 0.2 + 0.3C_n$$

Comenzando con $C_0 = 0$ y sustituyendo $n = 0, 1, 2$ en esta ecuación, se obtiene

$$C_1 = 0.2 + 0.3C_0 = 0.2$$

$$C_2 = 0.2 + 0.3C_1 = 0.2 + 0.2(0.3) = 0.26$$

$$C_3 = 0.2 + 0.3C_2 = 0.2 + 0.2(0.3) + 0.2(0.3)^2 = 0.278$$

La concentración después de tres días es 0.278 mg/mL.
(b) Después de la n-ésima dosis la concentración es

$$C_n = 0.2 + 0.2(0.3) + 0.2(0.3)^2 + \cdots + 0.2(0.3)^{n-1}$$

Esta es una serie geométrica finita con $a = 0.2$ y $r = 0.3$, por la fórmula 3 se tiene

$$C_n = \frac{0.2[1 - (0.3)^n]}{1 - 0.3} = \frac{2}{7}[1 - (0.3)^n] \text{ mg/mL}$$

(c) Debido a que $0.3 < 1$, se sabe que $\text{lím}_{n \to \infty} (0.3)^n = 0$. Por tanto, la concentración límite es

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{7}[1 - (0.3)^n] = \frac{2}{7}(1 - 0) = \frac{2}{7} \text{ mg/mL}$$ ■

EJEMPLO 6 Escriba el número $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ como una razón de enteros.

SOLUCIÓN

$$2.3171717\ldots = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Después del primer término se tiene una serie geométrica con $a = 17/10^3$ y $r = 1/10^2$. Por tanto

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{1000}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$ ■

EJEMPLO 7 Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, donde $|x| < 1$.

SOLUCIÓN Observe que esta serie inicia con $n = 0$ y por eso el primer término $x^0 = 1$. (En las series, se adopta la convención de que $x^0 = 1$ aun cuando $x = 0$.)



TEC En Module 11.2 se explora una serie que depende de un ángulo θ en un triángulo y permite ver qué tan rápido converge la serie cuando varía θ.

Por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Esta es una serie geométrica finita con $a = 1$ y $r = x$. Ya que $|r| = |x| < 1$, esta converge y (4) da



$$\boxed{5} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$ ■

EJEMPLO 8 Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente, y determine su suma.

SOLUCIÓN Esta no es una serie geométrica, por lo que se vuelve a la definición de una serie convergente y se calcula la suma parcial.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Se puede simplificar esta expresión si se utiliza la descomposición de la fracción parcial

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(véase sección 7.4). Por tanto, se tiene

Observe que los términos se eliminan en pares. Este es un ejemplo de una **suma telescópica**: debido a todas las eliminaciones, la suma se colapsa (como el telescopio de un pirata) en solo dos términos.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

y así $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Por tanto, la serie es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ ■

En la figura 3 se ilustra el ejemplo 8 y se muestra la gráfica de la sucesión de términos $a_n = 1/[n(n+1)]$ y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. Observe que $a_n \to 0$ y $s_n \to 1$. Véanse los ejercicios 78 y 79 donde se tratan dos interpretaciones geométricas del ejemplo 8.

1
$\{s_n\}$
$\{a_n\}$
0
n

FIGURA 3

EJEMPLO 9 Demuestre que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente.

SOLUCIÓN Para esta serie particular es conveniente considerar las sumas parciales s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32},... y demostrar que se hacen muy grandes.

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

El método usado en el ejemplo 9 para demostrar que la serie armónica diverge es original del francés Nicole Oresme (1323-1382).

En forma similar, $s_{32} > 1 + \tfrac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \tfrac{6}{2}$, y, en general

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Esto demuestra que $s_{2^n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por eso $\{s_n\}$ es divergente. Debido a eso, la serie armónica diverge. ■

6 Teorema Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Entonces $a_n = s_n - s_{n-1}$. Ya que Σa_n es convergente, la sucesión $\{s_n\}$ es convergente. Sea $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, también se tiene $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$ ■

NOTA 1 Con cualquier *serie* Σa_n se asocian dos *sucesiones*: la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales y la sucesión $\{a_n\}$ de sus términos. Si Σa_n es convergente, entonces el límite de la sucesión $\{s_n\}$ es s (la suma de la serie) y, como establece el teorema 6, el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es 0.

NOTA 2 En general, el inverso del teorema 6 no se cumple. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, se puede concluir que Σa_n es convergente. Observe que para la serie armónica $\Sigma 1/n$ se tiene $a_n = 1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero ya se demostró en el ejemplo 9 que $\Sigma 1/n$ es divergente.

7 La prueba de la divergencia Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.



La prueba de la divergencia se deduce del teorema 6 porque si la serie no es divergente, entonces es convergente y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 10 Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ es divergente.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Por lo que la serie diverge de acuerdo con la prueba de la divergencia. ■

NOTA 3 Si se encuentra que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, se sabe que Σa_n es divergente. Si se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *nada* se sabe con respecto a la convergencia o la divergencia de Σa_n. Recuerde la advertencia de la nota 2: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie Σa_n podría ser convergente o divergente.

8 Teorema Si Σa_n y Σb_n son series convergentes, entonces también lo son las series $\Sigma c a_n$ (donde c es una constante), $\Sigma(a_n + b_n)$ y $\Sigma(a_n - b_n)$, y

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Estas propiedades de las series convergentes se infieren de las leyes de los límites correspondientes a las sucesiones de la sección 11.1. Por ejemplo, aquí se demuestra la parte (ii) del teorema 8:

sea

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

La n-ésima suma parcial de la serie $\Sigma(a_n + b_n)$ es

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

y, usando la ecuación 5.2.10, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t$$

Por tanto, $\Sigma(a_n + b_n)$ es convergente y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ ■

EJEMPLO 11 Determine la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$.

SOLUCIÓN La serie $\Sigma 1/2^n$ es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

En el ejemplo 8 se encuentra que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

Por lo que por el teorema 8, la serie dada es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$=3\cdot 1+1=4$$

NOTA 4 Una cantidad finita de términos no afecta la convergencia o divergencia de una serie. Por ejemplo, suponga que se es capaz de demostrar que la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$$

es convergente. Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$$

se deduce que toda la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$ es convergente. Asimismo, si se sabe que la serie $\Sigma_{n=N+1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces toda la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{N}a_n+\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$$

es también convergente.

11.2 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?
(b) ¿Qué es una serie convergente? ¿Qué es una serie divergente?

2. Explique qué significa decir que $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3-4 Calcule la suma de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ cuyas sumas parciales están dadas.

3. $s_n = 2 - 3(0.8)^n$

4. $s_n = \dfrac{n^2-1}{4n^2+1}$

5-8 Calcule los primeros ocho términos de la sucesión de sumas parciales con una aproximación de cuatro decimales. ¿Las series parecen que convergen o divergen?

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen} n$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

9-14 Encuentre por lo menos 10 sumas parciales de las series. Trace la gráfica tanto de la sucesión de los términos como la sucesión de las sumas parciales en la misma pantalla. ¿Cómo parece ser la serie, convergente o divergente? Si es convergente, determine la suma. Si es divergente, explique por qué.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(-5)^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n+1} \right)$

15. Sea $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.

(a) Determine si $\{a_n\}$ es convergente.

(b) Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

16. (a) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

(b) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

17-26 Determine si la serie geométrica es convergente o divergente. Si es convergente, calcule la suma.

17. $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$

18. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$

19. $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

20. $1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + \cdots$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 12(0.73)^{n-1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\pi^n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(-2)^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{6^{n-1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{2n-1}}{3^n}$

27-42 Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

27. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{15} + \cdots$

28. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{2}{81} + \dfrac{1}{243} + \dfrac{2}{729} + \cdots$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1-2n}$

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-2k+5}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}4^{-n}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(-0.2)^n + (0.6)^{n-1}]$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+e^{-n}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{e^n}$

35. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sen} 100)^k$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

37. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$

38. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{-k}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

43-48 Determine si la serie es convergente o divergente al expresar s_n como suma telescópica (como en el ejemplo 8). Si es convergente, encuentre su suma.

43. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

46. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$

48. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$

49. Sea $x = 0.99999\ldots$

(a) ¿Qué piensa usted, que $x < 1$ o que $x = 1$?

(b) Sume una serie geométrica para determinar el valor de x.

(c) ¿Cuántas representaciones decimales tiene el 1?

(d) ¿Cuáles números tienen más de una representación decimal?

50. Una sucesión de términos está definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_n = (5-n)a_{n-1}$$

Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

51-56 Exprese el número como un cociente de enteros.

51. $0.\overline{8} = 0.8888\ldots$

52. $0.\overline{46} = 0.46464646\ldots$

53. $1.5\overline{342}$

54. $7.\overline{12345}$

55. $1.234\overline{567}$

56. $5.\overline{71358}$

57-63 Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x.

57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n x^n$

58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n$

59. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$

60. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n (x-5)^n$

61. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$

62. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n x}{3^n}$

63. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

64. Se ha visto que una serie armónica es una serie divergente cuyos términos se aproximan a 0. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

es otra serie con esta propiedad.

SAC **65-66** Utilice la instrucción de las fracciones parciales en su sistema algebraico computacional para encontrar una expresión conveniente para la suma parcial, y luego use esta expresión para encontrar la suma de la serie. Compruebe su respuesta usando directamente el SAC a la suma de la serie.

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3}$

66. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^5 - 5n^3 + 4n}$

---

67. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

68. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = 3 - n2^{-n}$, determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

69. Un médico receta 100 mg de tabletas de antibiótico para tomar cada ocho horas. Justo antes de cada toma, 20% del medicamento permanece en el cuerpo.

(a) ¿Cuánto del medicamento está en el cuerpo justo después de que se toma la segunda tableta? ¿Después de la tercera tableta?

(b) Si Q_n es la cantidad de antibiótico en el cuerpo justo después de la n-ésima tableta, encuentre una ecuación que expresa Q_{n+1} en términos de cantidad de Q_n.

(c) ¿Qué cantidad de antibiótico permanece en el cuerpo a largo plazo?

70. A un paciente se le inyecta un medicamento cada 12 horas. Inmediatamente antes de cada inyección, la concentración del fármaco se ha reducido 90% y la nueva dosis aumenta la concentración por 1.5 mg/L.

(a) ¿Cuál es la concentración luego de tres dosis?

(b) Si C_n es la concentración luego de la n-ésima dosis, encuentre una fórmula para C_n como una función de C_n.

(c) ¿Cuál es el valor límite de la concentración?

71. Un paciente toma 150 mg de una medicina a la misma hora cada día. Justo antes de tomar cada tableta, 5% del medicamento permanece en el cuerpo.

(a) ¿Qué cantidad de medicina está en el cuerpo después de la tercera tableta? ¿Después de la n-ésima tableta?

(b) ¿Qué cantidad de medicina queda en el cuerpo a largo plazo?

72. Después de inyectar una dosis D de insulina, la concentración de insulina en el sistema del paciente decae de manera exponencial, así que puede expresarse como De^{-at}, donde t representa el tiempo en horas y a es una constante positiva.

(a) Si la dosis D se inyecta cada T horas, escriba una expresión para la suma de la concentración residual justo antes de la $(n + 1)$-ésima inyección.

(b) Determine la concentración límite antes de inyectar.

(c) Si la concentración de insulina debe siempre permanecer en o por encima de un valor crítico C, determine la dosis mínima de D en términos de C, a y T.

73. Cuando el dinero se gasta en bienes y servicios, quienes lo reciben también gastan un poco de él. Las personas que reciben algo del dinero gastado dos veces, gastarán algo de dicho dinero, y así sucesivamente. Los economistas llaman a esta reacción en cadena *efecto multiplicador*. En un hipotético pueblo aislado, el gobierno local inicia el proceso gastando D dólares. Suponga que cada persona que recibe dinero gasta $100c\%$ y ahorra $100s\%$ del dinero. Los valores c y s se denominan *propensión marginal al consumo* y *propensión marginal al ahorro* y, por supuesto, $c + s = 1$.

(a) Sea S_n el total de lo gastado que ha sido generado después de n transacciones. Determine una ecuación para S_n.

(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, donde $k = 1/s$. La cantidad k se llama *multiplicador*. ¿Cuál es el multiplicador si la propensión marginal al consumo es 80%?

Nota: el gobierno federal de Estados Unidos usa este principio para justificar el gasto que muestra déficit. Los bancos utilizan este principio para justificar los préstamos de un gran porcentaje del dinero que reciben como depósito.

74. Una pelota tiene la propiedad de que, cada vez que cae desde una altura h sobre una superficie nivelada y dura, rebota hasta una altura rh, donde $0 < r < 1$. Suponga que la pelota cae desde una altura inicial de H metros.

(a) Suponiendo que la pelota continúa rebotando de manera indefinida, calcule la distancia total que recorre.

(b) Calcule el tiempo total que la pelota viaja. (Use el hecho de que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos.)

(c) Suponga que cada vez que la pelota golpea la superficie con velocidad v rebota con velocidad $-kv$, donde $0 < k < 1$. ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al reposo?

75. Encuentre el valor de c si

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1 + c)^{-n} = 2$$

76. Encuentre el valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

77. En el ejemplo 9 se demostró que la serie armónica es divergente. Aquí se bosqueja otro método, haciendo uso del hecho de que $e^x > 1 + x$ para cualquier $x > 0$. (Véase el ejercicio 4.3.84.)

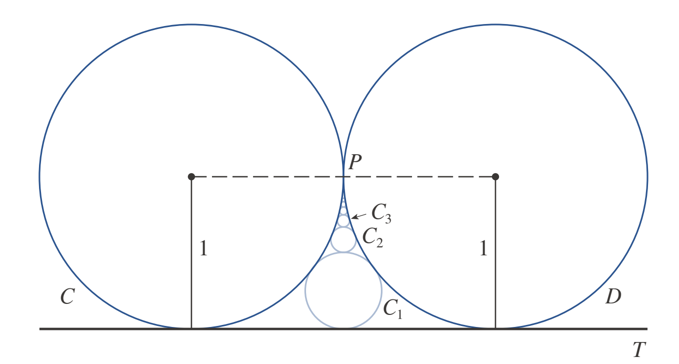
Si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, demuestre que $e^{s_n} > n + 1$. ¿Por qué esto implica que la serie armónica es divergente?

78. Grafique las curvas $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sobre una misma pantalla. Determinando las áreas entre las curvas sucesivas, dé una demostración geométrica del hecho, mostrado en el ejemplo 8, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$



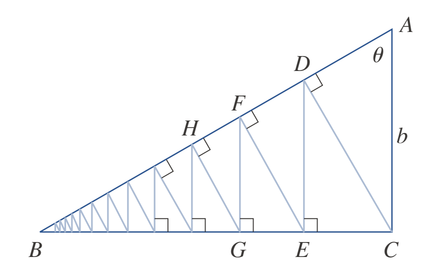
79. En la figura se muestran dos circunferencias C y D de radio 1 que se tocan en P. T es una tangente común; C_1 es la circunferencia que toca C, D y T; C_2 es la circunferencia que toca C, D y C_1; C_3 es la circunferencia que toca C, D y C_2. Este procedimiento puede continuar en forma indefinida y produce una sucesión infinita de circunferencias $\{C_n\}$. Encuentre una expresión para el diámetro de C_n y, de ese modo, proporcione otra demostración geométrica del ejemplo 8.



80. Un triángulo rectángulo ABC está definido con $\angle A = \theta$ y $|AC| = b$. CD se traza perpendicular a AB, DE se traza en forma perpendicular a BC, $EF \perp AB$, y este proceso continúa en forma indefinida como se ilustra en la figura. Determine la longitud total de todas las perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

en términos de b y θ.



81. ¿Qué está mal en el cálculo siguiente?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldus pensaba que esto demostraba la existencia de Dios, porque "se había creado algo de la nada".)

82. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \neq 0$) se sabe que es una serie convergente. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ es una serie divergente.

83. Demuestre el inciso (i) del teorema 8.

84. Si Σa_n es divergente y $c \neq 0$, demuestre que $\Sigma c a_n$ es divergente.

85. Si Σa_n es convergente y Σb_n es divergente, demuestre que la serie $\Sigma(a_n + b_n)$ es divergente. [*Sugerencia*: argumente por contradicción.]

86. Si Σa_n y Σb_n son divergentes, ¿necesariamente $\Sigma(a_n + b_n)$ es divergente?

87. Suponga que una serie Σa_n consta de términos positivos y sus sumas parciales s_n cumplen con la desigualdad $s_n \leqslant 1000$ para toda n. Explique por qué Σa_n debe ser convergente.

88. La sucesión de Fibonacci se define en la sección 11.1 mediante las ecuaciones

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Demuestre que cada uno de los enunciados siguientes es cierto.

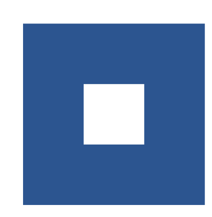
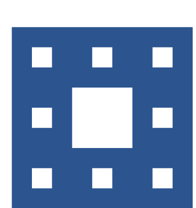
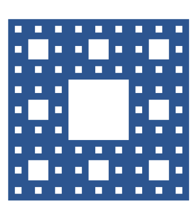
(a) $\dfrac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1} f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}} = 2$

89. El **conjunto de Cantor**, nombrado así en honor al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), se construye como se señala a continuación. Empiece con el intervalo cerrado $[0, 1]$ y retire el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Esto deja los dos intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y luego elimine el intervalo abierto constituido por el tercio medio de cada uno. De este modo quedan cuatro intervalos y de nuevo elimine el tercio medio de cada uno de ellos. Continúe este procedimiento de manera indefinida eliminando en cada paso el tercio medio de cada intervalo que queda del paso anterior. El conjunto de Cantor consiste en los números que quedan en $[0, 1]$ después de que todos esos intervalos se han eliminado.

(a) Demuestre que la longitud total de todos los intervalos que se eliminan es 1. A pesar de eso, el conjunto de Cantor contiene un infinito de números. Proporcione ejemplos de algunos números del conjunto de Cantor.

(b) La **alfombra de Sierpinski** es un equivalente en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Se construye eliminando el noveno central de un cuadrado de lado 1, y luego se elimina el centro de cada uno de los ocho cuadrados restantes, y así sucesivamente. (En la figura se ilustran los primeros tres pasos de la construcción.) Demuestre que la suma de las áreas de los cuadrados eliminados es 1. Esto significa que el área de la alfombra de Sierpinski es 0.

90. (a) Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante la ecuación $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, donde a_1 y a_2 son números reales. Experimente con varios valores de a_1 y a_2 y con la ayuda de su calculadora infiera el límite de la sucesión.

(b) Encuentre $\lim_{n \to \infty} a_n$ en términos de a_1 y a_2 expresando $a_{n+1} - a_n$ en función de $a_2 - a_1$ y sume una serie.

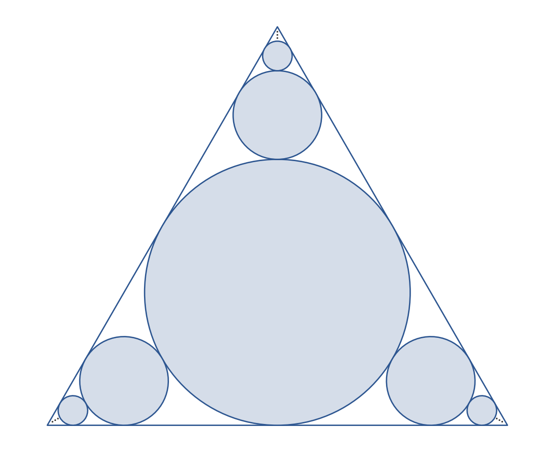
91. Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)!$

(a) Calcule las sumas parciales s_1, s_2, s_3 y s_4. ¿Reconoce los denominadores? Use el patrón para inferir una fórmula para s_n.

(b) Aplique inducción matemática para demostrar su inferencia.

(c) Demuestre que la serie infinita dada es convergente y calcule su suma.

92. En la figura hay un infinito de círculos que se aproximan a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo toca otros círculos y los lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados que miden una unidad de longitud, calcule el área total que ocupan los círculos.



11.3 La prueba de la integral y estimaciones de sumas

En general, es difícil determinar la suma exacta de una serie. Se puede lograr en el caso de series geométricas y series $\Sigma 1/[n(n+1)]$ porque en cada uno de estos casos es posible encontrar una fórmula simple para la n-ésima suma parcial s_n. Pero por lo regular no es fácil descubrir tal fórmula. Por tanto, en las secciones siguientes se tratan varias pruebas que permiten determinar si una serie es convergente o divergente sin que se tenga que encontrar en forma explícita su suma. (En algunos casos, los métodos permiten determinar unas buenas estimaciones de la suma.) La primera prueba utiliza integrales impropias.

Se debe empezar por investigar las series cuyos términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1.4636
10	1.5498
50	1.6251
100	1.6350
500	1.6429
1000	1.6439
5000	1.6447

No hay una fórmula sencilla para la suma s_n de los primeros n términos, pero la tabla generada al calcular los valores, dados en el margen, sugiere que las sumas parciales se aproximan a un número cercano a 1.64 cuando $n \to \infty$ y de este modo parece como si la serie fuera convergente.

Se puede confirmar esta impresión con un razonamiento geométrico. En la figura 1 se ilustra la curva $y = 1/x^2$ y algunos rectángulos que se encuentran abajo de la curva. La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud igual a 1; la altura es igual al valor de la función $y = 1/x^2$ en el punto final derecho del intervalo.

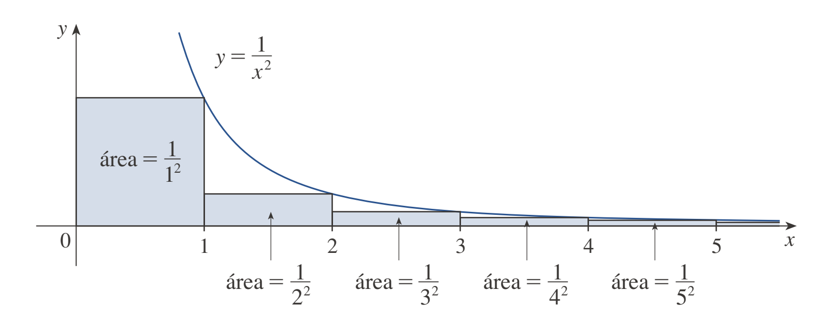


FIGURA 1

Por lo que la suma de las áreas de los rectángulos es

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Si se excluye el primer rectángulo, el área total de los rectángulos restantes es menor que el área bajo la curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que es el valor de la integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. En la sección 7.8 se descubrió que esta integral impropia es convergente y que tiene un valor de 1. Por lo que la figura muestra que todas las sumas parciales son menores que

$$\frac{1}{1^2}+\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

Por lo que las sumas parciales están acotadas. También se sabe que las sumas parciales son crecientes porque todos los términos son positivos. Por tanto, las sumas parciales convergen, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona, de manera que la serie es convergente. La suma de la serie (el límite de las sumas parciales) es también menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots<2$$

[El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) calculó que la suma exacta de esta serie es $\pi^2/6$, pero la demostración de esto es muy difícil. (Véase el problema 6 en los Problemas adicionales después del capítulo 15.)]

Ahora veáse la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3.2317
10	5.0210
50	12.7524
100	18.5896
500	43.2834
1000	61.8010
5000	139.9681

La tabla de valores de s_n sugiere que las sumas parciales no se aproximan a un número finito, por lo que se sospecha que la serie dada podría ser divergente. Otra vez se usa una figura para confirmarlo. En la figura 2 se muestra la curva $y = 1/\sqrt{x}$, pero esta vez se usan rectángulos cuya parte superior queda *arriba* de la curva.

FIGURA 2

La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud 1. La altura es igual al valor de la función $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto final *izquierdo* del intervalo. Así que la suma de las áreas de todos los rectángulos es

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esta área total es mayor que el área bajo la curva para $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geqslant 1$, que es igual a la integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx$. Pero se sabe por la sección 7.8 que esta integral impropia es

divergente. En otras palabras, el área bajo la curva es infinita. Así que la suma de la serie debe ser infinita; es decir, la serie es divergente.

El mismo tipo de razonamiento geométrico aplicado para estas dos series se puede hacer para demostrar la prueba siguiente. (La demostración se encuentra al final de esta sección.)

Prueba de la integral Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente. En otras palabras:

(i) Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(ii) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

NOTA Cuando use la prueba de la integral no es necesario iniciar la serie o la integral en $n = 1$. Por ejemplo, al probar la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{se usa} \qquad \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Asimismo, no es necesario que f sea *siempre* decreciente. Lo importante es que f sea decreciente *en los extremos*, es decir, decreciente para x más grande que algún número N. Entonces $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es convergente, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente de acuerdo con la nota 4 de la sección 11.2.

EJEMPLO 1 Pruebe la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ es continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$ por lo que se aplica la prueba de la integral:

Para usar la prueba de la integral es necesario evaluar $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ y, por tanto, se tiene que encontrar una antiderivada de f. Es frecuente que esto sea difícil o imposible, por lo que también se necesitan otras pruebas para convergencia.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x \Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\tan^{-1}t - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, $\int_1^{\infty} 1/(x^2+1)\,dx$ es una integral convergente y por lo tanto, de acuerdo con la prueba de la integral, la serie $\sum 1/(n^2+1)$ es convergente. ■

EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de p la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente?

SOLUCIÓN Si $p < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Si $p = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. En cualquier caso $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) \neq 0$, por lo que la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia (11.2.7).

Si $p > 0$, entonces la función $f(x) = 1/x^p$ es evidentemente continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$. En el capítulo 7 [véase (7.8.2)] se encontró que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leqslant 1$$



De la prueba de la integral se infiere que la serie $\Sigma 1/n^p$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leqslant 1$. (En el caso de $p = 1$, esta serie es la serie armónica estudiada en el ejemplo 11.2.9) ■

La serie del ejemplo 2 se llama **serie *p***. Esto es importante en el resto de este capítulo, por lo que se resumen los resultados del ejemplo 2 para referencia futura como se indica a continuación.

1 La serie p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

EJEMPLO 3

(a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

es convergente porque es una serie p con $p = 3 > 1$.

(b) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

es divergente porque es una serie p con $p = \frac{1}{3} < 1$. ■

NOTA *No* se debe inferir que, de acuerdo con la prueba de la integral, la suma de la serie es igual al valor de la integral. De hecho,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{mientras que} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Por tanto, en general

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

EJEMPLO 4 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\ln x)/x$ es positiva y continua para $x > 1$ porque la función logaritmo es continua. Pero no es obvio si f es decreciente o no lo es, por lo que al calcular su derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Entonces, $f'(x) < 0$ cuando $\ln x > 1$, es decir, $x > e$. Se sigue que f es decreciente cuando $x > e$, de manera que se puede aplicar la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\bigg]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Ya que esta integral impropia es divergente, la serie $\Sigma(\ln n)/n$ también es divergente de acuerdo con la prueba de la integral. ■

Estimación de la suma de una serie

Suponga que se pudo aplicar la prueba de la integral para demostrar que una serie Σa_n es convergente y que se quiere encontrar una aproximación a la suma s de la serie. Por supuesto, cualquier suma parcial s_n es una aproximación a s porque $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Pero, ¿qué tan buena es esa aproximación? Para saberlo se necesita estimar el tamaño del **residuo**.

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

El residuo R_n es el error que se comete cuando s_n, la suma de los primeros n términos, se usa como una aproximación a la suma total.

Se usa la misma notación y las ideas que en la prueba de la integral, suponiendo que f es decreciente sobre $[n, \infty)$. Al comparar las áreas de los rectángulos con el área bajo $y = f(x)$ para $x > n$ en la figura 3, se ve que

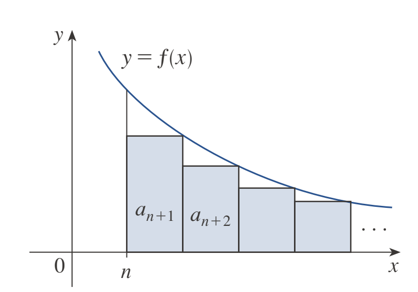


FIGURA 3

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

Asimismo, en la figura 4 se ve que

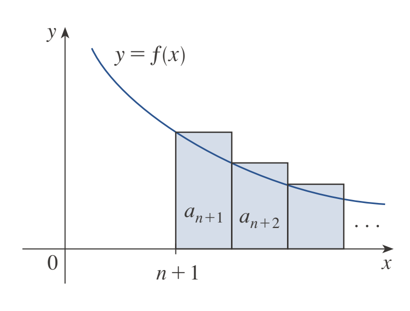


FIGURA 4

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx$$

De este modo se ha demostrado la siguiente estimación de error.

2 Estimación del residuo para la prueba de la integral Suponga que $f(k) = a_k$, donde f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant n$ y Σa_n es convergente. Si $R_n = s - s_n$, entonces

$$\int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

EJEMPLO 5

(a) Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie $\Sigma 1/n^3$ usando la suma de los primeros 10 términos. Estime el error implicado en esta aproximación.
(b) ¿Cuántos términos se requieren para asegurar que el residuo no exceda 0.0005?

SOLUCIÓN En los incisos (a) y (b) se necesita conocer $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Con $f(x) = 1/x^3$, que satisface las condiciones de la prueba integral, se tiene

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

(a) Aproximando la suma de la serie por la 10-ésima suma parcial, se tiene

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1.1975$$

De acuerdo con el residuo estimado en (2), se tiene

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

Por lo que el tamaño del error es cuanto más de 0.005.

(b) La precisión de 0.0005 quiere decir que se debe encontrar un valor de n tal que $R_n \leqslant 0.0005$. Ya que

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

se quiere que

$$\frac{1}{2n^2} < 0.0005$$

Al resolver esta desigualdad, se obtiene

$$n^2 > \frac{1}{0.001} = 1000 \qquad \text{o} \qquad n > \sqrt{1000} \approx 31.6$$

Se necesita 32 términos para garantizar una precisión dentro de 0.0005. ■

Si se suma s_n a cada miembro de las desigualdades en (2), se obtiene

3
$$s_n + \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_n^\infty f(x)\,dx$$

porque $s_n + R_n = s$. Las desigualdades en (3) dan una cota inferior y una cota superior para s. Estas cotas proporcionan una aproximación más certera a la suma de la serie que la suma parcial s_n.

Aunque Euler calculó la suma exacta de las series p para $p = 2$, no se ha encontrado la suma para $p = 3$. Sin embargo, en el ejemplo 6 se muestra cómo *estimar* esta suma.

EJEMPLO 6 Use (3) con $n = 10$ para estimar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$.

SOLUCIÓN Las desigualdades en (3) resultan

$$s_{10} + \int_{11}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx \leqslant s \leqslant s_{10} + \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$$

Del ejemplo 5 se sabe que

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

por lo que

$$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leqslant s \leqslant s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Si se usa $s_{10} \approx 1.197532$, se obtiene

$$1.201664 \leqslant s \leqslant 1.202532$$

Si se aproxima s por el punto medio de este intervalo, entonces el error es a lo más la mitad de la longitud del intervalo. Por lo que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx 1.2021 \qquad \text{con error} \qquad < 0.0005$$ ■

Si se compara el ejemplo 6 con el ejemplo 5, se observa que la estimación mejorada en (3) es mucho mejor que la estimación $s \approx s_n$. Para que el error sea menor que 0.0005 se tiene que usar 32 términos en el ejemplo 5, pero solo 10 términos en el ejemplo 6.

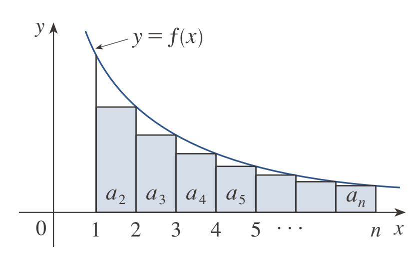


FIGURA 5

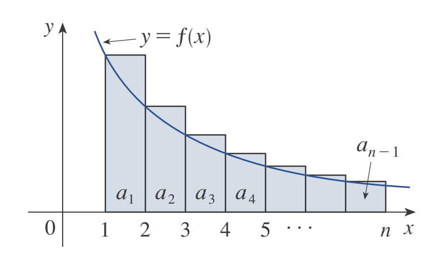


FIGURA 6

Demostración de la prueba de la integral

Ya se ha visto la idea básica en que se apoya la demostración de la prueba de la integral en las figuras 1 y 2 para las series $\Sigma 1/n^2$ y $\Sigma\, 1/\sqrt{n}$. En el caso de la serie general Σa_n, véanse las figuras 5 y 6. El área del primer rectángulo sombreado de la figura 5 es el valor de f en el punto final derecho de $[1, 2]$, es decir, $f(2) = a_2$. Así, al comparar las áreas de los rectángulos sombreados con el área bajo $y = f(x)$ de 1 a n, se ve que

$$\boxed{4} \qquad a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\, dx$$

(Observe que esta desigualdad depende del hecho de que f es decreciente.) De manera similar, en la figura 6 se muestra que

$$\boxed{5} \qquad \int_1^n f(x)\, dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

(i) Si $\int_1^\infty f(x)\, dx$ es convergente, entonces (4) da

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\, dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\, dx$$

ya que $f(x) \geqslant 0$. Por tanto

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\, dx = M$$

Como $s_n \leqslant M$ para toda n, la sucesión $\{s_n\}$ está acotada por arriba. También

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

como $a_{n+1} = f(n + 1) \geqslant 0$. En estos términos $\{s_n\}$ es una sucesión acotada creciente y, de este modo, es convergente de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona (11.1.12). Esto significa que Σa_n es convergente.

(ii) Si $\int_1^\infty f(x)\, dx$ es divergente, entonces $\int_1^n f(x)\, dx \to \infty$ cuando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Pero con (5) se obtiene

$$\int_1^n f(x)\, dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

y por tanto $s_{n-1} \to \infty$. Esto implica que $s_n \to \infty$, luego Σa_n diverge. ■

11.3 EJERCICIOS

1. Dibuje una gráfica para demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1.3}}\, dx$$

¿Qué puede concluir con respecto a la serie?

2. Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant 1$ y $a_n = f(n)$. En una gráfica acomode las tres cantidades siguientes en orden creciente.

$$\int_1^6 f(x)\, dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3-8 Mediante la prueba de la integral determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-0.3}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n - 1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n - 1)^4}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n + 4}}$

9-26 Determine si la serie es convergente o divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1.4} + 3n^{-1.2})$

11. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

12. $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$

13. $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \cdots$

14. $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + n^{3/2}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 2}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 + 4}$

20. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$

24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n^3}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$

27-28 Explique por qué no es posible utilizar la prueba de la integral para determinar si la serie es convergente.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{1 + n^2}$

29-32 Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente.

29. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

30. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\,[\ln(\ln n)]^p}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + n^2)^p$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

---

33. La función zeta de Riemann ζ se define como

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

y se usa en teoría de números para estudiar la distribución de los números primos. ¿Cuál es el dominio de ζ?

34. Leonhard Euler calculó la suma exacta de la serie para $p = 2$:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(Veáse página 720.) Use este hecho para encontrar la suma de cada serie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

35. Euler también encontró la suma para la serie p con $p = 4$:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Utilice el resultado de Euler para encontrar la suma de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^4$

(b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k - 2)^4}$

36. (a) Calcule la suma parcial s_{10} de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime el error al usar s_{10} como aproximación a la suma de la serie.
(b) Use (3) con $n = 10$ para conseguir una estimación mejorada de la suma.
(c) Compare su estimación en el inciso (b) con el valor exacto dado en el ejercicio 35.
(d) Calcule un valor de n tal que s_n no difiera más de 0.00001 del valor de la suma.

37. (a) Mediante la suma de los primeros 10 términos, estime la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. ¿Qué tan buena es la estimación?
(b) Mejore esta estimación usando (3) con $n = 10$.
(c) Compare su resultado en el inciso (b) con el valor exacto dado en el ejercicio 34.
(d) Encuentre un valor de n que dé la certeza de que el error en la aproximación $s \approx s_n$ es menor que 0.001.

38. Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2n}$ correcta a cuatro decimales.

39. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)^{-6}$ correcta a cinco decimales.

40. ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ se necesitarían sumar para calcular la suma que no difiera de 0.01?

41. Demuestre que si se quiere aproximar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1.001}$ tal que el error sea menor de 5 en la novena cifra decimal, luego ¡es necesario sumar más de $10^{11\,301}$ términos!

SAC **42.** (a) Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ es convergente.
(b) Encuentre un límite superior para el error en la aproximación $s \approx s_n$.
(c) ¿Cuál es el valor más pequeño de n tal que este límite superior sea menor que 0.05?
(d) Encuentre s_n para este valor de n.

43. (a) Utilice (4) para demostrar que si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, entonces

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) La serie armónica diverge, pero muy lentamente. Con ayuda del inciso (a) demuestre que la suma del primer millón de términos es menor que 15 y que la suma de los primeros mil millones de términos es menor que 22.

44. Siga los pasos siguientes para demostrar que la sucesión

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tiene un límite. (El valor del límite se denota con γ y se denomina constante de Euler.)

(a) Dibuje un diagrama como la figura 6 con $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como un área [o use (5)] para demostrar que $t_n > 0$ para toda n.

(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n+1) - \ln n] - \frac{1}{n+1}$$

como una diferencia de áreas para demostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Por tanto, $\{t_n\}$ es una sucesión decreciente.

(c) Use el teorema de la sucesión monótona para demostrar que $\{t_n\}$ es convergente.

45. Determine todos los valores positivos de b para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

46. Encuentre todos los valores de c para los que converge la serie siguiente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

11.4 Pruebas por comparación

En las pruebas por comparación, la idea es comparar una serie dada con una serie que ya se sabe que es convergente o divergente. Por ejemplo, la serie



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} \tag{1}$$

recuerda la serie $\sum_{n-1}^{\infty} 1/2^n$, que es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, por lo que es convergente. Como la serie (1) es similar a la serie convergente, se presiente que también debe ser convergente. De hecho, así es. La desigualdad

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

demuestra que la serie dada (1) tiene términos menores que los de la serie geométrica y, por tanto, todas las sumas parciales son también más pequeñas que 1 (la suma de la serie geométrica). Esto quiere decir que las sumas parciales forman una sucesión creciente acotada, que es convergente. Asimismo, se infiere que la suma de la serie es menor que la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Un razonamiento similar se puede usar para demostrar la prueba siguiente, la cual se aplica solo a series cuyos términos son positivos. La primera parte dice que si se tiene una serie cuyos términos son *menores* que los de una serie *convergente* conocida, entonces esa serie también es convergente. La segunda parte establece que si se empieza con una serie cuyos términos son *mayores* que los de una serie divergente conocida, entonces también es *divergente*.

Prueba por comparación Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos.

(i) Si Σb_n es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para toda n, entonces Σa_n también es convergente.

(ii) Si Σb_n es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para toda n, entonces Σa_n también es divergente.

Es importante considerar la distinción entre sucesión y serie. Una sucesión es un listado de números y una serie es una suma. Con cada serie Σa_n hay dos sucesiones asociadas: La sucesión $\{a_n\}$ de términos y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

DEMOSTRACIÓN

(i) Sea $$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Ya que ambas series tienen términos positivos, las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son crecientes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$). Asimismo, $t_n \to t$, por lo que $t_n \leqslant t$ para toda n. Como $a_i \leqslant b_i$ se tiene $s_n \leqslant t_n$. Por lo que, $s_n \leqslant t$ para toda n. Esto significa que $\{s_n\}$ es creciente y está acotada superiormente y, por tanto, converge por el teorema de sucesiones monótonas. Por lo que Σa_n es convergente.

(ii) Si Σb_n es divergente, entonces $t_n \to \infty$ (ya que $\{t_n\}$ es creciente). Pero $a_i \geqslant b_i$, por lo que $s_n \geqslant t_n$. Por lo que $s_n \to \infty$. Por tanto, Σa_n diverge. ■

Por supuesto, al usar la prueba por comparación es necesario tener alguna serie conocida Σb_n para la comparación. La mayoría de las veces se usa una de estas series:

Serie estándar usada con la prueba por comparación

- Una serie p [$\Sigma 1/n^p$ que converge si $p > 1$ y diverge si $p \leqslant 1$; véase (11.3.1)].
- Una serie geométrica [Σar^{n-1} es convergente si $|r| < 1$ y es divergente si $|r| \geqslant 1$; véase (11.2.4)].

EJEMPLO 1 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN En el caso de n grande el término dominante en el denominador es $2n^2$, por lo que si se compara la serie dada con la serie $\Sigma 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

porque el lado izquierdo tiene un denominador más grande. (En la notación de la prueba por comparación, a_n está en el lado izquierdo y b_n en el lado derecho.) Ya se sabe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente porque es una constante por una serie p con $p = 2 > 1$. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

es convergente de acuerdo con el inciso (i) de la prueba por comparación. ■

NOTA 1 Aunque la condición $a_n \leqslant b_n$ o $a_n \geqslant b_n$ en la prueba por comparación es para toda n, es necesario verificar solo que se cumple para $n \geqslant N$, donde N es algún entero establecido, porque la convergencia de una serie no está afectada por un número finito de términos. Esto se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Se usa la prueba de la integral para investigar esta serie en el ejemplo 11.3.4, pero también es posible probarla por comparación con la serie armónica. Observe que $\ln k > 1$ para $k \geqslant 3$ y así

$$\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k} \qquad k \geqslant 3$$

Se sabe que $\Sigma 1/k$ es divergente (serie p con $p = 1$). Por lo que la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba por comparación. ■

NOTA 2 Los términos de la serie que se están probando deben ser menores que los de una serie convergente, o mayores que los de una serie divergente. Si los términos son más grandes que los términos de una serie convergente, o bien, menores que los de una serie divergente, entonces la prueba por comparación no aplica. Por ejemplo, considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

La desigualdad

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

es inútil en cuanto a la prueba por comparación porque $\Sigma\, b_n = \Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente y $a_n > b_n$. Sin embargo, la impresión es que $\Sigma 1/(2^n - 1)$ tiene que ser convergente porque es muy parecida a la serie geométrica convergente $\Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^n$. En tales casos se puede aplicar la prueba siguiente.

Los ejercicios 40 y 41 tratan los casos $c = 0$ y $c = \infty$.

Prueba por comparación del límite Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un número finito y $c > 0$, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

DEMOSTRACIÓN Sean m y M números positivos tales que $m < c < M$. Como a_n/b_n está cercano a c para n grande, existe un entero N tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \qquad \text{cuando } n > N$$

y por tanto $$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{cuando } n > N$$

Si Σb_n es convergente, también lo es ΣMb_n. Así Σa_n es convergente de acuerdo con el inciso (i) por la prueba por comparación. Si Σb_n diverge también Σmb_n es divergente y por el inciso (ii) de la prueba por comparación Σa_n diverge. ■

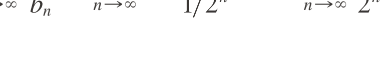
EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Se usa la prueba por comparación del límite con

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

y se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$



Ya que existe este límite y $\Sigma 1/2^n$ es una serie geométrica convergente, la serie dada converge de acuerdo con la prueba por comparación del límite. ■

EJEMPLO 4 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La parte dominante del numerador es $2n^2$ y la parte dominante del denominador es $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Esto sugiere tomar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{2\sqrt{\dfrac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Ya que $\Sigma b_n = 2\,\Sigma 1/n^{1/2}$ es divergente (es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$), la serie dada diverge de acuerdo con la prueba por comparación del límite. ■

Observe que al probar muchas series se encuentra una serie de comparación adecuada Σb_n conservando solo las potencias más altas en el numerador y en el denominador.

Estimación de sumas

Si se ha usado la prueba por comparación para demostrar que una serie Σa_n es convergente por comparación con una serie Σb_n, entonces se puede hacer una estimación de la suma Σa_n al comparar los residuos. Como en la sección 11.3, se considera el residuo

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

En cuanto a la serie de comparación Σb_n se considera el residuo correspondiente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Ya que $a_n \leqslant b_n$ para toda n, se tiene $R_n \leqslant T_n$. Si Σb_n es una serie p, se puede estimar su residuo T_n como en la sección 11.3. Si Σb_n es una serie geométrica, entonces T_n es la suma de una serie geométrica y se puede sumar exactamente (véanse los ejercicios 35 y 36). En cualquier caso, se sabe que R_n es menor que T_n.

EJEMPLO 5 Con la suma de los primeros 100 términos aproxime la suma de la serie $\Sigma 1/(n^3 + 1)$. Estime el error implicado en esta aproximación.

SOLUCIÓN Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

la serie dada es convergente de acuerdo con la prueba por comparación. El residuo T_n para la serie de comparación $\Sigma 1/n^3$ ya se ha estimado en el ejemplo 11.3.5 por medio de la estimación del residuo por la prueba de la integral. Allí encuentra que

$$T_n \leqslant \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

Por tanto, el residuo R_n de la serie dada cumple con

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Con $n = 100$ se tiene

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0.00005$$

Con una calculadora programable o una computadora, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3+1} \approx 0.6864538$$

con un error menor que 0.00005. ■

11.4 EJERCICIOS

1. Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que se sabe que Σb_n es convergente.
(a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir con respecto a Σa_n? ¿Por qué?
(b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir con respecto a Σa_n? ¿Por qué?

2. Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que se sabe que Σb_n es divergente.
(a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir de Σa_n? ¿Por qué?
(b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir con respecto a Σa_n? ¿Por qué?

3-32 Determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+8}$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^n-1}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ **10.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,\text{sen}^2 k}{1+k^3}$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}}$ **12.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{e^n}$ **14.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1.2}}$ **16.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}+2}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+n}$ **20.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+n^2}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n}}{2+n}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4^n}{n+6^n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3^n}{n+2^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n+1}{ne^n+1}$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n^2}$ **28.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33-36 Utilice la suma de los primeros 10 términos, para obtener un valor aproximado de la suma de la serie. Estime el error.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+n^5}$ **34.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^4}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n}\cos^2 n$ **36.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 n}{n^3}$

37. El significado de la representación decimal de un número $0.d_1d_2d_3\ldots$ (donde el dígito d_i es uno de los números 0, 1, 2,…, 9) es tal que

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Demuestre que esta serie siempre es convergente.

38. ¿Para qué valores de p la serie $\Sigma_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ es convergente?

39. Demuestre que si $a_n \geqslant 0$ y Σa_n converge, entonces también $\Sigma\, a_n^2$ converge.

40. (a) Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que Σb_n es convergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

entonces Σa_n también es convergente.

(b) Utilice el inciso (a) para demostrar que la serie converge.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$

41. (a) Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que Σb_n es divergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

entonces Σa_n también es divergente.

(b) Use el inciso (a) para demostrar que la serie es divergente.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Proporcione un ejemplo de un par de series Σa_n y Σb_n con términos positivos donde $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ y Σb_n diverge, pero Σa_n converge. (Compare con el ejercicio 40.)

43. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, entonces Σa_n es divergente.

44. Demuestre que si $a_n > 0$ y Σa_n es convergente, entonces $\Sigma \ln(1 + a_n)$ es convergente.

45. Si Σa_n es una serie convergente con términos positivos, ¿es cierto que $\Sigma \operatorname{sen}(a_n)$ también es convergente?

46. Si Σa_n y Σb_n son series convergentes con términos positivos, ¿es cierto que $\Sigma a_n b_n$ también es convergente?

11.5 Series alternantes

Las pruebas de convergencia que se han examinado hasta ahora se aplican solo a series con términos positivos. En esta sección y en la siguiente, se estudia cómo tratar con series cuyos términos no son necesariamente positivos. De particular importancia son las *series alternantes*, cuyos términos alternan signo.

Una **serie alternante** es una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos. Aquí hay dos ejemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

De acuerdo con estos ejemplos, el n-ésimo término de una serie alternante es de la forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{o} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

donde b_n es un número positivo. (De hecho, $b_n = |a_n|$.)

La prueba siguiente establece que, si los términos de una serie alternante decrecen hacia 0 en valor absoluto, entonces la serie converge.

Prueba de la serie alternante Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

cumple con

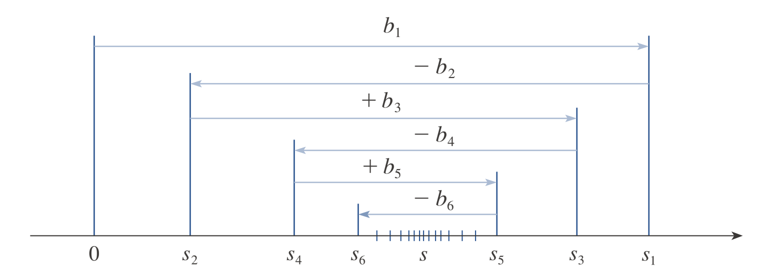
(i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para toda n

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

entonces la serie es convergente.

Antes de proporcionar la demostración veáse la figura 1, la cual es una representación de la idea en que se basa la demostración. Primero se dibuja $s_1 = b_1$ sobre una recta numérica. Para determinar s_2 se resta b_2, por lo que s_2 está a la izquierda de s_1. Luego, para determinar s_3 se suma b_3, por lo que s_3 está a la derecha de s_2. Pero como $b_3 < b_2$, s_3 está a la izquierda de s_1. Al continuar de esta manera, se observa que las sumas parciales oscilan hacia atrás y hacia adelante. Ya que $b_n \to 0$, los pasos sucesivos se vuelven más y más pequeños. Las sumas parciales pares $s_2, s_4, s_6, \ldots$ se incrementan, y decrecen las sumas parciales impares $s_1, s_3, s_5, \ldots$ Por lo que parece razonable que ambas converjan en el mismo número s, que es la suma de la serie. Por tanto, en la demostración siguiente se consideran por separado las sumas parciales pares e impares.

FIGURA 1



DEMOSTRACIÓN DE LA PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE Primero se consideran las sumas parciales pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0 \qquad \text{ya que } b_2 \leqslant b_1$$

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2 \qquad \text{ya que } b_4 \leqslant b_3$$

En general $s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geqslant s_{2n-2}$ ya que $b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$

Por esto $$0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$$

Pero también se puede escribir

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$$

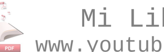
Todos los términos entre paréntesis son positivos, por lo que $s_{2n} \leqslant b_1$ para toda n. Por tanto, la sucesión $\{s_{2n}\}$ de las sumas parciales pares es creciente y está acotada por arriba. Debido a eso, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona, es convergente. Se llama s a su límite, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Ahora se calcula el límite de las sumas parciales impares:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} \\ &= s + 0 \qquad \text{[por la condición (ii)]} \\ &= s\end{aligned}$$

Ya que tanto la suma parcial par como la suma parcial impar convergen a s, se tiene $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ [véase el ejercicio 11.1.92(a)], por lo que la serie es convergente. ■



En la figura 2 se ilustra el ejemplo 1; se muestran las gráficas de los términos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ y las sumas parciales s_n. Observe cómo los valores de s_n oscilan alrededor del límite, el cual, al parecer está alrededor de 0.7. De hecho, la suma exacta de la serie es $\ln 2 \approx 0.693$ (véase el ejercicio 36).

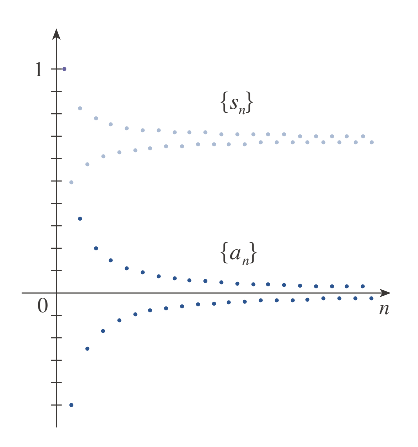


FIGURA 2

EJEMPLO 1 La serie armónica alternante

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisface

$$\text{(i)}\ \ b_{n+1} < b_n \qquad \text{porque} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{(ii)}\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

por lo que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. ■

EJEMPLO 2 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ es alternante, pero

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

por lo que la condición (ii) no se cumple. En cambio, vea el límite del n-ésimo término de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

Este límite no existe, por lo que la serie es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia. ■

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La serie dada es alternante, por lo que se tratará de comprobar las condiciones (i) y (ii) de la prueba de la serie alternante.

A diferencia de la situación en el ejemplo 1, no es obvio que la sucesión dada por $b_n = n^2/(n^3 + 1)$ sea decreciente. Sin embargo, si se considera la función relacionada $f(x) = x^2/(x^3 + 1)$, se encuentra que

$$f'(x) = \frac{x(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^2}$$

En lugar de verificar la condición (i) de la prueba de la serie alternante calculando una derivada, puede comprobar que $b_{n+1} < b_n$ directamente usando la técnica de la solución 1 del ejemplo 11.1.13.

Ya que se consideran solo x positivas, $f'(x) < 0$ si $2 - x^3 < 0$, es decir, $x > \sqrt[3]{2}$. Por lo que f es decreciente sobre el intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Esto significa que $f(n+1) < f(n)$ y, por tanto, $b_{n+1} < b_n$ cuando $n \geqslant 2$. (La desigualdad $b_2 < b_1$ se puede comprobar de manera directa, pero lo que realmente importa es que la sucesión $\{b_n\}$ decrece con el tiempo.)

La condición (ii) se comprueba rápido:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^3}} = 0$$

Por lo que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. ■

Estimación de sumas

Una suma parcial s_n de cualquier serie convergente se puede usar como una aproximación a una suma total s, pero no es de mucha utilidad, a menos que se estime la exactitud de la aproximación. El error implicado al usar $s \approx s_n$ es el residuo $R_n = s - s_n$. El teorema siguiente establece que para las series que cumplen con la condición de la prueba de la serie alternante, el tamaño del error es menor que b_{n+1}, lo cual es el valor absoluto del primer término ignorado.

Se puede ver por geometría por qué el teorema de estimación para series alternantes es verdadero al examinar la figura 1 (en la página 733). Observe que $s - s_4 < b_5$, $|s - s_5| < b_6$ y así sucesivamente. Note también que s queda entre dos sumas parciales consecutivas.

Teorema de estimación para series alternantes Si $s = \Sigma(-1)^{n-1}b_n$, donde $b_n > 0$, es la suma de una serie alternante que satisface

$$\text{(i)}\quad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

entonces
$$|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$$

DEMOSTRACIÓN Se sabe por la demostración para la prueba de series alternantes que s queda entre dos sumas parciales consecutivas s_n y s_{n+1}. (Ya se demostró que s es mayor que todas las sumas parciales pares. Un argumento similar demuestra que s es menor que todas las sumas impares.) Se deduce que

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$ ■

Por definición, $0! = 1$.

EJEMPLO 4 Determine la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ correcta a tres decimales.

SOLUCIÓN Primero observe que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante porque

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{(ii)}\quad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{n!} \to 0 \text{ a medida que } n \to \infty$$

Para obtener cuántos términos se necesitan usar en la aproximación, se escriben los primeros términos de la serie:

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$
$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5040} + \cdots$$

Observe que $$b_7 = \tfrac{1}{5040} < \tfrac{1}{5000} = 0.0002$$

y $$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0.368056$$

En la sección 11.10 se demuestra que $e^x = \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para toda x, por lo que el resultado del ejemplo 4 es en realidad una aproximación al número e^{-1}.

De acuerdo con el teorema de la estimación de la serie alternante, se sabe que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0.0002$$

Este error de menos de 0.0002 no afecta la tercera cifra decimal, por lo que se tiene que $s \approx 0.368$ es correcta hasta la tercera cifra decimal. ■



 **NOTA** La regla de que el error (al usar s_n para aproximarse a s) es menor que el primer término ignorado es, en general, válida solo para series alternantes que cumplen con las condiciones del teorema de la estimación de la serie alternante. La regla no se aplica a otro tipo de series.

11.5 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una serie alternante?
(b) ¿En qué condiciones una serie alternante converge?
(c) Si estas condiciones se cumplen, ¿qué puede decir con respecto al residuo después de n términos?

2-20 Pruebe las series para ver si son convergentes o divergentes.

2. $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \cdots$

3. $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots$

4. $\dfrac{1}{\ln 3} - \dfrac{1}{\ln 4} + \dfrac{1}{\ln 5} - \dfrac{1}{\ln 6} + \dfrac{1}{\ln 7} - \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3+5n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+n+1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{1+\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

21-22 Trace la gráfica de las sucesiones de términos y la sucesión de sumas parciales en la misma pantalla. Utilice la gráfica para hacer una estimación de la suma de las series. Después utilice el teorema de la estimación de las series alternantes para estimar la suma con una aproximación de cuatro decimales.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0.8)^n}{n!}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{8^n}$

23-26 Demuestre que la serie es convergente. ¿Cuántos términos de la serie se necesitan sumar para determinar la suma con la exactitud indicada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ $\quad(|\text{error}| < 0.00005)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{n}$ $\quad(|\text{error}| < 0.0005)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 2^n}$ $\quad(|\text{error}| < 0.0005)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^n$ $\quad(|\text{error}| < 0.00005)$

27-30 Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie correcta a cuatro cifras decimales.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-2n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,4^n}$

31. ¿Es la 50.ª suma parcial s_{50} de la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ una sobreestimación o una subestimación de la suma total? Explique.

32-34 ¿Para qué valores de p es convergente cada serie?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Demuestre que la serie $\Sigma(-1)^{n-1}b_n$, donde $b_n = 1/n$ si n es impar y $b_n = 1/n^2$ si n es par, es divergente. ¿Por qué no aplica la prueba de la serie alternante?

36. Siga los pasos siguientes para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sean h_n y s_n las sumas parciales de las series armónica y armónica alternante.

(a) Demuestre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) De acuerdo con el ejercicio 11.3.44 se tiene

$$h_n - \ln n \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

y, por tanto,

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Apoyándose en estos hechos y el inciso (a), demuestre que $s_{2n} \to \ln 2$ cuando $n \to \infty$.

11.6 Convergencia absoluta y las pruebas de la razón y la raíz

Dada una serie Σa_n, se puede considerar la serie correspondiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cuyos términos son los valores absolutos de los términos de la serie original.

Hay pruebas de convergencia para series con términos positivos y series alternantes. Pero ¿y si los signos de los términos cambian de manera irregular? En el ejemplo 3 se observa que la idea de la convergencia absoluta ayuda algunas veces en tales casos.

1 Definición Una serie Σa_n es llamada **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\Sigma|a_n|$ es convergente.

Observe que, si Σa_n es una serie con términos positivos, entonces $|a_n| = a_n$ y por tanto, la convergencia absoluta es lo mismo que la convergencia en este caso.

EJEMPLO 1 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es una serie p convergente ($p = 2$). ■

EJEMPLO 2 Ya se sabe que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es convergente (véase ejemplo 11.5.1), pero no es absolutamente convergente porque la serie correspondiente de valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que es la serie armónica (serie p con $p = 1$) y, por tanto, es divergente. ■

2 Definición Una serie Σa_n se llama **condicionalmente convergente** si es convergente pero no absolutamente convergente.

En el ejemplo 2 se muestra que la serie armónica alternante es condicionalmente convergente. Por lo que es posible que una serie sea convergente, pero no absolutamente convergente. Sin embargo, el teorema siguiente muestra que la convergencia absoluta implica convergencia.

3 Teorema Si una serie Σa_n es absolutamente convergente, entonces es convergente.

DEMOSTRACIÓN Observe que la desigualdad

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

es cierta porque $|a_n|$ es a_n o $-a_n$. Si Σa_n es absolutamente convergente, entonces $\Sigma|a_n|$ es convergente, así que $\Sigma 2|a_n|$ es convergente. Por tanto, por la prueba de la comparación, $\Sigma(a_n + |a_n|)$ es convergente. Entonces

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

es la diferencia de dos series convergentes y, por tanto, convergente. ■

EJEMPLO 3 Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Esta serie tiene términos tanto positivos como negativos, pero no es alternante. (El primer término es positivo, los tres siguientes son negativos, y los otros tres que siguen son positivos: los signos no siguen un patrón regular.) Se puede aplicar la prueba de comparación a la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Ya que $|\cos n| \leqslant 1$ para toda n, se tiene

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Se sabe que $\Sigma 1/n^2$ es convergente (serie p con $p = 2$) y, por tanto, $\Sigma|\cos n|/n^2$ es convergente por la prueba por comparación. De esta manera, la serie dada $\Sigma(\cos n)/n^2$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente de acuerdo con el teorema 3. ■

En la figura 1 se ilustran las gráficas de los términos a_n y las sumas parciales s_n de la serie del ejemplo 3. Observe que la serie no es alternante, pero tiene términos positivos y negativos.

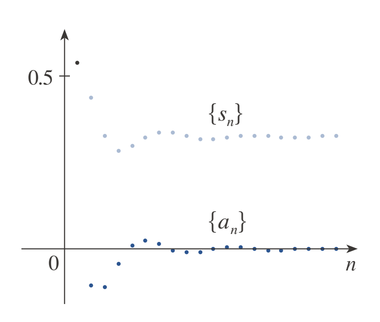


FIGURA 1

La prueba siguiente es muy útil para determinar si una cierta serie es absolutamente convergente.

Prueba de la razón

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, la prueba de la razón no es concluyente; es decir, no se puede sacar conclusión alguna con respecto a la convergencia o a la divergencia de Σa_n.

DEMOSTRACIÓN

(i) La idea es comparar la serie dada con una serie geométrica convergente. Ya que $L < 1$, se puede elegir un número r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad \text{y} \qquad L < r$$

el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será menor que r; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{siempre que } n \geqslant N$$

o equivalentemente

4 $$|a_{n+1}| < |a_n| r \qquad \text{siempre que } n \geqslant N$$

Al hacer n sucesivamente igual a N, $N + 1$, $N + 2$,... en (4), se obtiene

$$|a_{N+1}| < |a_N| r$$
$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}| r < |a_N| r^2$$
$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}| r < |a_N| r^3$$

y, en general,

5 $$|a_{N+k}| < |a_N| r^k \qquad \text{para toda } k \geqslant 1$$

Ahora la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + |a_N| r^3 + \cdots$$

es convergente porque es una serie geométrica con $0 < r < 1$. Por lo que la desigualdad (5) junto con la prueba de la comparación demuestra que la serie

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

también es convergente. Se infiere que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. (Recuerde que una cantidad finita de términos no afecta la convergencia.) Por tanto, $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

(ii) Si $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$ o $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, entonces la razón $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será mayor que 1; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{mientras que } n \geqslant N$$

Esto significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ siempre que $n \geqslant N$ y de este modo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Por lo tanto, $\sum a_n$ es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia. ■

NOTA El inciso (iii) de la prueba de la razón establece que si $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = 1$, la prueba no proporciona información. Por ejemplo, en cuanto a la serie convergente $\sum 1/n^2$ se tiene

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

mientras que para la serie divergente $\sum 1/n$ se tiene

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

La prueba de la razón por lo general no es concluyente si el n-ésimo término de la serie contiene una exponencial o factorial, como se verá en los ejemplos 4 y 5.

Por tanto, si $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|$, la serie $\sum a_n$ podría ser convergente o divergente. En este caso, la prueba de la razón no funciona, por lo que se debe aplicar otra prueba.

EJEMPLO 4 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ es absolutamente convergente.

SOLUCIÓN Aplique la prueba de la razón con $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Por lo que, por la prueba de la razón, la serie dada es absolutamente convergente y, en consecuencia, convergente. ■

Estimación de sumas
En las tres últimas secciones se usaron varios métodos para estimar la suma de una serie, y el método depende de cuál prueba se usaba para demostrar la convergencia. ¿Qué sucede con las series para las cuales sí funciona la prueba de la razón? Hay dos posibilidades: si la serie es alternante, como en el ejemplo 4, entonces es mejor aplicar los métodos de la sección 11.5. Si todos los términos son positivos, entonces se aplican los métodos especiales que se explican en el ejercicio 46.

EJEMPLO 5 Pruebe la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

SOLUCIÓN Ya que los términos $a_n = n^n/n!$ son positivos, no se necesitan los signos del valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

(Véase ecuación 3.6.6.) Ya que $e > 1$, la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la razón. ■

NOTA Aunque la prueba de la razón funciona en el ejemplo 5, un método más fácil es usar la prueba de la divergencia. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

se deduce que a_n no tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia.

Es conveniente aplicar la prueba siguiente cuando hay potencias n-ésimas. Su demostración es similar a la de la prueba de la razón y se deja para el ejercicio 49.

Prueba de la raíz

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.

Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, entonces el inciso (iii) de la prueba de la raíz establece que la prueba no proporciona información. La serie Σa_n podría ser convergente o divergente. (Si $L = 1$ en la prueba de la razón, no intente con la prueba de la raíz porque L será otra vez 1. Y si $L = 1$ en la prueba de la raíz, no intente la prueba de la razón porque también fallará.)

EJEMPLO 6 Pruebe la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUCIÓN

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{3 + \dfrac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Por lo que la serie dada converge de acuerdo con la prueba de la raíz. ■

Reordenamientos

La pregunta de si una serie dada que es convergente es absolutamente convergente o condicionalmente convergente, tiene relación con la pregunta de si las sumas infinitas se comportan como las sumas finitas.

Por supuesto, si se reordenan los términos en una suma finita, entonces el valor de la suma no cambia. Pero esto no siempre sucede en las series infinitas. El **reordenamiento** de una serie infinita Σa_n significa una serie obtenida simplemente al cambiar el orden de los términos. Por ejemplo, un reordenamiento de Σa_n podría empezar como sigue:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Resulta que

si Σa_n es una serie absolutamente convergente con suma s, entonces cualquier reordenamiento de Σa_n tiene la misma suma s.

Sin embargo, cualquier serie condicionalmente convergente se puede reordenar para dar una suma distinta. Para ilustrar este hecho considere la serie armónica alternante

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2 \tag{6}$$

(Véase ejercicio 11.5.36.) Si se multiplica la serie por $\frac{1}{2}$, se obtiene

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Si se insertan ceros entre los términos de esta serie, se tiene

$$0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2 \tag{7}$$

Sumar ceros no afecta la suma de la serie; cada uno de los términos de la sucesión de sumas parciales se repite, pero el límite es el mismo.

Ahora se suma la serie de las ecuaciones 6 y 7 usando el teorema 11.2.8:

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2 \tag{8}$$

Observe que la serie en (8) consta de los mismos términos que en (6), pero reordenados para que haya un término negativo después de cada par de términos positivos. Pero las sumas de estas series son diferentes. De hecho, Riemann demostró que

si Σa_n es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, entonces hay un reordenamiento de Σa_n que tiene una suma igual a r.

Una demostración de este hecho se plantea en el ejercicio 52.

11.6 EJERCICIOS

1. ¿Qué puede decir acerca de la serie Σa_n en cada uno de los casos siguientes?

(a) $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.8$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2-6 Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+1}$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$



5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

7-24 Utilice la prueba de la razón para determinar si la serie es convergente o divergente.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n n^3}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi^n}{(-3)^{n-1}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(-10)^{n+1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}100^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

21. $\displaystyle 1 - \frac{2!}{1 \cdot 3} + \frac{3!}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{4!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} + \cdots$

22. $\displaystyle \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

25-30 Utilice la prueba de la raíz para determinar si la serie es convergente o divergente.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\arctan n)^n$

31-38 Utilice cualquier prueba para determinar si la serie es convergente o divergente.

31. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{2+3n}\right)^n$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9)^n}{n10^{n+1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^{2n}}{10^{n+1}}$

35. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/6)}{1+n\sqrt{n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

38. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

39. Los términos de una serie se definen en forma recursiva con las ecuaciones

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$$

Determine si Σa_n es convergente o divergente.

40. Una serie Σa_n está definida por las ecuaciones

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine si Σa_n converge o diverge.

41-42 Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números positivos que converge a $\frac{1}{2}$. Determine si la serie dada es absolutamente convergente.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^n \cos n\pi}{n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n b_1 b_2 b_3 \cdots b_n}$

43. ¿Para cuáles de las series siguientes la prueba de la razón no es concluyente (es decir, no proporciona una respuesta definitiva)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

44. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

45. (a) Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para toda x.
(b) Deduzca que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para toda x.

46. Sea Σa_n una serie con términos positivos y sea $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, por lo que Σa_n es convergente de acuerdo con la prueba de la razón. Como es lo usual, sea R_n el residuo después de n términos, es decir,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Si $\{r_n\}$ es una sucesión decreciente y $r_{n+1} < 1$, demuestre con la suma de una serie geométrica que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(b) Si $\{r_n\}$ es una sucesión creciente, demuestre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

47. (a) Calcule la suma parcial s_5 de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n2^n)$. Con ayuda del ejercicio 46 estime el error al usar s_5 como una aproximación a la suma de la serie.
(b) Determine un valor de n de tal modo que s_n difiera menos que 0.00005 de la suma real. Use este valor de n para obtener un valor aproximado de la suma de la serie.

48. Use la suma de los primeros 10 términos para obtener un valor aproximado de la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Utilice el ejercicio 46 para estimar el error.

49. Demuestre la prueba de la raíz. [*Sugerencia para inciso (i)*: tome cualquier número r tal que $L < r < 1$ y utilice el hecho de que hay un entero N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ siempre que $n \geqslant N$.]

50. Hacia 1910, Srinivasa Ramanujan, matemático de India, descubrió la fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper utilizó esta serie en 1985 para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π.
(a) Verifique que la serie es convergente.
(b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π obtiene el lector si usa solo el primer término de la serie? ¿Qué pasa si usa dos términos?

51. Dada cualquier serie Σa_n, se define una serie Σa_n^+ cuyos términos son todos los positivos de Σa_n y una serie Σa_n^- cuyos términos son todos los negativos de Σa_n. Para ser específicos, sea

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Observe que si $a_n > 0$, entonces $a_n^+ = a_n$ y $a_n^- = 0$, mientras que si $a_n < 0$, entonces $a_n^- = a_n$ y $a_n^+ = 0$.
(a) Si Σa_n es absolutamente convergente, demuestre que tanto la serie Σa_n^+ como la serie Σa_n^- son convergentes.
(b) Si Σa_n es condicionalmente convergente, demuestre que tanto la serie Σa_n^+ como la serie Σa_n^- son divergentes.

52. Demuestre que si Σa_n es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, entonces hay un reordenamiento de Σa_n cuya suma es r. [*Sugerencia*: utilice la notación del ejercicio 51. Tome solo suficientes términos positivos a_n^+ para que su suma sea mayor que r. Luego sume solo suficientes términos negativos a_n^- para que la suma acumulativa sea menor que r. Continúe así y aplique el teorema 11.2.6.]

53. Suponga que la serie Σa_n es condicionalmente convergente.
(a) Demuestre que la serie $\Sigma n^2 a_n$ es divergente.
(b) La convergencia condicional de Σa_n no es suficiente para determinar si $\Sigma n a_n$ es convergente. Demuestre esto con un ejemplo de una serie condicionalmente convergente tal que $\Sigma n a_n$ converge y un ejemplo donde $\Sigma n a_n$ diverge.

11.7 Estrategia para probar series

Ya se tienen varias maneras de probar la convergencia o divergencia de una serie; ahora el problema es decidir cuál prueba aplicar en cada serie. En este aspecto, probar series es parecido a integrar funciones. No hay reglas rígidas y rápidas con respecto a qué prueba aplicar a una serie dada, pero puede seguir las recomendaciones siguientes, que pueden ser útiles.

No es prudente aplicar una lista de pruebas en un orden específico hasta que una funcione. Eso sería un desperdicio de tiempo y esfuerzo. En lugar de eso, al igual que en la integración, la estrategia principal es clasificar las series de acuerdo con su *forma*.

1. Si la serie es de la forma $\Sigma 1/n^p$, es una serie p, lo cual significa que es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.
2. Si la serie es de la forma Σar^{n-1} o Σar^n, es una serie geométrica que converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geqslant 1$. Se podrían requerir algunas operaciones algebraicas para hacer que la serie adquiera esta forma.
3. Si la serie tiene una forma similar a la de una serie p o a una serie geométrica, entonces se debe considerar una de las pruebas por comparación. En particular, si a_n es una función racional o una función algebraica de n (es decir, que contiene raíces de polinomiales), entonces la serie se debe comparar contra una serie p. Observe que la mayoría de las series de los ejercicios 11.4 tienen esta forma. (El valor de p se debe escoger como en la sección 11.4, y conservar solo las potencias más altas de n en el numerador y en el denominador.) Las pruebas por comparación se aplican solo en series con términos positivos, pero si Σa_n tiene algunos términos negativos, entonces se puede aplicar la prueba por comparación a $\Sigma |a_n|$ y probar si hay convergencia absoluta.

4. Si es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces se debe aplicar la prueba de la divergencia.
5. Si la serie es de la forma $\Sigma(-1)^{n-1}b_n$ o $\Sigma(-1)^n b_n$, entonces una posibilidad obvia es la prueba de la serie alternante.
6. Las series que contienen factoriales u otros productos (incluso una constante elevada a una potencia n-ésima) se prueban en forma aceptable usando la prueba de la razón. Siempre piense que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ cuando $n \to \infty$ para todas las series p y, por tanto, todas las funciones racionales o algebraicas de n. Así la prueba de la raíz no se debe aplicar para dichas series.
7. Si a_n es de la forma $(b_n)^n$, entonces la prueba de la raíz podría ser útil.
8. Si $a_n = f(n)$, donde $\int_1^\infty f(x)\,dx$ se puede evaluar con facilidad, entonces la prueba de la integral es efectiva (suponiendo que la hipótesis de esta prueba se cumple).

En los ejemplos siguientes no se presenta todo el desarrollo, sino que simplemente se indica qué prueba se debe usar.

EJEMPLO 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Ya que $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ cuando $n \to \infty$, se debe usar la prueba de la divergencia. ■

EJEMPLO 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n es una función algebraica de n, compare la serie dada con la serie p. La serie de comparación para la prueba de comparación en el límite es Σb_n, donde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$ ■

EJEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Ya que la integral $\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$ se evalúa con facilidad, use la prueba de la integral. La prueba de la razón también funciona. ■

EJEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como la serie es alternante, aplique la prueba de la serie alternante. ■

EJEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como la serie contiene $k!$, se aplica la prueba de la razón. ■

EJEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

La serie está estrechamente relacionada con la serie geométrica $\Sigma 1/3^n$, por lo que se usa la prueba por comparación. ■

11.7 EJERCICIOS

1-38 Pruebe si las series son convergentes o divergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^3 + 1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + n)^{3n}}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{4^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n + 1)^n}{n^{2n}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n}\right)$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k + 2)!}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{1 + 2^n}$

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} 3^{k+1}}{k^k}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 1}}{n^3 + n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n - 1)}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k} - 1}{k(\sqrt{k} + 1)}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(1/n^2)$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^3 + 2n^2 + 5}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k + 1)^3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$

30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j + 5}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k + 4^k}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n^2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n\cos^2 n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$

11.8 Series de potencias

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

donde x es una variable y las c_n son constantes llamados **coeficientes** de la serie. Para cada x fija, la serie (1) es una serie de constantes que se puede probar para ver si es convergente o divergente. Una serie de potencias podría ser convergente para algunos valores de x y ser divergente para otros. La suma de la serie es una función

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cuyo dominio es el conjunto de todas las x para las cuales la serie converge. Observe que f es parecida a un polinomio. La única diferencia es que f tiene un infinito de términos.

Por ejemplo, si toma $c_n = 1$ para toda n, la serie de potencias se transforma en una serie geométrica

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que es convergente cuando $-1 < x < 1$ y es divergente cuando $|x| \geqslant 1$. (Véase la ecuación 11.2.5.)

Series trigonométricas

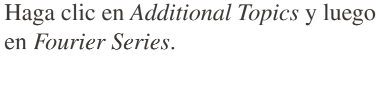
Una serie de potencias es una en la cual cada uno de los términos es una función potencia. Una **serie trigonométrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

es una serie cuyos términos son funciones trigonométricas. Este tipo de serie se analiza en el sitio web

www.stewartcalculus.com

Haga clic en *Additional Topics* y luego en *Fourier Series*.



De hecho, si se sustituye $x = \frac{1}{2}$ en la serie geométrica (2) se obtiene la serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

pero si se sustituye $x = 2$ en (2) se obtiene la serie divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

Más general, una serie de la forma

3 $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots$$

se denomina **serie de potencias** en $(\boldsymbol{x - a})$ o una **serie de potencias centrada en $\boldsymbol{a}$** o una **serie de potencias en torno a $\boldsymbol{a}$**. Observe que al escribir el término correspondiente a $n = 0$ en las ecuaciones 1 y 3 se ha adoptado la convención de que $(x - a)^0 = 1$ aun cuando $x = a$. También observe que cuando $x = a$ todos los términos son 0 para $n \geqslant 1$ y de este modo la serie de potencias (3) siempre es convergente cuando $x = a$.

EJEMPLO 1 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ es convergente?

SOLUCIÓN Se utiliza la prueba de la razón. Sea a_n, como se acostumbra, el n-ésimo término de la serie, entonces $a_n = n!\, x^n$. Si $x \neq 0$, se tiene

Observe que
$(n + 1)! = (n + 1)n(n - 1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$= (n + 1)n!$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n + 1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n + 1)|x| = \infty$$

Por la prueba de la razón, la serie es divergente cuando $x \neq 0$. Por lo que la serie dada converge solo cuando $x = 0$. ■

EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{n}$ es convergente?

SOLUCIÓN Sea $a_n = (x - 3)^n/n$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x - 3)^{n+1}}{n + 1} \cdot \frac{n}{(x - 3)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}|x - 3| \to |x - 3| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

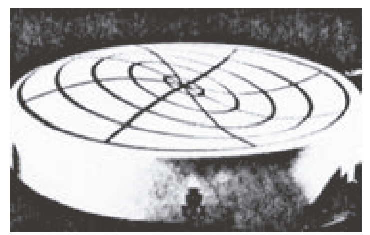
De acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada es absolutamente convergente y, por tanto, convergente cuando $|x - 3| < 1$ y divergente cuando $|x - 3| > 1$. Ahora

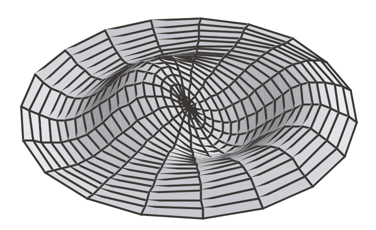
$$|x - 3| < 1 \iff -1 < x - 3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

por lo que la serie converge cuando $2 < x < 4$ y diverge cuando $x < 2$ o $x > 4$.

La prueba de la razón no proporciona información cuando $|x - 3| = 1$ por lo que se debe considerar $x = 2$ y $x = 4$ por separado. Si se sustituye $x = 4$ en la serie, resulta $\Sigma 1/n$, la serie armónica, que es divergente. Si $x = 2$, la serie es $\Sigma(-1)^n/n$, que es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por tanto, la serie de potencias dada converge para $2 \leqslant x < 4$. ■







Observe cómo la aproximación del modelo generado por computadora (el cual utiliza funciones de Bessel y de cosenos) coincide con la fotografía de una membrana vibratoria de hule.

Se verá que el uso principal de las series de potencias es proporcionar una manera de representar algunas de las funciones más importantes que surgen en matemáticas, física y química. En particular, la suma de la serie de potencias del ejemplo siguiente se llama **función de Bessel**, en honor al astrónomo alemán Friedrich Bessel (1784-1846), y la función dada en el ejercicio 35 es otro ejemplo de la función de Bessel. En efecto, estas surgieron primero cuando Bessel resolvió la ecuación de Kepler para describir el movimiento de los planetas. Desde esa época, estas funciones se aplican en diversas situaciones físicas, entre ellas la distribución de temperaturas en una lámina circular y las vibraciones de la membrana de un tambor.

EJEMPLO 3 Determine el dominio de la función de Bessel de orden 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{para toda } x$$

De este modo, de acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge para todos los valores de x. En otras palabras, el dominio de la función de Bessel J_0 es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. ■

Recuerde que la suma de una serie es igual al límite de la sucesión de las sumas parciales. De esa manera, cuando se define la función de Bessel del ejemplo 3 como la suma de una serie significa que, para todo número real x,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{donde} \qquad s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

Las primeras sumas parciales son

$$s_0(x) = 1$$

$$s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304}$$

$$s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147{,}456}$$

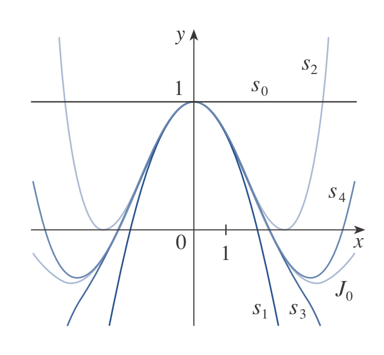


FIGURA 1
Sumas parciales de la función de Bessel J_0

En la figura 1 se muestran las gráficas de estas sumas parciales, las cuales son funciones polinomiales. Todas son aproximaciones de la función J_0, pero observe que la aproximación es mejor cuando se incluyen más términos. En la figura 2 se ilustra una gráfica más completa de la función de Bessel.

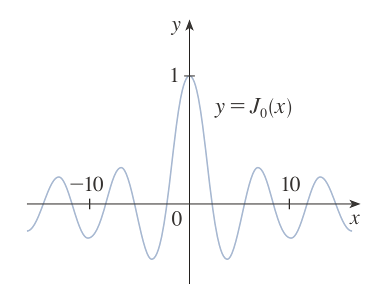


FIGURA 2

Para las series de potencias examinadas hasta el momento, el conjunto de valores de x para los cuales las series convergen ha resultado ser siempre un intervalo [un intervalo finito de la serie geométrica y la serie del ejemplo 2, el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ del ejemplo 3, y un intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ del ejemplo 1]. El teorema siguiente, que se demuestra en el apéndice F, establece que esto es válido en general.

4 Teorema Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ hay solo tres posibilidades:

(i) La serie converge solo cuando $x = a$.

(ii) La serie converge para toda x.

(iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$.

El número R en el caso (iii) se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R = 0$ en el caso (i) y $R = \infty$ en el caso (ii). El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es el intervalo que consiste en todos los valores de x para los cuales la serie converge. En el caso (i) el intervalo consta de un solo punto a. En el caso (ii) el intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que en el caso (iii) la desigualdad $|x-a| < R$ se puede escribir de nuevo como $a - R < x < a + R$. Cuando x es un *punto final* del intervalo, es decir, $x = a \pm R$, cualquier cosa puede suceder: la serie podría ser convergente en uno o en ambos extremos, o podría ser divergente en ambos extremos. Por tanto, en el caso (iii) hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia:

$$(a-R, a+R) \qquad (a-R, a+R] \qquad [a-R, a+R) \qquad [a-R, a+R]$$

La situación se ilustra en la figura 3.

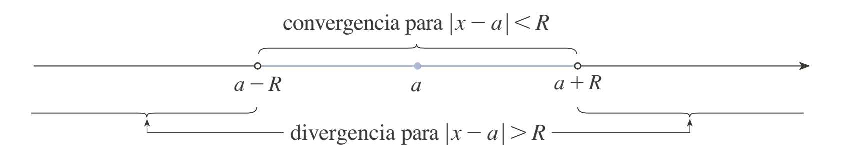


FIGURA 3

Aquí se resume el radio y el intervalo de convergencia para cada uno de los ejemplos considerados en esta sección.

	Series	Radio de convergencia	Intervalo de convergencia
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1,1)$
Ejemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Ejemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2,4)$
Ejemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

En general, la prueba de la razón (o a veces, la prueba de la raíz) se debe usar para determinar el radio de convergencia R. Las pruebas de la razón y la raíz siempre fracasan cuando x es un extremo del intervalo de convergencia, por lo que es necesario verificar los puntos finales por medio de alguna otra prueba.

EJEMPLO 4 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-3)^n x^n/\sqrt{n+1}$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}\,|x| \to 3|x| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge si $3|x| < 1$ y es divergente si $3|x| > 1$. Por lo que es convergente si $|x| < \frac{1}{3}$ y divergente si $|x| > \frac{1}{3}$. Esto significa que el radio de convergencia es $R = \frac{1}{3}$.

Se sabe que la serie converge en el intervalo $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, pero ahora es necesario probar si hay convergencia en los extremos de este intervalo. Si $x = -\frac{1}{3}$, la serie se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

que es divergente. (Utilice la prueba de la integral o simplemente observe que es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$.) Si $x = \frac{1}{3}$ la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que converge de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por tanto, la serie de potencias dada converge cuando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$ por lo que el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. ■

EJEMPLO 5 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUCIÓN Si $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Al usar la prueba de la razón se ve que la serie es convergente si $|x+2|/3 < 1$ y que es divergente si $|x+2|/3 > 1$. Por lo que es convergente si $|x+2| < 3$ y divergente si $|x+2| > 3$. Así que, el radio de convergencia es $R = 3$.

La desigualdad $|x + 2| < 3$ se puede escribir como $-5 < x < 1$, así que se prueba la serie en los puntos finales -5 y 1. Cuando $x = -5$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

que es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia [$(-1)^n n$ no converge a 0]. Cuando $x = 1$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

que también es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia. Por esto, la serie converge solo cuando $-5 < x < 1$, por lo que el intervalo de convergencia es $(-5, 1)$. ■

11.8 EJERCICIOS

1. ¿Qué es una serie de potencias?

2. (a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencia? ¿Cómo se determina?
(b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se calcula?

3-28 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n - 1}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n + 1}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4 4^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^2 x^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{\sqrt{n}} x^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 5^n} x^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n^2 + 1)} x^n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{n^2 + 1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n - 1)2^n} (x - 1)^n$

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x + 2)^n}{2^n \ln n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{8^n} (x + 6)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x + 4)^n}{\sqrt{n}}$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x - a)^n, \quad b > 0$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n} (x - a)^n, \quad b > 0$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x - 1)^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x - 4)^n}{n^3}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}$

29. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ es convergente, ¿se concluye que las series siguientes son convergentes?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

30. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de la serie siguiente?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

31. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Sean p y q números reales con $p < q$. Encuentre una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea
(a) (p, q) (b) $(p, q]$ (c) $[p, q)$ (d) $[p, q]$

33. ¿Es posible encontrar una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea $[0, \infty)$? Explique.

34. Trace la gráfica de las primeras sumas parciales $s_n(x)$ de la serie, $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, junto con la función suma $f(x) = 1/(1 - x)$ sobre una misma pantalla. ¿Sobre qué intervalo parece que convergen estas sumas parciales a $f(x)$?

35. La función J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

Se llama la *función de Bessel de orden 1*.
(a) Determine su dominio.
(b) Trace la gráfica de las primeras sumas parciales en una pantalla común.
SAC (c) Si su SAC tiene incorporadas las funciones de Bessel, trace la gráfica de J_1 en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso (b) y observe cómo se aproximan las sumas parciales a J_1.

36. La función A se define mediante por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

que se llama *función de Airy* en honor al matemático y astrónomo inglés sir George Airy (1801-1892).
(a) Determine el dominio de la función de Airy.
(b) Grafique las primeras sumas parciales en una misma pantalla.
SAC (c) Si su SAC tiene incorporadas las funciones de Airy, trace la gráfica de A en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso (b) y observe cómo las sumas parciales se aproximan a A.

37. Una función f está definida mediante

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

es decir, sus coeficientes son $c_{2n} = 1$ y $c_{2n+1} = 2$ para toda $n \geqslant 0$. Determine el intervalo de convergencia de la serie y plantee una fórmula explícita para $f(x)$.

38. Si $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ donde $c_{n+4} = c_n$ para toda $n \geqslant 0$, determine el intervalo de convergencia de la serie y una fórmula para $f(x)$.

39. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$, donde $c \neq 0$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma c_n x^n$ es $R = 1/c$.

40. Suponga que la serie de potencias $\Sigma c_n (x - a)^n$ satisface $c_n \neq 0$ para toda n. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} |c_n / c_{n+1}|$ existe, entonces es igual al radio de convergencia de la serie de potencias.

41. Suponga que el radio de convergencia de la serie $\Sigma c_n x^n$ es 2 y que el radio de convergencia de la serie $\Sigma d_n x^n$ es 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\Sigma(c_n + d_n)x^n$?

42. Suponga que el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma c_n x^n$ es R. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma c_n x^{2n}$?

11.9 Representación de funciones como series de potencias

En esta sección aprenderá a representar ciertos tipos de funciones como sumas de series de potencias mediante la manipulación de series geométricas, mediante derivación o integración de dichas series. Quizá se pregunte por qué quisiera expresar una función conocida como una suma de una cantidad infinita de términos. Más adelante se explica la utilidad de esta estrategia en la integración de funciones que no tienen antiderivadas elementales, en la solución de ecuaciones diferenciales y para aproximar funciones mediante polinomios. (Los científicos lo hacen para simplificar las expresiones con las que trabajan; los especialistas en computación lo hacen para representar funciones en calculadoras y computadoras.)

Se empezará con una ecuación que ya se estudió antes:

1
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Ya se mostró esta ecuación en el ejemplo 11.2.7, donde se obtuvo al observar que es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Pero en este caso el punto de vista es distinto. Ahora considere la ecuación 1 como expresión de la función $f(x) = 1/(1 - x)$ como una suma de una serie de potencias.

Una ilustración geométrica de la ecuación 1 se muestra en la figura 1. Como la suma de una serie es el límite de la sucesión de las sumas parciales, se tiene

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

donde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

es la n-ésima suma parcial. Observe que cuando n aumenta, $s_n(x)$ será una mejor aproximación a $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

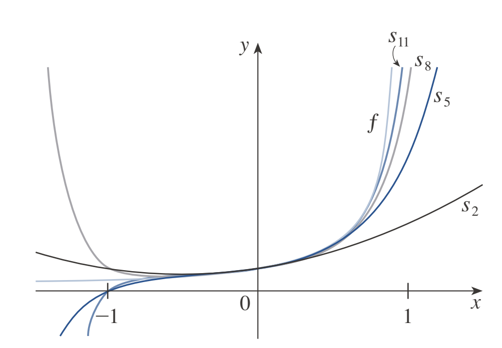


FIGURA 1 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ y algunas sumas parciales

EJEMPLO 1 Exprese $1/(1 + x^2)$ como la suma de una serie de potencias y determine el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN Al reemplazar x por $-x^2$ en la ecuación 1, se tiene

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como esta es una serie geométrica, es convergente cuando $|-x^2| < 1$, es decir, $x^2 < 1$, o $|x| < 1$. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. (Por supuesto, se podría haber determinado el radio de convergencia aplicando la prueba de la razón, pero esa cantidad de trabajo es innecesaria en este caso.) ■

EJEMPLO 2 Determine una representación en serie de potencias para $1/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Con objeto de poner esta función en la forma del lado izquierdo de la ecuación 1, primero se factoriza un 2 del denominador:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

Esta serie converge cuando $|-x/2| < 1$, es decir, $|x| < 2$. Por lo que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. ■

EJEMPLO 3 Obtenga una representación como serie de potencias de $x^3/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Ya que esta función es justamente x^3 veces la función del ejemplo 2, todo lo que debe hacer es multiplicar esa serie por x^3:

Es válido pasar x^3 al otro lado del signo de la suma porque no depende de n. [Aplique el teorema 11.2.8(i) con $c = x^3$.]

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Otra forma de escribir esta serie es como sigue:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$$

Como en el ejemplo 2, el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. ■

■ Derivación e integración de series de potencias

La suma de una serie de potencias es una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Para derivar e integrar estas funciones, el teorema siguiente (el cual no será demostrado) establece que es posible derivar o integrar cada uno de los términos de la serie, justo como se haría para un polinomio. Esto se denomina **derivación e integración término a término**.

2 Teorema Si la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ tiene un radio de convergencia $R > 0$, entonces la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es derivable (y, por tanto, continua) sobre el intervalo $(a-R, a+R)$ y

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Los radios de convergencia de la serie de potencias en las ecuaciones (i) y (ii) son R.

En el inciso (ii), $\int c_0 dx = c_0 x + C_1$ se escribe como $c_0(x-a) + C$, donde $C = C_1 + ac_0$, por lo que todos los términos de la serie tienen la misma forma.

NOTA 1 Las ecuaciones (i) y (ii) del teorema 2 se pueden volver a escribir en la forma

(iii) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

(iv) $$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\,dx$$

Se sabe que para sumas finitas la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la integral de una suma es la suma de las integrales. Las ecuaciones (iii) y (iv) aseguran que lo mismo se cumple para sumas infinitas, siempre que se esté tratando con *series de potencias*. (Para otros tipos de series de funciones la situación no es tan simple; véase el ejercicio 38.)

NOTA 2 Aunque el teorema 2 establece que el radio de convergencia es el mismo cuando una serie de potencias es derivada o integrada, esto no quiere decir que el *intervalo* de convergencia siga siendo el mismo. Podría suceder que la serie original converja en el punto final, y que la serie derivada sea divergente ahí. (Véase el ejercicio 39.)

NOTA 3 La idea de derivar una serie de potencias término a término es la base de un método eficaz para resolver ecuaciones diferenciales. Se estudiará este método en el capítulo 17.

EJEMPLO 4 En el ejemplo 11.8.3 se vio que la función de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

se define para toda x. De esta manera, de acuerdo con el teorema 2, J_0 es derivable para toda x y su derivada se encuentra derivando término a término como sigue:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$ ■

EJEMPLO 5 Exprese $1/(1 - x)^2$ como una serie de potencias derivando la ecuación 1. ¿Cuál es el radio de convergencia?

SOLUCIÓN Al derivar cada miembro de la ecuación

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se obtiene
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Si se quisiera se podría reemplazar n por $n + 1$ y escribir la respuesta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

De acuerdo con el teorema 2, el radio de convergencia de la serie derivada es el mismo que el radio de convergencia de la serie original, $R = 1$. ■

EJEMPLO 6 Determine una representación como serie de potencias para $\ln(1 + x)$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Observe que la derivada de esta función es $1/(1 + x)$. De la ecuación 1 se tiene

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad |x| < 1$$

Integrando ambos lados de esta expresión, se obtiene

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)\,dx \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1 \end{aligned}$$

Para determinar el valor de C se hace $x = 0$ en esta ecuación y se obtiene $\ln(1 + 0) = C$.

Por tanto, $C = 0$ y

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

El radio de convergencia es el mismo que el de la serie original: $R = 1$. ■

EJEMPLO 7 Encuentre una representación como serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1}x$.

SOLUCIÓN Observe que $f'(x) = 1/(1+x^2)$ y encuentre la serie requerida integrando la serie de potencias para $1/(1+x^2)$ determinada en el ejemplo 1.

$$\tan^{-1}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

La serie de potencias para $\tan^{-1}x$ obtenida en el ejemplo 7 se llama *serie de Gregory* en honor al matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien pronosticó algunos de los descubrimientos de Newton. Ya se demostró que la serie de Gregory es válida cuando $-1 < x < 1$, pero resulta que (aunque no es fácil de demostrar) también es válida cuando $x = \pm 1$. Observe que cuando $x = 1$ la serie se convierte en

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Este hermoso resultado se conoce como la fórmula de Leibniz para π.

Para determinar C se hace $x = 0$ y se obtiene $C = \tan^{-1} 0 = 0$. Por tanto,

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Ya que el radio de convergencia de la serie para $1/(1+x^2)$ es 1, el radio de convergencia de esta serie para $\tan^{-1}x$ es también 1. ■

EJEMPLO 8

(a) Evalúe $\int [1/(1+x^7)]\,dx$ como una serie de potencias.

(b) Utilice el inciso *a*) para una aproximación de $\int_0^{0.5} [1/(1+x^7)]$ con una aproximación de 10^{-7} del valor real.

SOLUCIÓN

(a) El primer paso es expresar el integrando, $1/(1+x^7)$ como la suma de una serie de potencias. Como en el ejemplo 1, inicie con la ecuación 1 y reemplace x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Este ejemplo muestra una manera en que las representaciones como series de potencias pueden ser útiles. Integrar $1/(1+x^7)$ a mano es increíblemente difícil. Diferentes sistemas algebraicos computacionales dan respuestas de distintas formas, pero son extremadamente complicadas. (Si tiene un SAC, inténtelo usted mismo.) La respuesta de la serie infinita que se obtiene en el ejemplo 8(a) es realmente mucho más fácil de manejar que la respuesta finita que proporciona un SAC.

Ahora se integra término a término:

$$\int \frac{1}{1+x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Esta serie converge para $|-x^7| < 1$, es decir, para $|x| < 1$.



(b) Si se aplica el teorema fundamental del cálculo no importa qué antiderivada se use, por lo que se utilizará la antiderivada del inciso (a) con $C = 0$:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Esta serie infinita es el valor exacto de la integral definida, pero como es una serie alternante, se puede obtener una aproximación de la suma aplicando el teorema de la estimación de la serie alternante. Si se deja de sumar después del término $n = 3$, el error es menor que el término con $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

Por lo que se tiene

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0.49951374$$

■

11.9 EJERCICIOS

1. Si e1 radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es 10, ¿cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$? ¿Por qué?

2. Suponga que sabe que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es convergente para $|x| < 2$. ¿Qué puede decir de la serie siguiente? ¿Por qué?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3-10 Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x+10}$

4. $f(x) = \dfrac{5}{1-4x^2}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

6. $f(x) = \dfrac{4}{2x+3}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+16}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

9. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

10. $f(x) = \dfrac{x+a}{x^2+a^2}, \quad a > 0$

11-12 Exprese la función como la suma de una serie de potencias usando primero fracciones parciales. Determine el intervalo de convergencia.

11. $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-4x+3}$

12. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$

13. (a) Use la derivación para determinar una representación como serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Utilice el inciso *a*) para determinar una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

(c) Utilice el inciso *b*) para determinar una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

14. (a) Utilice la ecuación 1 para determinar la representación en series de potencias para $f(x) = \ln(1-x)$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Utilice el inciso (a) para determinar una serie de potencias para $f(x) = x\ln(1-x)$.

(c) Haciendo $x = \frac{1}{2}$ en su resultado del inciso *a*), exprese ln 2 como la suma de una serie infinita.

15-20 Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el radio de convergencia.

15. $f(x) = \ln(5-x)$

16. $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x^3)$

17. $f(x) = \dfrac{x}{(1+4x)^2}$

18. $f(x) = \left(\dfrac{x}{2-x}\right)^3$

19. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

21-24 Encuentre una representación como serie de potencias para f, y trace la gráfica de f y varias sumas parciales $s_n(x)$ en la misma pantalla. ¿Qué sucede cuando n aumenta?

21. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

22. $f(x) = \ln(1 + x^4)$

23. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

24. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 16}$

25-28 Evalúe la integral indefinida como una serie de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia?

25. $\displaystyle\int \frac{t}{1 - t^8}\,dt$

26. $\displaystyle\int \frac{t}{1 + t^3}\,dt$

27. $\displaystyle\int x^2 \ln(1 + x)\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x}\,dx$

29-32 Use una serie de potencias para aproximar la integral definida con una aproximación de seis cifras decimales.

29. $\displaystyle\int_0^{0.3} \frac{x}{1 + x^3}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arctan(x/2)\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^{0.2} x\ln(1 + x^2)\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^{0.4} \ln(1 + x^4)\,dx$

33. Con el resultado del ejemplo 7, calcule arctan 0.2 con una aproximación de cinco cifras decimales.

34. Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

35. (a) Demuestre que J_0 (la función de Bessel de orden 0 dada en el ejemplo 4) cumple con la ecuación diferencial

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Evalúe $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ con una aproximación de tres cifras decimales.

36. La función de Bessel de orden 1 se define con

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(n + 1)!\,2^{2n+1}}$$

(a) Demuestre que J_1 satisface la ecuación diferencial

$$x^2 J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

37. (a) Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Demuestre que $f(x) = e^x$.

38. Sea $f_n(x) = (\text{sen}\, nx)/n^2$. Demuestre que la serie $\Sigma f_n(x)$ es convergente para todos los valores de x, pero la serie de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ es divergente cuando $x = 2n\pi$, n es un entero. ¿Para qué valores de x la serie $\Sigma f_n''(x)$ es convergente?

39. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Determine los intervalos de convergencia para f, f' y f''.

40. (a) Empezando con la serie geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Calcule la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, $|x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Determine la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)x^n$, $|x| < 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

41. Utilice la serie de potencias para $\tan^{-1}x$ para demostrar la expresión siguiente para π como la suma de una serie infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)3^n}$$

42. (a) Completando cuadrados demuestre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Al factorizar $x^3 + 1$ como una suma de cubos, escriba de nuevo la integral del inciso (a). Luego exprese $1/(x^3 + 1)$ como la suma de una serie de potencias y úsela para demostrar la fórmula siguiente para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n + 1} + \frac{1}{3n + 2} \right)$$

11.10 Series de Taylor y de Maclaurin

En la sección anterior se representaron como series de potencias una cierta clase restringida de funciones. En esta sección se tratan problemas más generales: ¿qué funciones se pueden representar como series de potencias? ¿Cómo es posible encontrar esa representación?

Se empieza por suponer que f es cualquier función que se puede representar mediante una serie de potencias

1 $$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + c_4(x - a)^4 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

Se tratará de determinar qué coeficientes c_n tienen que estar en función de f. Para empezar, observe que si se hace $x = a$ en la ecuación 1, entonces todos los términos después del primero son 0 y se obtiene

$$f(a) = c_0$$

De acuerdo con el teorema 11.9.2, se puede derivar la serie de la ecuación 1 término a término:

2 $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

y al sustituir $x = a$ en la ecuación 2 se tiene

$$f'(a) = c_1$$

En seguida se derivan ambos miembros de la ecuación 2 para obtener

3 $$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

Una vez más se hace $x = a$ en la ecuación 3. El resultado es

$$f''(a) = 2c_2$$

Se aplica el procedimiento una vez más. La derivación de la serie de la ecuación 3 da

4 $$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

y la sustitución de $x = a$ en la ecuación 4 da

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_2 = 3!c_3$$

Ahora ya se puede ver el patrón. Si se continúa derivando y sustituyendo $x = a$, se obtiene

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Al resolver esta ecuación para el n-ésimo coeficiente c_n, se tiene

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Esta fórmula sigue siendo válida incluso para $n = 0$ si se adopta la convención de que $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$. Con lo que se ha demostrado el teorema siguiente:

5 Teorema Si f se puede representar como una serie de potencias, (expansión) en a, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \qquad |x - a| < R$$

entonces sus coeficientes están dados por la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Si se sustituye esta fórmula para c_n de nuevo en la serie, se observa que, *si* f tiene un desarrollo en serie de potencias en a, entonces debe ser de la forma siguiente.

6
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

La serie de la ecuación 6 se denomina **serie de Taylor de la función f en a** (o **en torno a a** o **centrada en a**). Para el caso especial $a = 0$ la serie de Taylor se transforma en

7
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Este caso surge con bastante frecuencia, y se le da el nombre especial de **serie de Maclaurin**.

Taylor y Maclaurin

La serie de Taylor lleva este nombre en honor al matemático ingles Brook Taylor (1685-1731) y la serie de Maclaurin se llama así para recordar al matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746) a pesar del hecho de que la serie de Maclaurin es realmente un caso especial de la serie de Taylor. Pero la idea de representar funciones particulares como sumas de series de potencias se remonta a Newton, y el matemático escocés James Gregory conoció la serie general de Taylor en 1668 y el matemático suizo John Bernoulli por 1690. Al parecer, Taylor desconocía el trabajo de Gregory y el de Bernoulli cuando publicó sus descubrimientos relacionados con las series en 1715 en su libro *Methodus incrementorum directa et inversa*. Las series de Maclaurin se llaman así porque Colin Maclaurin las popularizó en su libro de texto *Treatise of Fluxions* que se publicó en 1742.

NOTA Ya se demostró que *si* f se puede representar como una serie de potencias con respecto a a, entonces f es igual a la suma de sus series de Taylor. Pero hay funciones que no son iguales a la suma de sus series de Taylor. Un ejemplo de tales funciones se presenta en el ejercicio 84.

EJEMPLO 1 Determine la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$, por lo que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para toda n. Por tanto, la serie de Taylor para f en 0 (es decir, la serie de Maclaurin) es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para determinar el radio de convergencia se hace $a_n = x^n/n!$ Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n + 1} \to 0 < 1$$

así que, por la prueba de la razón, la serie converge para toda x y el radio de convergencia es $R = \infty$. ■

La conclusión que se obtiene del teorema 5 y el ejemplo 1 es que *si* e^x tiene un desarrollo en serie en potencias en 0, entonces

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Entonces, ¿cómo se puede determinar si e^x *tiene* una representación como serie de potencias?

Se debe investigar la cuestión más general: ¿en qué circunstancias una función es igual a la suma de su serie de Taylor? En otras palabras, si f tiene derivadas de todos los órdenes, cuando es cierto que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Como sucede con cualquier serie convergente, esto quiere decir que $f(x)$ es el límite de la sucesión de sumas parciales. En el caso de la serie de Taylor, las sumas parciales son

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

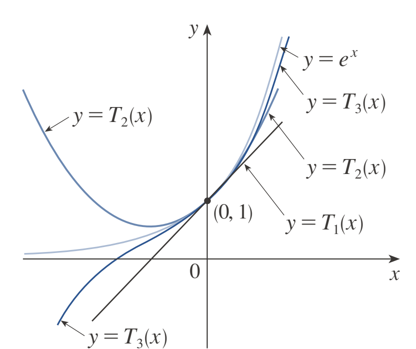


FIGURA 1
Cuando n crece, $T_n(x)$ parece aproximarse a e^x en la figura 1. Esto sugiere que e^x es igual a la suma de su serie de Taylor.

Observe que T_n es un polinomio de grado n llamado **polinomio de Taylor de grado *n*-ésimo de *f* en *a***. Por ejemplo, en el caso de la función exponencial $f(x) = e^x$, el resultado del ejemplo 1 muestra que los polinomios de Taylor en 0 (o polinomios de Maclaurin), con $n = 1$, 2 y 3 son

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Las gráficas de la función exponencial y estos tres polinomios de Taylor se ilustran en la figura 1.

En general, $f(x)$ es la suma de su serie de Taylor si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Si se hace

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de tal manera que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

entonces $R_n(x)$ se llama **residuo** de la serie de Taylor. Si se puede de alguna manera demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, entonces se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Por tanto, se ha demostrado el teorema siguiente.

8 Teorema Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ donde T_n es el polinomio de Taylor de grado n-ésimo de f en a y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$ entonces f es igual a la suma de su serie de Taylor en el intervalo $|x - a| < R$.

Al tratar de demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para una función específica f, se usa por lo regular el teorema siguiente.

9 Desigualdad de Taylor Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, entonces el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor cumple con la desigualdad

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad \text{para } |x-a| \leq d$$

Para ver por qué es cierto para $n = 1$, suponga que $|f''(x)| \leq M$. En particular, se tiene $f''(x) \leq M$, tal que para $a \leq x \leq a + d$ se tiene

$$\int_a^x f''(t)\,dt \leq \int_a^x M\,dt$$

Fórmulas para el residuo de Taylor
Otras opciones aparte de la desigualdad de Taylor son las fórmulas siguientes para el residuo. Si $f^{(n+1)}$ es continua sobre un intervalo I y $x \in I$, entonces

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Esta expresión recibe el nombre de *forma integral del término del residuo*. Otra fórmula, que se llama *forma de Lagrange del término del residuo*, establece que hay un número z entre x y a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Esta versión es una generalización del teorema del valor medio (que es el caso $n = 0$).
Las demostraciones de estas fórmulas, además del análisis de cómo usarlas para resolver los ejemplos de las secciones 11.10 y 11.11, se encuentran en la página web

www.stewartcalculus.com

Haga clic en *Additional Topics* y luego en *Formulas for the Remainder Term in Taylor series.*

Una antiderivada de f'' es f', por lo que de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo se tiene

$$f'(x) - f'(a) \leq M(x-a) \qquad \text{o} \qquad f'(x) \leq f'(a) + M(x-a)$$

Por lo que

$$\int_a^x f'(t)\,dt \leq \int_a^x [f'(a) + M(t-a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leq f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leq \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Pero $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Por lo que

$$R_1(x) \leq \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Un razonamiento similar, aplicando $f''(x) \geq -M$, demuestra que

$$R_1(x) \geq -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

De manera que

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2}|x-a|^2$$

Aunque se ha supuesto que $x > a$, cálculos similares muestran que esta desigualdad es válida también para $x < a$.

Esto demuestra la desigualdad de Taylor para el caso donde $n = 1$. El resultado para cualquier n se demuestra de manera parecida integrando $n + 1$ veces. (Véase el ejercicio 83 para el caso $n = 2$.)

NOTA En la sección 11.11 se explora el uso de la desigualdad de Taylor en la aproximación de funciones. El uso inmediato es junto con el teorema 8.

Con frecuencia, al aplicar los teoremas 8 y 9 es útil recurrir al hecho siguiente.

10

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Esto es verdadero porque, de acuerdo con el ejemplo 1, la serie $\Sigma x^n/n!$ es convergente para toda x por lo que su n-ésimo término se aproxima a 0.

EJEMPLO 2 Demuestre que e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para toda n. Si d es cualquier número positivo y $|x| \leqslant d$, entonces $|f^{(n+1)}(x)| = e^x < e^d$. Por lo que la desigualdad de Taylor, con $a = 0$ y $M = e^d$, dice que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Observe que la misma constante $M = e^d$ funciona para todo valor de n. Pero, de acuerdo con la ecuación 10, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Se deduce entonces del teorema de la compresión que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x. De acuerdo con el teorema 8, e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin, es decir,

11
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para toda } x$$
■

En particular, si se hace $x = 1$ en la ecuación 11, se obtiene la expresión siguiente para el número e como una suma de una serie infinita:

12
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

En 1748, Leonhard Euler aplicó la ecuación 12 para determinar el valor de e con 23 decimales. En 2010 Shigeru Kondo, usando de nuevo la serie (12), calculó e con más de un billón de decimales. Las técnicas especiales que utilizaron para acelerar el cálculo se explican en la página web

numbers.computation.free.fr

EJEMPLO 3 Determine la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ en $a = 2$.

SOLUCIÓN Se tiene $f^{(n)}(2) = e^2$ y, así, al hacer $a = 2$ en la definición de la serie de Taylor 6, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

También se puede verificar, como en el ejemplo 1, que el radio de convergencia es $R = \infty$. Como en el ejemplo 2 se puede comprobar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, por lo que

13
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{para toda } x$$
■

Hay dos desarrollos en series de potencias para e^x, la serie de Maclaurin de la ecuación 11 y la serie de Taylor de la ecuación 13. El primero es mejor si está interesado en valores de x cercanos a 0 y el segundo funciona muy bien si x es cercano a 2.



EJEMPLO 4 Determine la serie de Maclaurin para sen x y demuestre que representa a sen x para toda x.

SOLUCIÓN Se organizan los cálculos en dos columnas como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen } x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\text{sen } x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \text{sen } x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

En la figura 2 se ilustra la gráfica de sen x junto con su polinomio de Taylor (o de Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que cuando n aumenta, $T_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para sen x.

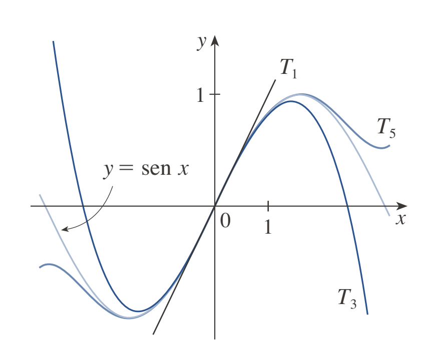


FIGURA 2

Ya que la derivada se repite en un ciclo de cuatro, se puede escribir la serie de Maclaurin como sigue:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ya que $f^{(n+1)}(x)$ es $\pm$ sen x o $\pm$ cos x, se sabe que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 1$ para toda x. De este modo se puede tomar $M = 1$ en la desigualdad de Taylor:

14 $$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

De acuerdo con la ecuación 10, el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $n \to \infty$, por lo que $|R_n(x)| \to 0$ de acuerdo con el teorema de compresión. Se tiene entonces que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo que sen x es igual a la suma de su serie de Maclaurin de acuerdo con el teorema 8. ■

Se establece el resultado del ejemplo 4 para referencia futura.

15 $$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para toda } x$$

EJEMPLO 5 Determine la serie de Maclaurin para cos x.

SOLUCIÓN Se podría proceder en forma directa como en el ejemplo 4, pero es más fácil derivar la serie de Maclaurin para sen x dada por la ecuación 15:

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

La serie de Maclaurin para e^x, sen x y cos x encontrada en los ejemplos 2, 4 y 5 fueron descubiertos por Newton, usando diferentes métodos. Estas ecuaciones son importantes porque dicen que se conoce todo acerca de cada una de estas funciones si se conocen todas sus derivadas en un único número 0.

Ya que la serie de Maclaurin para sen x converge para toda x, el teorema 2 de la sección 11.9 señala que la serie derivada para cos x converge también para toda x. Por lo que

16
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para toda } x$$

■

EJEMPLO 6 Determine la serie de Maclaurin para la función $f(x) = x \cos x$.

SOLUCIÓN En lugar de calcular las derivadas y sustituir en la ecuación 7, es más fácil multiplicar la serie para cos x, ecuación 16, por x:

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$ ■

EJEMPLO 7 Represente $f(x) =$ sen x como la suma de su serie de Taylor centrada en $\pi/3$.

SOLUCIÓN Primero se acomodan los valores en columnas, se tiene

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Se han obtenido dos diferentes representaciones en serie para sen x, la serie de Maclaurin en el ejemplo 4 y la serie de Taylor en el ejemplo 7. Es mejor utilizar la serie de Maclaurin para los valores de x cercanos a 0 y la serie de Taylor para x cercanos a $\pi/3$. Observe que el tercer polinomio de Taylor T_3 en la figura 3 es una buena aproximación al sen x cerca de $\pi/3$, mas no así cerca de 0. Compárelo con el tercer polinomio de Maclaurin T_3 en la figura 2, donde lo opuesto es verdadero.

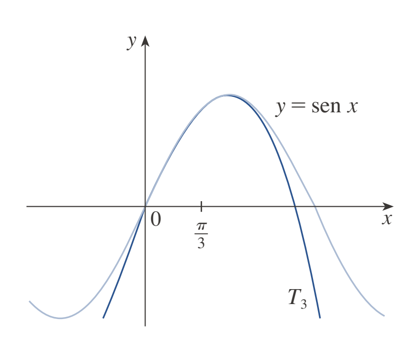


FIGURA 3

y este patrón se repite indefinidamente. Por tanto, la serie de Taylor en $\pi/3$ es

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

La demostración de que esta serie representa sen x para toda x es muy similar a la del ejemplo 4. [Solo reemplace x por $x - \pi/3$ en (14).] Se puede escribir la serie con la notación sigma si separa los términos que contienen $\sqrt{3}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$ ■

Las series de potencias obtenidas mediante métodos indirectos en los ejemplos 5 y 6 y en la sección 11.9 son realmente la serie de Taylor o de Maclaurin de las funciones dadas porque el teorema 5 establece que no importa cómo se obtenga una representación en una serie de potencias $f(x) = \Sigma\, c_n(x - a)^n$, siempre es cierto que $c_n = f^{(n)}(a)n!$ En otras palabras, la determinación de los coeficientes es única.

EJEMPLO 8 Encuentre la serie de Maclaurin para, $f(x) = (1 + x)^k$, donde k es cualquier número real.

SOLUCIÓN Al ordenar el trabajo en columnas, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^k & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= k(1 + x)^{k-1} & f'(0) &= k \\ f''(x) &= k(k - 1)(1 + x)^{k-2} & f''(0) &= k(k - 1) \\ f'''(x) &= k(k - 1)(k - 2)(1 + x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k - 1)(k - 2) \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1)(1 + x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1) \end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k - 1) \cdots (k - n + 1)}{n!} x^n$$

Esta serie se denomina **serie binomial**. Observe que si k es un entero no negativo, entonces los términos son eventualmente 0 y por tanto la serie es finita. Para otros valores de k, ninguno de sus términos es 0, por lo que se puede intentar la prueba de la razón. Si el n-ésimo término es a_n, entonces

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{k(k - 1) \cdots (k - n + 1)(k - n)x^{n+1}}{(n + 1)!} \cdot \frac{n!}{k(k - 1) \cdots (k - n + 1)x^n} \right|$$

$$= \frac{|k - n|}{n + 1} |x| = \frac{\left| 1 - \dfrac{k}{n} \right|}{1 + \dfrac{1}{n}} |x| \to |x| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Entonces, por la prueba de la razón, la serie binomial converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$. ■

La notación tradicional para los coeficientes de la serie binomial es

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k - 1)(k - 2) \cdots (k - n + 1)}{n!}$$

y estos números se llaman **coeficientes binomiales**.

El teorema siguiente establece que $(1 + x)^k$ es igual a la suma de su serie de Maclaurin. Es posible demostrar esto al probar que el residuo $R_n(x)$ se aproxima a 0, pero esto resulta ser muy difícil. La demostración delineada en el ejercicio 85 es mucho más fácil.

17 **Serie binomial** Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Aun cuando la serie binomial siempre converge cuando $|x| < 1$, la pregunta de si converge o no en los extremos, ± 1, depende del valor de k. Resulta que la serie converge en 1 si $-1 < k \leqslant 0$ y en ambos puntos finales si $k \geqslant 0$. Observe que si k es un entero positivo y $n > k$, entonces la expresión para $\binom{k}{n}$ contiene un factor $(k - k)$, por lo que $\binom{k}{n} = 0$ para $n >$ k. Esto significa que la serie termina y se reduce al teorema del binomio ordinario cuando k es un entero positivo. (Véase la página de referencia 1.)

EJEMPLO 9 Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Si se vuelve a escribir $f(x)$ de forma que se pueda usar la serie binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Y al usar la serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$ donde x fue reemplazada por $-x/4$, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1\cdot 3}{2!8^2}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!8^n}x^n + \cdots\right]$$

Se sabe por (17) que esta serie converge cuando $|-x/4| < 1$, es decir, $|x| < 4$, por lo que el radio de convergencia es $R = 4$. ■

En la tabla siguiente se resumen, para referencia futura, algunas de las series importantes de Maclaurin que se han deducido en esta sección y en la anterior.

Tabla 1

Series importantes de Maclaurin y sus radios de convergencia

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

EJEMPLO 10 Encuentre la suma de la serie $\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{2 \cdot 2^2} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} - \dfrac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots$.

SOLUCIÓN Con la notación sigma se puede escribir la serie dada como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

Entonces, en la tabla 1 se ve que esta serie relaciona la entrada para ln $(1 + x)$ con $x = \frac{1}{2}$. Por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) = \ln \tfrac{3}{2}$$ ■

TEC Module 11.10/11.11 permite ver cómo polinomios sucesivos de Taylor se aproximan a la función original.

Una razón de que las series de Taylor sean importantes, es que permiten integrar funciones que no se podían manejar antes. En efecto, en la introducción de este capítulo se mencionó que Newton integraba a menudo funciones expresándolas primero como series de potencias, y que después integraba la serie término a término. No es posible integrar la función $f(x) = e^{-x^2}$ con las técnicas conocidas hasta este momento, porque su antiderivada no es una función elemental (véase la sección 7.5). En el ejemplo siguiente se aplica la idea de Newton para integrar esta función.

EJEMPLO 11

(a) Evalúe $\int e^{-x^2}\,dx$ como una serie infinita.

(b) Evalúe $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ de tal manera que no difiera 0.001 del valor real.

SOLUCIÓN

(a) Primero se encuentra la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{-x^2}$. Aunque es posible usar el método directo, determínela simplemente mediante el reemplazo de x con $-x^2$ en la serie para e^x dada en la tabla 1.



Por lo que, para todos los valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Ahora se integra término a término:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Esta serie es convergente para toda x porque la serie original para e^{-x^2} converge para toda x.

(b) El teorema fundamental del cálculo da

Se puede tomar $C = 0$ en la antiderivada del inciso a).

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0.7475$$

El teorema de estimación de la serie alternante demuestra que el error implicado en esta aproximación es menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$ ■

Otra aplicación de la serie de Taylor se ilustra en el ejemplo siguiente. El límite podría ser calculado con la regla de L'Hôpital, pero en lugar de hacerlo así se recurre a las series.

EJEMPLO 12 Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Al utilizar la serie de Maclaurin para e^x, se tiene

Algunos sistemas algebraicos computacionales calculan los límites de esta manera.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

porque las series de potencias son funciones continuas. ■



Multiplicación y división de series de potencias

Si las series de potencias se suman o restan, se comportan como polinomios (el teorema 11.2.8 lo demuestra). De hecho, como lo ilustra el ejemplo siguiente, las series también se pueden multiplicar y dividir como los polinomios. Se determinan solo los primeros términos porque los cálculos para los siguientes se vuelven tediosos y los términos iniciales son los más importantes.

EJEMPLO 13 Calcule los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para (a) e^x sen x y (b) tan x.

SOLUCIÓN

(a) Usando la serie de Maclaurin para e^x y sen x en la tabla 1, se tiene

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Al multiplicar esta expresión y agrupar por términos semejantes, al igual que con los polinomios:

$$\begin{array}{rl}
 & 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\times & \quad x \qquad\quad - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots \\ \hline
 & x + x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4 + \cdots \\
+ & \qquad\qquad - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{6}x^4 - \cdots \\ \hline
 & x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{array}$$

Por lo que
$$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Al utilizar la serie de Maclaurin en la tabla 1, se tiene

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Se usa un procedimiento como el de la división larga:

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \hline
1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & -\left(x - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{24}x^5 - \cdots\right) \\ \cline{2-2}
 & \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & -\left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + \cdots\right) \\ \cline{2-2}
 & \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{array}$$

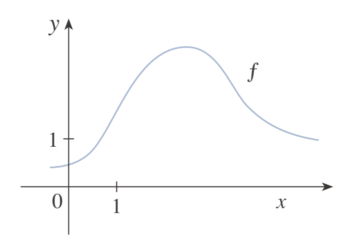
Por tanto,
$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$
■

Aunque no se ha intentado justificar las manipulaciones formales que se utilizaron en el ejemplo 13, son legítimas. Hay un teorema que establece que si tanto $f(x) = \Sigma\, c_n x^n$ como $g(x) = \Sigma b_n x^n$ convergen para $|x| < R$ y las series se multiplican como si fueran polinomios, entonces la serie resultante también converge para $|x| < R$ y representa $f(x)g(x)$. En cuanto a la división es necesario que $b_0 \neq 0$; la serie resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeña.

11.10 EJERCICIOS

1. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para toda x, escriba una fórmula para b_8.

2. Se muestra la gráfica de f.



(a) Explique por qué la serie

$$1.6 - 0.8(x-1) + 0.4(x-1)^2 - 0.1(x-1)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 1.

(b) Explique por qué la serie

$$2.8 - 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^2 - 0.1(x-2)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 2.

3. Si para $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.

4. Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

5-10 Utilice la definición de una serie de Taylor para encontrar los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie para $f(x)$ centrada en el valor de a dado.

5. $f(x) = xe^x, \quad a = 0$

6. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 2$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 8$

8. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

9. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6$

10. $f(x) = \cos^2 x, \quad a = 0$

11-18 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

11. $f(x) = (1-x)^{-2}$

12. $f(x) = \ln(1+x)$

13. $f(x) = \cos x$

14. $f(x) = \cos 3x$

15. $f(x) = 2^x$

16. $f(x) = xe^x$

17. $f(x) = \operatorname{senh} x$

18. $f(x) = \cosh x$

19-26 Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] También encuentre el radio de convergencia asociado.

19. $f(x) = x^5 + 2x^3 + x, \quad a = 2$

20. $f(x) = x^6 - x^4 + 2, \quad a = -2$

21. $f(x) = \ln x, \quad a = 2$

22. $f(x) = 1/x, \quad a = -3$

23. $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$

24. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

25. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi$

26. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$

27. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 13 representa $\cos x$ para toda x.

28. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 25 representa $\operatorname{sen} x$ para toda x.

29. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 17 representa $\operatorname{senh} x$ para toda x.

30. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 18 representa $\cosh x$ para toda x.

31-34 Use la serie binomial para desarrollar la función como una serie de potencias. Establezca el radio de convergencia.

31. $\sqrt[4]{1-x}$

32. $\sqrt[3]{8+x}$

33. $\dfrac{1}{(2+x)^3}$

34. $(1-x)^{3/4}$

35-44 Utilice la serie de Maclaurin que aparece en la tabla 1 para obtener la serie de Maclaurin para la función dada.

35. $f(x) = \arctan(x^2)$

36. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x/4)$

37. $f(x) = x \cos 2x$

38. $f(x) = e^{3x} - e^{2x}$

39. $f(x) = x \cos\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$

40. $f(x) = \cos(\pi x/2)$

41. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

42. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

43. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \quad \left[\textit{Sugerencia:} \text{ use } \operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x).\right]$

44. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \tfrac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

45-48 Encuentre la serie de Maclaurin para cada función f (por cualquier medio) y su radio de convergencia. Grafique f y los primeros polinomios de Taylor en la misma pantalla. ¿Qué observa sobre la relación de estos polinomios y f?

45. $f(x) = \cos(x^2)$

46. $f(x) = \ln(1+x^2)$

47. $f(x) = xe^{-x}$

48. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

49. Utilice la serie de Maclaurin para $\cos x$ para calcular $\cos 5°$ correcta a cinco decimales.

50. Utilice la serie de Maclaurin para e^x para calcular $1/\sqrt[10]{e}$ correcto a cinco decimales.

51. (a) Utilice la serie binomial para desarrollar $1/\sqrt{1 - x^2}$.
(b) Use el inciso (a) encontrar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^{-1}x$.

52. (a) Desarrolle $1/\sqrt[4]{1 + x}$ como una serie de potencias.
(b) Utilice el inciso (a) para estimar $1/\sqrt[4]{1.1}$ correcta con tres decimales.

53-56 Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

53. $\int \sqrt{1 + x^3}\, dx$

54. $\int x^2 \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

55. $\int x \cos(x^3)\, dx$

56. $\int \dfrac{e^x - 1}{x}\, dx$

57-60 Utilice series para aproximar la integral definida con la precisión indicada.

57. $\int_0^{1/2} x^3 \arctan x\, dx$ (cuatro decimales)

58. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^4)\, dx$ (cuatro decimales)

59. $\int_0^{0.4} \sqrt{1 + x^4}\, dx$ $\left(|\text{error}| < 5 \times 10^{-6}\right)$

60. $\int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2}\, dx$ $\left(|\text{error}| < 0.001\right)$

61-65 Utilice series para evaluar el límite.

61. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$

62. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

63. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

64. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}$

65. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 3x + 3\tan^{-1}x}{x^5}$

66. Utilice la serie del ejemplo 13(b) para evaluar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

Este límite se calculó en el ejemplo 4.4.4 utilizando la regla de L'Hôpital tres veces. ¿Cuál método prefiere?

67-72 Utilice la multiplicación o la división de series de potencias para determinar los primeros tres términos diferentes de cero en la serie de Maclaurin para cada función.

67. $y = e^{-x^2} \cos x$

68. $y = \sec x$

69. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

70. $y = e^x \ln(1 + x)$

71. $y = (\arctan x)^2$

72. $y = e^x \operatorname{sen}^2 x$

73-80 Determine la suma de la serie.

73. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{4n}}{n!}$

74. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

75. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3^n}{n\, 5^n}$

76. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{5^n n!}$

77. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n + 1)!}$

78. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

79. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

80. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} + \dfrac{1}{5 \cdot 2^5} - \dfrac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots$

81. Demuestre que si p es una función polinomial de n-grado, entonces

$$p(x + 1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x)}{i!}$$

82. Si $f(x) = (1 + x^3)^{30}$, ¿qué es $f^{(58)}(0)$?

83. Demuestre la desigualdad de Taylor para $n = 2$, es decir, demuestre que si $|f'''(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$ entonces

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{6}|x - a|^3 \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

84. (a) Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es igual a su serie de Maclaurin.
(b) Trace la gráfica de la función del inciso (a) y comente su comportamiento cerca del origen.

85. Utilice los pasos siguientes para demostrar (17).
(a) Sea $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$. Derive esta serie para demostrar que

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1 + x} \qquad -1 < x < 1$$

(b) Sea $h(x) = (1 + x)^{-k} g(x)$ demuestre que $h'(x) = 0$.
(c) Deduzca que $g(x) = (1 + x)^k$.

86. En el ejercicio 10.2.53 se demostró que la longitud de la elipse $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta$, donde $a > b > 0$, es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

donde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse.
Desarrolle el integrando como serie binomial y use el resultado del ejercicio 7.1.50 para expresar L como una serie de potencias de la excentricidad hasta el término en e^6.

PROYECTO DE LABORATORIO SAC UN LÍMITE ESCURRIDIZO

Este proyecto trata con la función

$$f(x) = \frac{\text{sen}(\tan x) - \tan(\text{sen}\, x)}{\text{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\text{arcsen}\, x)}$$

1. Utilice su sistema algebraico computacional para evaluar $f(x)$ para $x = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?

2. Use el SAC para trazar la gráfica de f cerca de $x = 0$. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?

3. Intente evaluar $\lim_{x\to 0} f(x)$ con la regla de L'Hôpital, usando el SAC para encontrar las derivadas del numerador y el denominador. ¿Qué descubrió? ¿Cuántas aplicaciones de la regla de l'Hôspital se requieren?

4. Evalúe $\lim_{x\to 0} f(x)$ con ayuda del SAC para encontrar la cantidad suficiente de términos de la serie de Taylor del numerador y el denominador. (Utilice la instrucción `taylor` en Maple o `series` en Mathematica.)

5. Utilice la instrucción límite en su SAC para calcular directamente $\lim_{x\to 0} f(x)$. (La mayoría de los sistemas algebraicos computacionales utilizan el método del problema 4 para calcular límites.)

6. En vista de las respuestas a los problemas 4 y 5, ¿cómo explica los resultados de los problemas 1 y 2?

PROYECTO DE REDACCIÓN CÓMO DESCUBRIÓ NEWTON LAS SERIES BINOMIALES

El teorema binomial, que proporciona el desarrollo de $(a + b)^k$, ya lo conocían los matemáticos chinos muchos siglos antes de que naciera Newton, en especial para el caso donde el exponente k es un entero positivo. En 1665, cuando Newton tenía 22 años, descubrió por primera vez el desarrollo de la serie infinita $(a + b)^k$ donde k es un exponente fraccionario, (positivo o negativo). No publicó sus descubrimientos, pero los planteó y proporcionó ejemplos de cómo usarlos en una carta con fecha del 13 de junio de 1676, carta (ahora conocida como *epistola prior*) que envió a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society of London, para que la transmitiera a Leibniz. Cuando él contestó, le preguntó a Newton cómo había descubierto las series binomiales. Newton escribió una segunda carta, la *epistola posterior*, del 24 de octubre de 1676, en la cual explica con lujo de detalles la manera como llegó a su descubrimiento mediante una ruta muy indirecta. Estuvo investigando las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$ de 0 a x para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Estas son fáciles de calcular si n es par. Al observar patrones y al interpolar, Newton fue capaz de adivinar las respuestas de valores impares de n. Entonces se dio cuenta de que podía obtener las mismas respuestas expresando $(1 - x^2)^{n/2}$ como una serie infinita.

Escriba un ensayo sobre el descubrimiento de Newton. Inicie dando el enunciado de serie binomial en la notación de Newton (véase la *epistola prior* en la página 285 de [4] o la página 402 de [2]). Explique por qué la versión de Newton es equivalente al teorema 17 de la página 767. Luego lea la *epistola posterior* de Newton (página 287 de [4] o página 404 de [2]) y explique los patrones que descubrió Newton en las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$. Muestre cómo podía él calcular el área bajo las curvas restantes y cómo comprobó su respuesta. Por último, explique cómo estos descubrimientos llevaron a las series binomiales. Los libros de Edwards [1] y Katz [3] contienen comentarios de las cartas de Newton.

1. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, pp. 178-187.

2. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics*: *A Reader*, London: MacMillan Press, 1987.

3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: HarperCollins, 1993, pp. 463-466.

4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, 1200-1800, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1969.

11.11 Aplicaciones de los polinomios de Taylor

En esta sección se exploran dos tipos de aplicaciones de los polinomios de Taylor. Primero se examina cómo se usan para aproximar funciones; a los científicos de la computación les gustan porque las polinomiales son las más sencillas de las funciones. Luego se investiga cómo los físicos y los ingenieros los usan en campos como la relatividad, óptica, radiación de cuerpos negros, dipolos eléctricos, la velocidad de las ondas en el agua y la construcción de carreteras en el desierto.

Aproximación de funciones mediante polinomios

Suponga que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor en a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En la sección 11.10 se introdujo la notación $T_n(x)$ para la n-ésima suma parcial de esta serie y se le llamó polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a. Por lo que

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ya que f es la suma de su serie de Taylor, se sabe que $T_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ y de este modo T_n se puede usar como una aproximación de f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Observe que el polinomio de primer grado de Taylor

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

es lo mismo que la linealización de f en a que se estudió en la sección 3.10. Note también que T_1 y su derivada tienen los mismos valores en a que f y f'. En general, se puede demostrar que las derivadas de T_n en a concuerdan con las de f hasta las derivadas de orden n, inclusive.

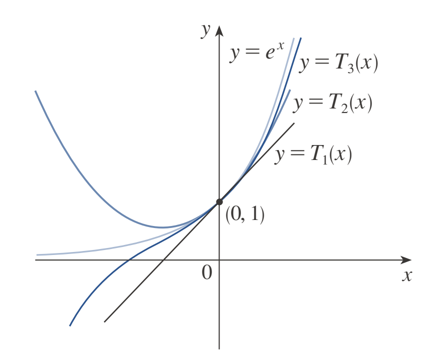


FIGURA 1

Para ilustrar estas ideas, vea una vez más las gráficas de $y = e^x$ y sus primeros polinomios de Taylor, como se ilustran en la figura 1. La gráfica de T_1 es la recta tangente a $y = e^x$ en (0, 1); esta recta tangente es la mejor aproximación lineal a e^x cerca de (0, 1). La gráfica de T_2 es la parábola $y = 1 + x + x^2/2$, y la gráfica de T_3 es la curva cúbica $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que es un ajuste más cercano a la curva exponencial $y = e^x$ que T_2. El polinomio de Taylor T_4 siguiente sería una aproximación mejor, y así sucesivamente.

	$x = 0.2$	$x = 3.0$
$T_2(x)$	1.220000	8.500000
$T_4(x)$	1.221400	16.375000
$T_6(x)$	1.221403	19.412500
$T_8(x)$	1.221403	20.009152
$T_{10}(x)$	1.221403	20.079665
e^x	1.221403	20.085537

Los valores de la tabla dan una demostración numérica de la convergencia de los polinomios de Taylor $T_n(x)$ a la función $y = e^x$. Se ve que cuando $x = 0.2$ la convergencia es muy rápida, pero cuando $x = 3$ es un poco más lenta. De hecho, entre más lejos esté x de 0, es un poco más lenta la convergencia de $T_n(x)$ a e^x.

Cuando se usa un polinomio de Taylor T_n para aproximar una función f, se debe preguntar: ¿qué tan buena es una aproximación? ¿Qué tan grande se debe tomar n con objeto de que alcance una precisión deseada? Para responder estas preguntas, es necesario examinar el valor absoluto del residuo:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Hay tres métodos posibles para estimar el tamaño del error:

1. Si cuenta con una calculadora que trace gráficas o una computadora, la puede usar para trazar la gráfica $|R_n(x)|$ y de ahí estimar el error.
2. Si sucede que la serie es alternante, se puede aplicar el teorema de estimación de la serie alternante.
3. En todos los casos se puede aplicar la desigualdad de Taylor (teorema 11.10.9), que establece que si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ entonces

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

EJEMPLO 1

(a) Obtenga una aproximación de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por medio del polinomio de Taylor de grado 2 en $a = 8$.
(b) ¿Qué tan exacta es esta aproximación cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$?

SOLUCIÓN

(a)

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \qquad f(8) = 2$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f'(8) = \tfrac{1}{12}$$
$$f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f''(8) = \tfrac{1}{144}$$
$$f'''(x) = \tfrac{10}{27}x^{-8/3}$$

Por lo que el polinomio de Taylor de segundo grado es

$$T_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2$$
$$= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

La aproximación deseada es

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

(b) La serie de Taylor no es alternante cuando $x < 8$, por lo que no se puede aplicar el teorema de estimación de la serie alternante en este ejemplo. Pero se puede usar la desigualdad de Taylor con $n = 2$ y $a = 8$:

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

donde $|f'''(x)| \leqslant M$. Como $x \geqslant 7$, se tiene $x^{8/3} \geqslant 7^{8/3}$ y de esa manera

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leqslant \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0.0021$$

Por tanto se puede hacer $M = 0.0021$. También $7 \leqslant x \leqslant 9$, por lo que $-1 \leqslant x - 8 \leqslant 1$ y $|x-8| \leqslant 1$. Entonces la desigualdad de Taylor da

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0.0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0.0021}{6} < 0.0004$$

En estos términos, si $7 \leqslant x \leqslant 9$, la aproximación en el inciso (a) no difiere en más de 0.0004 del valor real. ■

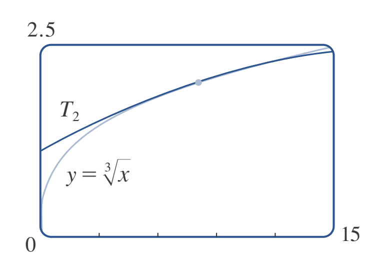


FIGURA 2

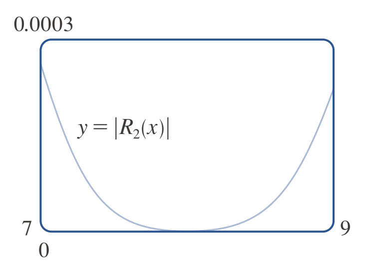


FIGURA 3

Con la ayuda de una calculadora para trazar gráficas o de una computadora compruebe el cálculo del ejemplo 1. En la figura 2 se muestra que las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = T_2(x)$ están muy cercanas entre sí cuando x está cerca de 8. En la figura 3 se ilustra la gráfica de $|R_2(x)|$ calculada a partir de la expresión

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

Se ve de la gráfica que

$$|R_2(x)| < 0.0003$$

cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$. Por lo que la estimación de error mediante métodos gráficos es ligeramente mejor que cuando se hace a partir de la desigualdad de Taylor, en este caso.

EJEMPLO 2

(a) ¿Cuál es el error máximo posible al utilizar la aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

cuando $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$? Utilice esta aproximación para calcular sen 12° correcto a seis cifras decimales.
(b) ¿Para qué valores de x esta aproximación no difiere en más de 0.00005 del valor real?

SOLUCIÓN

(a) Observe que la serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

es alternante para todos los valores no cero de x, y los términos sucesivos decrecen en tamaño porque $|x| < 1$, por lo que se puede usar el teorema de estimación de la serie alternante. El error en la aproximación de sen x por medio de los tres términos de su serie de Maclaurin es tan pequeño como

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5040}$$

Si $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$, entonces $|x| \leqslant 0.3$, por lo que el error es más pequeño que

$$\frac{(0.3)^7}{5040} \approx 4.3 \times 10^{-8}$$

Para calcular sen 12° primero se convierte a radianes:

$$\operatorname{sen} 12° = \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0.20791169$$

Por lo que con una aproximación de seis decimales, sen 12° ≈ 0.207912.
(b) El error será menor que 0.00005 si

$$\frac{|x|^7}{5040} < 0.00005$$

Al resolver la desigualdad para x, se obtiene

$$|x|^7 < 0.252 \qquad \text{o} \qquad |x| < (0.252)^{1/7} \approx 0.821$$

Por lo que la aproximación dada no difiere en más de 0.00005 cuando $|x| < 0.82$. ■

TEC En Module 11.10/11.11 se muestran en forma gráfica los residuos de las aproximaciones de los polinomios de Taylor.

¿Qué sucede si se recurre a la desigualdad de Taylor para resolver el ejemplo 2? Ya que $f^{(7)}(x) = -\cos x$, se tiene $|f^{(7)}(x)| \leqslant 1$ y así

$$|R_6(x)| \leqslant \frac{1}{7!}|x|^7$$

De este modo se llega a la misma estimación que con el teorema de la estimación de la serie alternante.

¿Qué hay con respecto a los métodos gráficos? En la figura 4 se ilustra la gráfica de

$$|R_6(x)| = \left|\operatorname{sen} x - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)\right|$$

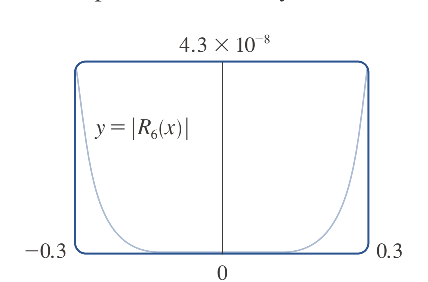


FIGURA 4

y se observa que $|R_6(x)| < 4.3 \times 10^{-8}$ cuando $|x| \leqslant 0.3$. Esta es la misma estimación que se obtuvo en el ejemplo 2. En el caso del inciso (b) se quiere $|R_6(x)| < 0.00005$, por lo que se grafica tanto $y = |R_6(x)|$ como $y = 0.00005$ en la figura 5. Si se coloca el cursor en el punto de intersección derecho, se verá que la desigualdad se cumple cuando $|x| < 0.82$. Una vez más se llega a la misma estimación que se obtuvo en la solución del ejemplo 2.

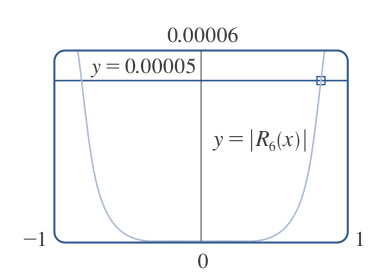


FIGURA 5

Si se hubiera pedido que se aproximara sen 72° en lugar de sen 12° en el ejemplo 2, habría sido prudente utilizar los polinomios de Taylor en $a = \pi/3$ (en lugar de $a = 0$), porque son mejores aproximaciones al sen x para valores de x cercanos a $\pi/3$. Observe que 72° es cercano a 60° (o $\pi/3$ radianes), y las derivadas de sen x son fáciles de calcular en $\pi/3$.

La figura 6 muestra las gráficas de las aproximaciones de los polinomios de Maclaurin

$$T_1(x) = x \qquad\qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad\qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

a la curva seno. Se puede ver que cuando n aumenta, $T_n(x)$ es una buena aproximación a sen x en un intervalo más y más grande.

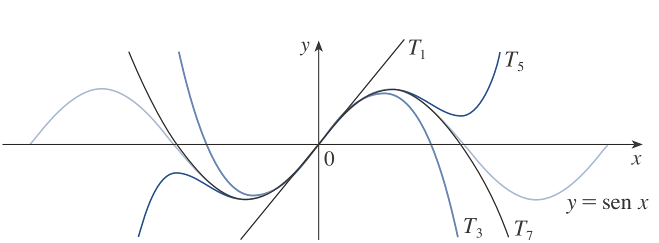


FIGURA 6

Las calculadoras y computadoras aplican el tipo de cálculo hecho en los ejemplos 1 y 2. Por ejemplo, cuando usted presiona la tecla sen o e^x de su calculadora, o cuando un programador de computadoras utiliza una subrutina en el caso de una función trigonométrica o exponencial o de Bessel, en muchas máquinas se calcula una aproximación polinomial. Con frecuencia, el polinomio es uno de Taylor que ha sido modificado de modo que el error se extiende de manera más uniforme en todo el intervalo.

Aplicaciones en la física

Los polinomios de Taylor también se usan con mucha frecuencia en la física. Con objeto de entender una ecuación, los físicos simplifican a menudo una función considerando solo dos o tres términos de la serie de Taylor. En otras palabras, los físicos usan un polinomio de Taylor como una aproximación de la función. La desigualdad de Taylor se puede usar para medir la exactitud de la aproximación. En el ejemplo siguiente se muestra una manera en la cual esta idea se usa en la relatividad especial.

EJEMPLO 3 En la teoría de la relatividad especial de Einstein, la masa de un objeto que se desplaza con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa del objeto cuando está en reposo y c es la velocidad de la luz. La energía cinética del objeto es la diferencia entre su energía total y su energía en reposo:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

(a) Demuestre que cuando v es muy pequeña comparada con c, esta expresión para K concuerda con la física clásica de Newton: $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
(b) Utilice la desigualdad de Taylor para estimar la diferencia en estas expresiones para K cuando $|v| \leqslant 100$ m/s.

SOLUCIÓN
(a) Utilizando las expresiones dadas para K y m, se obtiene

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

La curva superior de la figura 7 es la gráfica de la expresión de la energía cinética K de un objeto con velocidad v en la relatividad especial. La curva inferior muestra la función usada para K en la física clásica newtoniana. Cuando v es mucho más pequeña que la velocidad de la luz, las curvas son prácticamente idénticas.

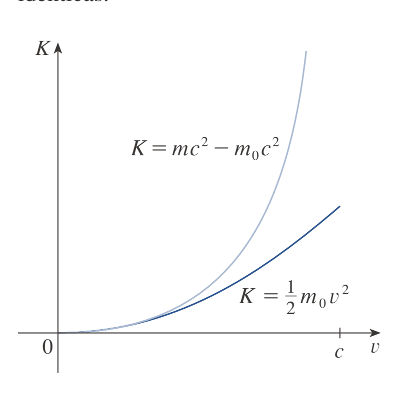


FIGURA 7

Con $x = -v^2/c^2$, la serie de Maclaurin para $(1 + x)^{-1/2}$ es más fácil de calcular que una serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$. (Observe que $|x| < 1$ porque $v < c$.) Por tanto

$$\begin{aligned}(1 + x)^{-1/2} &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}K &= m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right] \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)\end{aligned}$$

Si v es mucho más pequeña que c, entonces todos los términos después del primero son muy pequeños cuando se les compara con el primer término. Si se omiten, se obtiene

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

(b) Si $x = -v^2/c^2$, $f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-1/2} - 1]$ y M es un número tal que $|f''(x)| \leqslant M$, entonces se puede utilizar la desigualdad de Taylor para escribir

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2!}x^2$$

Se tiene $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1 + x)^{-5/2}$ y se sabe que $|v| \leqslant 100$ m/s por lo que

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \leqslant \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \quad (=M)$$

Por lo que con $c = 3 \times 10^8$ m/s,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4.17 \times 10^{-10})m_0$$

Por lo que cuando $|v| \leqslant 100$ m/s, la magnitud del error al usar la expresión newtoniana para la energía cinética es cuanto mucho $(4.2 \times 10^{-10})m_0$. ■

Otra aplicación en la física sucede en óptica. La figura 8 se ha adaptado de *Optics* 4a. ed., de Eugene Hecht (San Francisco, 2002), página 153. Representa una onda de la fuente puntual S que se encuentra una interfaz esférica de radio R centrado en C. El rayo SA se refracta hacia P.

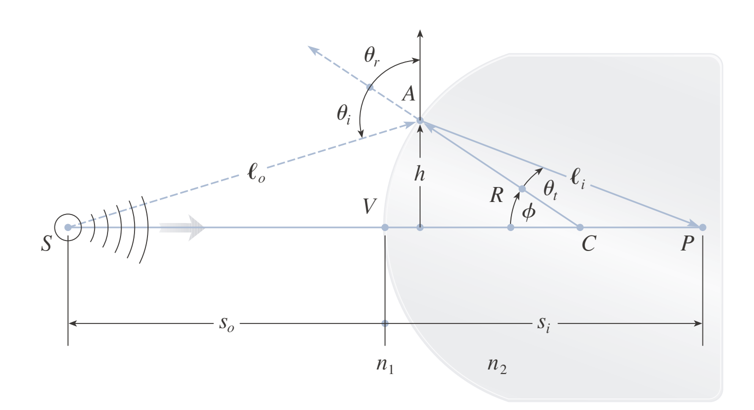


FIGURA 8
Refracción en una interfaz esférica
Fuente: Adaptado de E. Hecht, *Optics*, 4e (Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2002).

Al usar el principio de Fermat de que la luz viaja en el menor tiempo posible, Hecht deduce la ecuación

1 $$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$

donde n_1 y n_2 son índices de refracción y ℓ_0, ℓ_i, s_0 y s_i son las distancias indicadas en la figura 8. De acuerdo con la ley de los cosenos aplicada a los triángulos ACS y ACP, se tiene

2 $$\ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

En este caso utilice la identidad $\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$

Como es un poco complicado trabajar con la ecuación 1, Gauss, en 1841, la simplificó usando la aproximación lineal $\cos\phi \approx 1$ para valores pequeños de ϕ. (Esto equivale a usar el polinomio de Taylor de grado 1.) Por tanto, la ecuación 1 se transforma en la ecuación más sencilla, que se le pide demostrar en el ejercicio 34(a):

$$\boxed{3} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de Gauss* u *óptica de primer orden*, y se ha vuelto la herramienta teórica básica para diseñar lentes.

Una teoría más exacta se obtiene al aproximar $\cos\phi$ por medio de su polinomio de Taylor de grado 3 (que es el mismo que el polinomio de Taylor de grado 2). Esto considera los rayos para los cuales ϕ no es tan pequeña, es decir, rayos que golpean la superficie a mayores distancias h por arriba del eje. En el ejercicio 34(b) se le pide usar esta aproximación para deducir la ecuación más exacta

$$\boxed{4} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right]$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de tercer orden*.

Otras aplicaciones de los polinomios de Taylor a la física y la ingeniería se exploran en los ejercicios 32, 33, 35, 36, 37 y 38, y en el proyecto de aplicación de la página 783.

11.11 EJERCICIOS

1. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 5 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrada en $a = 0$. Trace la gráfica de f y estos polinomios en una misma pantalla.
(b) Evalúe f y estos polinomios en $x = \pi/4$, $\pi/2$ y π.
(c) Explique cómo los polinomios de Taylor convergen a $f(x)$.

2. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 3 para $f(x) = \tan x$ centrada en $a = 0$. Grafique f y estos polinomios en una misma pantalla.
(b) Evalúe f y estos polinomios en $x = \pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$.
(c) Comente cómo los polinomios de Taylor convergen a $f(x)$.

3-10 Determine los polinomios de Taylor $T_3(x)$ para la función f centrada en el número a. Trace la gráfica de f y T_3 en la misma pantalla.

3. $f(x) = e^x$, $a = 1$

4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/6$

5. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/2$

6. $f(x) = x + e^{-x}$, $a = 0$

7. $f(x) = 1/x$, $a = 2$

8. $f(x) = x\cos x$, $a = 0$

9. $f(x) = xe^{-2x}$, $a = 0$

10. $f(x) = \tan^{-1}x$, $a = 1$

11-12 Use un sistema algebraico computacional para encontrar los polinomios de Taylor T_n con centro en a para $n = 2, 3, 4, 5$. Luego trace la gráfica de estos polinomios y f en la misma pantalla.

11. $f(x) = \cot x$, $a = \pi/4$

12. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$, $a = 0$

13-22
(a) Aproxime f mediante un polinomio de Taylor con grado n en el número a.
(b) Con la desigualdad de Taylor estime la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x está en el intervalo dado.
(c) Compruebe el resultado del inciso (b) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

13. $f(x) = 1/x$, $a = 1$, $n = 2$, $0.7 \leqslant x \leqslant 1.3$

14. $f(x) = x^{-1/2}$, $a = 4$, $n = 2$, $3.5 \leqslant x \leqslant 4.5$

15. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leqslant x \leqslant 4.2$

16. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0.9 \leqslant x \leqslant 1.1$

17. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad -0.2 \leqslant x \leqslant 0.2$

18. $f(x) = \ln(1 + 2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

19. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.1$

20. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

21. $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

22. $f(x) = \operatorname{senh} 2x, \quad a = 0, \quad n = 5, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

---

23. Utilice la información del ejercicio 5 para estimar cos 80° con una aproximación de cinco decimales.

24. Use la información del ejercicio 16 para estimar sen 38° con una aproximación de cinco decimales.

25. Utilice la desigualdad de Taylor para determinar el número de términos de la serie de Maclaurin para e^x que se debe usar para estimar $e^{0.1}$ de tal manera que difiera menos de 0.00001 del valor real.

26. ¿Cuántos términos de la serie de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ son necesarios para estimar ln 1.4 con 0.001 de precisión?

27-29 Aplique el teorema de estimación de la serie alternante o la desigualdad de Taylor para estimar los valores de x para los cuales la aproximación dada es exacta y está dentro del error establecido. Compruebe gráficamente su respuesta.

27. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6} \qquad (|\text{error}| < 0.01)$

28. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \qquad (|\text{error}| < 0.005)$

29. $\arctan x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \qquad (|\text{error}| < 0.05)$

---

30. Suponga que se sabe que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n + 1)}$$

y la serie de Taylor de f con centro en 4 converge a $f(x)$ para toda x en el intervalo de convergencia. Demuestre que el polinomio de Taylor de quinto grado aproxima $f(5)$ con error menor a 0.0002.

31. Un vehículo se desplaza a una velocidad de 20 m/s y a una aceleración de 2 m/s² en un instante dado. Usando un polinomio de Taylor de segundo grado, estime qué tanto se desplazará el automóvil en el segundo siguiente. ¿Sería razonable utilizar este polinomio para estimar la distancia recorrida durante el minuto siguiente?

32. La resistividad ρ de un alambre conductor es el recíproco de la conductividad y se mide en unidades ohms-metros (Ω-m). La resistividad de un metal dado depende de la temperatura de acuerdo con la ecuación

$$\rho(t) = \rho_{20}\, e^{\alpha(t-20)}$$

donde t es la temperatura en °C. Hay tablas que dan los valores de α (llamado coeficiente de temperatura) y ρ_{20} (la resistividad a 20 °C) para varios metales. Excepto a temperaturas muy bajas, la resistividad varía casi en forma lineal con la temperatura, por lo que es común aproximar la expresión para $\rho(t)$ mediante su polinomio de Taylor de primero o segundo grados en $t = 20$.

(a) Encuentre expresiones para estas aproximaciones lineales y cuadráticas.

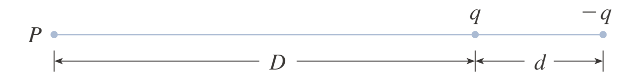
(b) Por lo que se refiere al cobre, las tablas dan $\alpha = 0.0039/°\text{C}$ y $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega$-m. Trace la gráfica de la resistividad del cobre y las aproximaciones lineales y cuadráticas para $-250\ °\text{C} \leqslant t \leqslant 1000\ °\text{C}$.

(c) ¿Para qué valores de t la aproximación lineal concuerda con la expresión exponencial de tal manera que difiera menos de 1% del valor real?

33. Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas eléctricas de igual magnitud y signos opuestos. Si las cargas son q y $-q$ y hay una distancia d entre ellas, entonces el campo eléctrico E en el punto P en la figura es

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D + d)^2}$$

Al desarrollar esta expresión para E como serie en potencias de d/D, demuestre que E es aproximadamente proporcional a $1/D^3$ cuando P está alejada del dipolo.



34. (a) Deduzca la ecuación 3 para la óptica de Gauss a partir de la ecuación 1 aproximando $\cos\phi$ en la ecuación 2 mediante su polinomio de Taylor de primer grado.

(b) Demuestre que si $\cos\phi$ es reemplazado por su polinomio de Taylor de tercer grado en la ecuación 2, entonces la ecuación 1 se transforma en la ecuación 4 para una óptica de tercer orden. [*Sugerencia*: utilice los dos primeros términos de la serie binomial para ℓ_o^{-1} y ℓ_i^{-1}. Use también $\phi \approx \operatorname{sen}\phi$.]

35. Si una onda de agua de longitud L se desplaza con una velocidad v a través de un cuerpo de agua de profundidad d como en la figura de la página 782, entonces

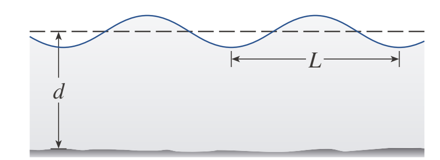
$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}$$

(a) Si el agua es profunda, demuestre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.

(b) Si el agua es poco profunda, use la serie de Maclaurin para tanh para demostrar que $v \approx \sqrt{gd}$ (Por lo que,

en agua poco profunda, la velocidad de una onda tiende a ser independiente de la longitud de la onda.)

(c) Utilice el teorema de estimación de la serie alternante, para demostrar que si $L > 10d$, entonces la estimación $v^2 \approx gd$ es exacta dentro de $0.014gL$.

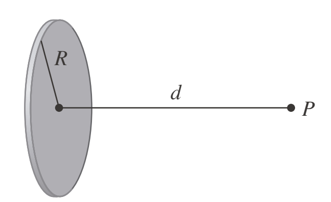


36. Un disco uniformemente cargado tiene radio R y densidad de carga superficial σ, como se ve en la figura. El potencial eléctrico V en un punto P a una distancia d a lo largo de la perpendicular al eje central del disco es

$$V = 2\pi k_e \sigma\left(\sqrt{d^2 + R^2} - d\right)$$

donde k_e es una constante (llamada constante de Coulomb). Demuestre que

$$V \approx \frac{\pi k_e R^2 \sigma}{d} \text{ para } d \text{ grande}$$



37. Si un topógrafo mide diferencias en la altitud cuando hace planos para una carretera que cruza un desierto, se deben hacer correcciones tomando en cuenta la curvatura de la Tierra.

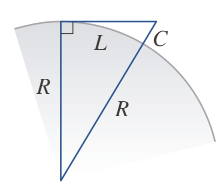
(a) Si R es el radio de la Tierra y L es la longitud de la carretera, demuestre que la corrección es

$$C = R\,sec(L/R) - R$$

(b) Mediante un polinomio de Taylor demuestre que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare las correcciones dadas por las fórmulas en los incisos (a) y (b) para una carretera que mide 100 km de longitud. (Tome como radio de la Tierra 6370 km.)



38. El período de un péndulo con longitud L que subtiende un ángulo máximo θ_0 con la vertical es

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

donde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. (En el ejercicio 7.7.42 se aproximó esta integral usando la regla de Simpson.)

(a) Desarrolle el integrando como una serie binomial y use el resultado del ejercicio 7.1.50 para demostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots\right]$$

Si θ_0 no es demasiado grande, se usa a menudo la aproximación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtenida usando solo el primer término de la serie. Se obtiene una mejor aproximación si se usan solo dos términos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

(b) Observe que todos los términos de la serie después del primero tienen coeficientes que son cuanto mucho $\frac{1}{4}$. Use este hecho para comparar esta serie con una serie geométrica y demuestre que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leqslant T \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

(c) Use las desigualdades del inciso *b*), estime el período de un péndulo con $L = 1$ metros y $\theta_0 = 10°$. ¿Cómo es si se le compara con la estimación $T \approx 2\pi \sqrt{L/g}$? ¿Cómo es si $\theta_0 = 42°$?

39. En la sección 4.8 se utilizó el método de Newton para obtener un valor aproximado de una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, y a partir de una aproximación inicial x_1 se obtuvo aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$, donde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Utilice la desigualdad de Taylor con $n = 1$, $a = x_n$ y $x = r$ para demostrar que si $f''(x)$ existe sobre un intervalo I que contiene a r, x_n y x_{n+1}, y $|f''(x)| \leqslant M$, $|f'(x)| \geqslant K$ para toda $x \in I$, entonces

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Esto significa que si x_n es exacta con d cifras decimales, entonces x_{n+1} es exacta con una aproximación de $2d$ decimales. Más preciso, si el error en la etapa n es a lo más 10^{-m}, entonces el error en la etapa $n + 1$ es a lo más $(M/2K)10^{-2m}$.]

PROYECTO DE APLICACIÓN RADIACIÓN DE LAS ESTRELLAS



Cualquier objeto emite radiaciones cuando se calienta. Un *cuerpo negro* es un sistema que absorbe toda la radiación que le llega. Por ejemplo, una superficie negra mate o una cavidad grande con un pequeño agujero en su pared (como un alto horno) es un cuerpo negro y emite radiación de cuerpo negro. Incluso la radiación que llega del Sol está cerca de ser radiación de un cuerpo negro.

La ley de Rayleigh-Jeans, propuesta a fines del siglo XIX, expresa la densidad de energía de radiación de cuerpo negro de longitud de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins (K) y k es la constante de Boltzmann. La ley de Rayleigh-Jeans concuerda con las mediciones experimentales para longitudes de onda largas, pero no sucede lo mismo con las longitudes de onda cortas. [La ley predice que $f(\lambda) \to \infty$ cuando $\lambda \to 0^+$ pero los experimentos han demostrado que $f(\lambda) \to 0$.] Este hecho recibe el nombre de *catástrofe ultravioleta*.

En 1900, Max Planck encontró un mejor modelo (que se conoce ahora como ley de Planck) para la radiación de cuerpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins y

$$h = \text{constante de Planck} = 6.6262 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$c = \text{velocidad de la luz} = 2.997925 \times 10^{8} \text{ m/s}$$

$$k = \text{constante de Boltzmann} = 1.3807 \times 10^{-23} \text{J/K}$$

1. Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para la ley de Planck. De este modo, esta ley modela la radiación de cuerpo negro mejor que la ley de Rayleigh-Jeans para longitudes de onda cortas.

2. Use un polinomio de Taylor para demostrar que, en el caso de las longitudes de onda largas, la ley de Planck da aproximadamente los mismos valores que la ley de Rayleigh-Jeans.

3. Trace la gráfica de f de acuerdo con ambas leyes en una misma pantalla y comente sobre las similitudes y las diferencias. Use $T = 5700$ K (la temperatura del Sol). (Quizá quiera cambiar de metros a la unidad más conveniente de micrómetros: 1 mm $= 10^{-6}$ m.)

4. Use la gráfica del problema 3 para estimar el valor de λ para el cual $f(\lambda)$ es un máximo de acuerdo con la ley de Planck.

5. Investigue cómo la gráfica de f cambia cuando T varía. (Utilice la ley de Planck.) En particular, trace la gráfica de f para las estrellas Betelgeuse ($T = 3400$ K), Procyon ($T = 6400$ K) y Sirio ($T = 9200$ K), así como para el Sol. ¿Cómo varía la radiación total emitida, es decir (el área bajo la curva), con respecto a T? Apóyese en las gráficas y explique por qué a Sirio se le conoce como estrella azul y a Betelgeuse como una estrella roja.

11 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una sucesión convergente?
(b) ¿Qué es una serie convergente?
(c) ¿Qué significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
(d) ¿Qué significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión acotada?
(b) ¿Qué es una sucesión monótona?
(c) ¿Qué puede decir con respecto a una sucesión monótona acotada?

3. (a) ¿Qué es una serie geométrica? ¿En qué circunstancias es convergente? ¿Cuál es su suma?
(b) ¿Qué es una serie p? ¿En qué circunstancias es convergente?

4. Suponga que $\Sigma a_n = 3$ y s_n es la n-ésima suma parcial de la serie. ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} a_n$? ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} s_n$?

5. Enuncie lo siguiente.
(a) Prueba de la divergencia
(b) Prueba de la integral
(c) Prueba por comparación
(d) Prueba por comparación del límite
(e) Prueba de la serie alternante
(f) Prueba de la razón
(g) Prueba de la raíz

6. (a) ¿Qué es una serie absolutamente convergente?
(b) ¿Qué puede decir acerca de dicha serie?
(c) ¿Qué es una serie condicionalmente convergente?

7. (a) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la integral, ¿cómo estima su suma?
(b) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba por comparación, ¿cómo estima su suma?
(c) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante, ¿cómo estima su suma?

8. (a) Escriba la forma general de una serie de potencias.
(b) ¿Qué es el radio de convergencia de una serie de potencias?
(c) ¿Qué es el intervalo de convergencia de una serie de potencias?

9. Suponga que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia R.
(a) ¿Cómo deriva f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para f'?
(b) ¿Cómo integra f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para $\int f(x)dx$?

10. (a) Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de grado n-ésimo de f centrada en a.
(b) Escriba una expresión para la serie de Taylor de f centrada en a.
(c) Escriba una expresión para la serie de Maclaurin de f.
(d) ¿Cómo demuestra que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor?
(e) Enuncie la desigualdad de Taylor.

11. Escriba la serie de Maclaurin y el intervalo de convergencia para cada una de las funciones siguientes.
(a) $1/(1 - x)$ (b) e^x (c) $\operatorname{sen} x$
(d) $\cos x$ (e) $\tan^{-1}x$ (f) $\ln(1 + x)$

12. Escriba el desarrollo de la serie binomial de $(1 + x)^k$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces Σa_n es convergente.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{sen} 1}$ es convergente.

3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.

4. Si $\Sigma c_n 6^n$ es convergente, entonces $\Sigma c_n(-2)^n$ es convergente.

5. Si $\Sigma c_n 6^n$ es convergente, entonces $\Sigma c_n(-6)^n$ es convergente.

6. Si $\Sigma c_n x^n$ diverge cuando $x = 6$, entonces diverge cuando $x = 10$.

7. La prueba de la razón se puede usar para determinar si converge $\Sigma 1/n^3$.

8. La prueba de la razón se puede usar para determinar si converge $\Sigma 1/n!$

9. Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y Σb_n diverge, entonces la serie Σa_n diverge.

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$

11. Si $-1 < \alpha < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

12. Si Σa_n es divergente, entonces $\Sigma |a_n|$ es divergente.

13. Si $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$ converge para toda x, entonces $f'''(0) = 2$.

14. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n + b_n\}$ es divergente.

15. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n b_n\}$ es divergente.

16. Si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n > 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

17. Si $a_n > 0$ y Σa_n converge, entonces $\Sigma(-1)^n a_n$ converge.

18. Si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

19. $0.99999\ldots = 1$

20. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ entonces $\lim_{n\to\infty} (a_{n+3} - a_n) = 0$.

21. Si un número finito de términos se agrega a una serie convergente, la nueva serie aún converge.

22. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = AB$.

EJERCICIOS

1-8 Determine si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente, determine su límite.

1. $a_n = \dfrac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$

2. $a_n = \dfrac{9^{n+1}}{10^n}$

3. $a_n = \dfrac{n^3}{1 + n^2}$

4. $a_n = \cos(n\pi/2)$

5. $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen} n}{n^2 + 1}$

6. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$

8. $\{(-10)^n/n!\}$

9. Una sucesión se define recursivamente mediante las ecuaciones $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y $a_n < 2$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

10. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} n^4 e^{-n} = 0$ y use una gráfica para determinar el valor más pequeño de N que corresponde a $\varepsilon = 0.1$ en la definición exacta de límite.

11-22 Determine si la serie es convergente o divergente.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1}}$

15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n + 1}\right)$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1.2)^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + 2n^2)^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{5^n n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n + 1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}}{n}$

23-26 Determine si la serie es condicionalmente convergente, absolutamente convergente o divergente.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/3}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1) 3^n}{2^{2n+1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$

27-31 Calcule la suma de la serie.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 3)}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1}(n + 1) - \tan^{-1} n]$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

31. $1 - e + \dfrac{e^2}{2!} - \dfrac{e^3}{3!} + \dfrac{e^4}{4!} - \cdots$

32. Exprese el decimal periódico 4.17326326326... como una fracción.

33. Demuestre que $\cosh x \geqslant 1 + \frac{1}{2}x^2$ para toda x.

34. ¿Para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$?

35. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ correcta a cuatro decimales.

36. (a) Determine la suma parcial s_5 de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ y estime el error al usarla como aproximación de la suma de la serie.
(b) Calcule la suma de esta serie con una aproximación de cinco decimales.

37. Use la suma de los primeros ocho términos para aproximarse a la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 5^n)^{-1}$. Estime el error implicado en esta aproximación.

38. (a) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ es convergente.
(b) Deduzca que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

39. Demuestre que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + 1}{n}\right) a_n$$

también es absolutamente convergente.

40-43 Encuentre el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n^2 5^n}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n\,4^n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n (x-2)^n}{(n+2)!}$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$

---

44. Calcule el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

45. Determine la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \pi/6$.

46. Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/3$.

47-54 Encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. Puede aplicar el método directo (definición de una serie de Maclaurin) o las series conocidas, como la serie geométrica, serie binomial o la serie de Maclaurin para e^x, sen x, $\tan^{-1} x$ y $\ln(1 + x)$.

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

48. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

49. $f(x) = \ln(4 - x)$

50. $f(x) = xe^{2x}$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

52. $f(x) = 10^x$

53. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16 - x}$

54. $f(x) = (1 - 3x)^{-5}$

---

55. Evalúe $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\, dx$ como una serie infinita.

56. Use series para aproximar $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$ con dos dígitos decimales.

57-58

(a) Obtenga un valor aproximado de f mediante un polinomio de Taylor de grado n en el número a.

(b) Trace la gráfica de f y T_n en una misma pantalla.

(c) Use la desigualdad de Taylor para estimar la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x se encuentra en el intervalo dado.

(d) Compruebe su resultado del inciso (c) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

57. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.9 \leqslant x \leqslant 1.1$

58. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

---

59. Utilice series para evaluar el límite siguiente.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

60. La fuerza debida a la gravedad que actúa sobre un objeto de masa m a una altura h arriba de la superficie de la Tierra es

$$F = \frac{mgR^2}{(R + h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad para un objeto en la superficie de la Tierra.

(a) Exprese F como una serie en potencias de h/R.

(b) Observe que si aproxima F con el primer término de la serie, se obtiene la expresión $F \approx mg$ que se usa por lo común cuando h es mucho más pequeña que R. Aplique el teorema de la estimación de la serie alternante para calcular los valores de h para los cuales la aproximación $F \approx mg$ difiere menos de 1% del valor real. (Use $R = 6400$ km.)

61. Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para toda x.

(a) Si f es una función impar, demuestre que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$$

(b) Si f es una función par, demuestre que

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

62. Si $f(x) = e^{x^2}$, demuestre que $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

Problemas adicionales

Antes de ver la solución del ejemplo, cúbrala e intente resolver el problema por sí mismo.

EJEMPLO Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$.

SOLUCIÓN El principio de resolución de problemas es relevante aquí ya que hay que *reconocer algo familiar*. ¿La serie dada se parece a alguna que ya conozca? Bueno, tiene algunos ingredientes en común con la serie de Maclaurin para la función exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Se puede hacer que esta serie se parezca más reemplazando x por $x + 2$:

$$e^{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} = 1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \cdots$$

Pero aquí el exponente en el numerador coincide con el factorial del número en el denominador. Para hacer que esto pase en la serie dada, se multiplicará y dividirá por $(x+2)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = \frac{1}{(x+2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+3}}{(n+3)!}$$

$$= (x+2)^{-3}\left[\frac{(x+2)^3}{3!} + \frac{(x+2)^4}{4!} + \cdots\right]$$

Vea que la serie entre paréntesis es justamente la serie para e^{x+2} con los tres primeros términos faltantes. Por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = (x+2)^{-3}\left[e^{x+2} - 1 - (x+2) - \frac{(x+2)^2}{2!}\right]$$ ■

Problemas

1. Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$, encuentre $f^{(15)}(0)$.

2. Una función f está definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

¿Dónde es continua f?

3. (a) Demuestre que $\tan \frac{1}{2}x = \cot \frac{1}{2}x - 2 \cot x$.
(b) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

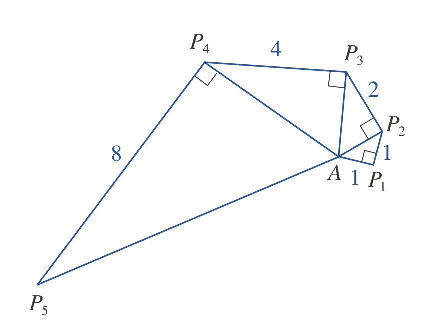
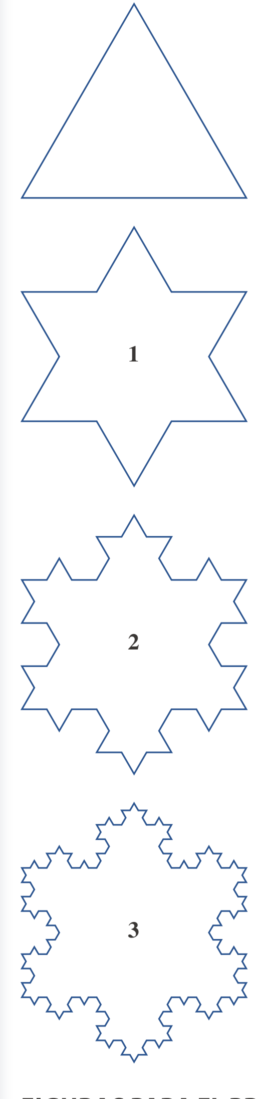


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

4. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de puntos determinados de acuerdo con la figura. Por tanto $|AP_1| = 1$, $|P_nP_{n+1}| = 2^{n-1}$ y el ángulo AP_nP_{n+1} es un ángulo recto. Calcule $\lim_{n\to\infty} \angle P_nAP_{n+1}$.



FIGURAS PARA EL PROBLEMA 5

5. Para construir la **curva del copo de nieve**, inicie con un triángulo equilátero de lados de longitud igual a 1. El paso 1 de la construcción consta de dividir cada lado en tres partes iguales, construir un triángulo equilátero en la parte media y luego borrar la parte media (véase la figura). El paso 2 es repetir el paso 1 en cada lado del polígono resultante. Se repite este procedimiento en cada paso posterior. La curva del copo de nieve es la curva que resulta de repetir este proceso indefinidamente.

(a) Sean s_n, l_n y p_n, respectivamente, el número de lados, la longitud de un lado y la longitud total de la curva de aproximación n-ésima (la curva obtenida después del paso n del trazo). Encuentre fórmulas para s_n, l_n y p_n.

(b) Demuestre que $p_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

(c) Sume una serie infinita para encontrar el área encerrada por la curva del copo de nieve.

Nota: los incisos (b) y (c) demuestran que la curva del copo de nieve es infinitamente larga pero encierra un área finita.

6. Calcule la suma de la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

donde los términos son los recíprocos de los enteros positivos cuyos factores primos son 2s y 3s.

7. (a) Demuestre que para $xy \neq -1$,

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy}$$

si el miembro izquierdo se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

(b) Demuestre que $\arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \pi/4$.

(c) Deduzca la fórmula siguiente de John Machin (1680-1751):

$$4 \arctan \tfrac{1}{5} - \arctan \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Utilice la serie de Maclaurin del arctan para demostrar que

$$0.1973955597 < \arctan \tfrac{1}{5} < 0.1973955616$$

(e) Demuestre que

$$0.004184075 < \arctan \tfrac{1}{239} < 0.004184077$$

(f) Deduzca que el valor siguiente es correcto con siete decimales $\pi \approx 3.1415927$.

Machin aplicó este método en 1706 para determinar π con 100 decimales. Recientemente, con la ayuda de computadoras, se ha calculado cada vez con mayor exactitud el valor de π. ¡En 2013 Shigeru Kondo y Alexander Yee calcularon el valor de π con más de 12 billones de decimales!

8. (a) Demuestre una fórmula similar a la del problema 7(a), pero que contenga arccot en lugar de arctan.

(b) Calcule la suma de la serie $\Sigma_{n=0}^{\infty} \operatorname{arccot}(n^2 + n + 1)$.

9. Use el resultado del problema 7(a) para encontrar la suma de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} \arctan(2/n^2)$.

10. Si $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right) = 0$$

Si no ve cómo demostrarlo, intente la estrategia de resolución de problemas *usando analogías* (véase la página 71). Intente los casos especiales $k = 1$ y $k = 2$ primero. Si puede ver cómo demostrar la afirmación para estos casos, probablemente verá cómo demostrarla en general.

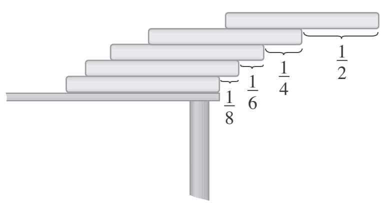
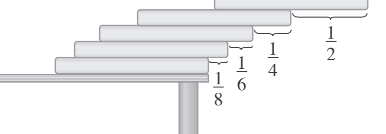
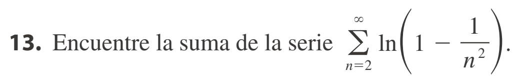



FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

11. Determine el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ y calcule la suma.

12. Suponga que tiene una gran cantidad de libros, todos del mismo tamaño, y que los apila en el borde de una mesa, y que cada libro sobresale un poco más del borde de la mesa que el libro anterior. Demuestre que es posible hacerlo de tal manera que el libro que quede hasta encima está por completo más allá del borde de la mesa. En efecto, muestre que el libro de hasta encima se puede acomodar a cualquier distancia más allá del borde de la mesa si la pila de libros tiene la altura suficiente. Utilice el método siguiente para apilar los libros: la mitad del largo del libro de hasta arriba sobresale del segundo libro. El segundo libro sobresale solo un cuarto de su largo con respecto al libro tercero. El tercer libro sobresale un sexto de su largo con respecto al libro cuarto, y así sucesivamente. (Inténtelo usted mismo con un mazo de cartas.) Considere el centro de masa.



13. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

14. Si $p > 1$, evalúe la expresión

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$

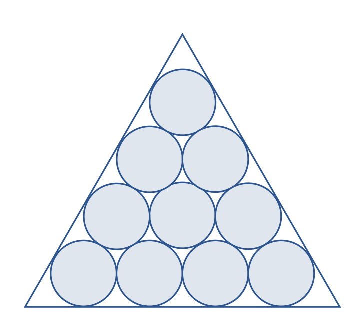


FIGURA PARA EL PROBLEMA 15

15. Suponga que círculos de igual diámetro están acomodados apretadamente en n filas dentro de un triángulo equilátero. (La figura ilustra el caso $n = 4$.) Si A es el área del triángulo y A_n es el área total ocupada por las n filas de círculos, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

16. Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante las ecuaciones

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.



17. Si la curva $y = e^{-x/10} \operatorname{sen} x$, $x \geqslant 0$, se rota alrededor del eje x, el sólido resultante se parece a una cadena infinita decreciente de cuentas.

(a) Determine el volumen exacto de n-ésima cuenta. (Utilice, ya sea una tabla de integrales o un sistema algebraico computacional.)

(b) Encuentre el volumen total de las cuentas.

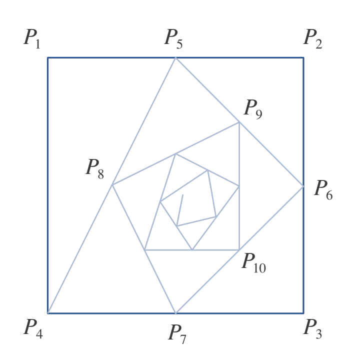
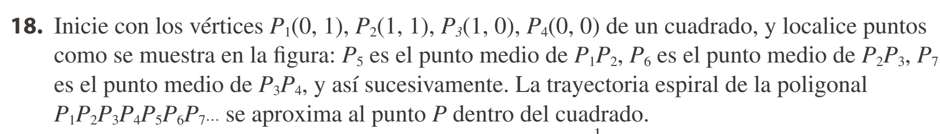


FIGURA PARA EL PROBLEMA 18



18. Inicie con los vértices $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ de un cuadrado, y localice puntos como se muestra en la figura: P_5 es el punto medio de P_1P_2, P_6 es el punto medio de P_2P_3, P_7 es el punto medio de P_3P_4, y así sucesivamente. La trayectoria espiral de la poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7\ldots$ se aproxima al punto P dentro del cuadrado.

(a) Si las coordenadas de P_n son (x_n, y_n), demuestre que $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$ y encuentre una ecuación similar para las coordenadas y.

(b) Determine las coordenadas de P.

19. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

20. Realice los pasos siguientes para demostrar que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \ln 2$$

(a) Use la fórmula para la suma de una serie geométrica finita (11.2.3) para obtener una expresión para

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1}$$

(b) Integre el resultado del inciso (a) de 0 a 1 para obtener una expresión para

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

como una integral.

(c) Del inciso (b) deduzca que

$$\left| \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right| < \int_0^1 x^{2n}\, dx$$

(d) Utilice el inciso (c) para demostrar que la suma de la serie dada es ln 2.

21. Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \cdots = 0$$

[*Sugerencia*: considere los casos $x \geqslant 0$ y $x < 0$ por separado.]

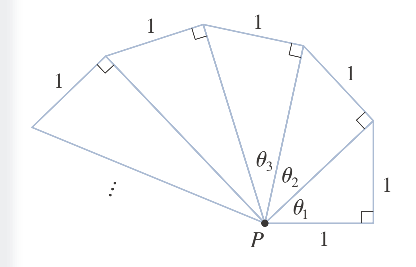
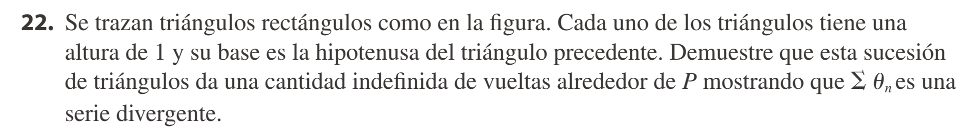


FIGURA PARA EL PROBLEMA 22



22. Se trazan triángulos rectángulos como en la figura. Cada uno de los triángulos tiene una altura de 1 y su base es la hipotenusa del triángulo precedente. Demuestre que esta sucesión de triángulos da una cantidad indefinida de vueltas alrededor de P mostrando que $\Sigma\, \theta_n$ es una serie divergente.

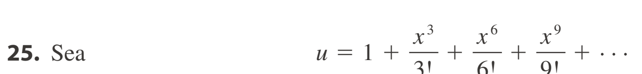
23. Considere la serie cuyos términos son los recíprocos de los enteros positivos que se pueden escribir con la notación de base 10 sin usar el dígito 0. Demuestre que esta serie es convergente y que la suma es menor que 90.

24. (a) Demuestre que la serie de Maclaurin de la función es

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \qquad \text{es} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci, es decir, $f_1 = 1, f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. [*Sugerencia*: escriba $x/(1 - x - x^2) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ y multiplique ambos lados de esta ecuación por $1 - x - x^2$.]

(b) Determine una fórmula explícita para el n-ésimo número de Fibonacci, escribiendo $f(x)$ como una suma de fracciones parciales, y con ello, obtenga la serie de Maclaurin de una manera distinta.



25. Sea

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

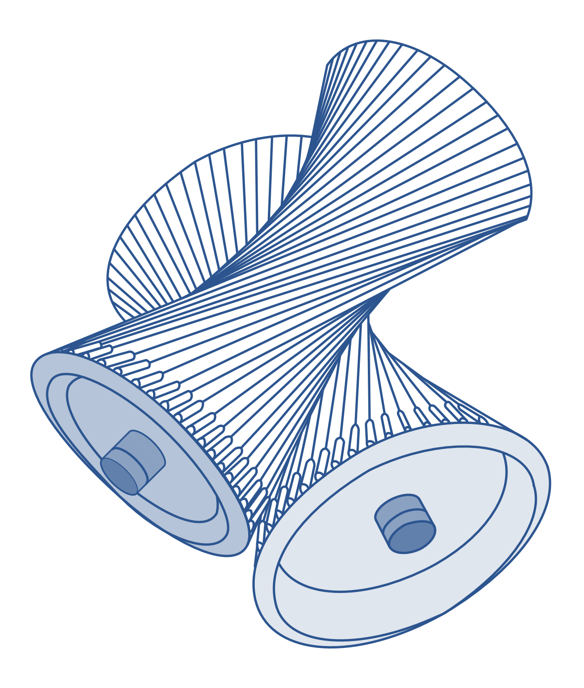
$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Demuestre que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

26. Demuestre que si $n > 1$, la n-ésima suma parcial de la serie armónica no es un entero.

Sugerencia: sea 2^k la máxima potencia de 2 que es menor o igual a n y sea M el producto de todos los enteros impares que sean menores o iguales a n. Suponga que $s_n = m$, un entero. Entonces $M2^ks_n = M2^km$. El lado derecho de esta ecuación es par. Demuestre que el lado izquierdo es impar al demostrar que cada uno de sus términos es un entero par, excepto el último.

12 Vectores y la geometría del espacio



Cada uno de estos engranajes tiene la forma de un hiperboloide, tipo de superficie que se estudiará en la sección 12.6. Esta forma permite a los engranajes transmitir movimiento entre ejes sesgados (ni paralelos ni intersecantes).

EN ESTE CAPÍTULO SE PRESENTARÁN los vectores y sistemas de coordenadas para el espacio tridimensional. Este será el fundamento para el estudio del cálculo de funciones de dos variables en el capítulo 14, porque la gráfica de estas funciones es una superficie en el espacio. En este capítulo se verá que los vectores ofrecen descripciones particularmente simples de rectas y planos en el espacio.

12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales

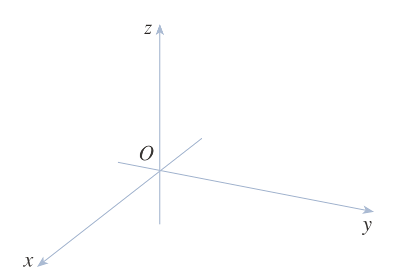


FIGURA 1
Ejes de coordenadas

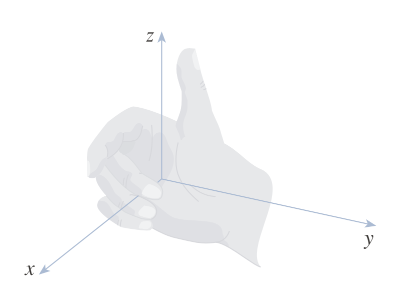


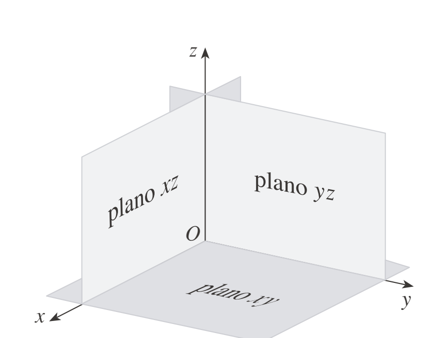
FIGURA 2
Regla de la mano derecha

Espacio tridimensional

Para localizar un punto en un plano se necesitan dos números. Se sabe que cualquier punto en el plano se puede representar como un par ordenado (a, b) de números reales, donde a es la coordenada x y b es la coordenada y. Por esta razón, se dice que un plano es bidimensional. Para localizar un punto en el espacio se requieren tres números. Se representa cualquier punto en el espacio mediante una terna ordenada (a, b, c) de números reales.

Para representar puntos en el espacio, primero se eligen un punto fijo O (el origen) y tres rectas dirigidas que pasan por O y que son perpendiculares entre sí, llamadas **ejes de coordenadas** y denominadas eje x, eje y y eje z. Usualmente los ejes x y y se conciben como horizontales y el eje z como vertical y la orientación de los ejes se traza como en la figura 1. La dirección del eje z se determina por la **regla de la mano derecha**, como se ilustra en la figura 2: si usted dobla los dedos de la mano derecha alrededor del eje z en la dirección de una rotación de 90° contrarreloj del eje x positivo al eje y positivo, su pulgar apuntará en la dirección positiva del eje z.

Los tres ejes de coordenadas determinan los tres **planos coordenados** ilustrados en la figura 3(a). El plano xy es el plano que contiene los ejes x y y; el plano yz contiene los ejes y y z; el plano xz contiene los ejes x y z. Estos tres planos coordenados dividen el espacio en ocho partes, llamados **octantes**. El **primer octante**, al frente, está determinado por los ejes positivos.





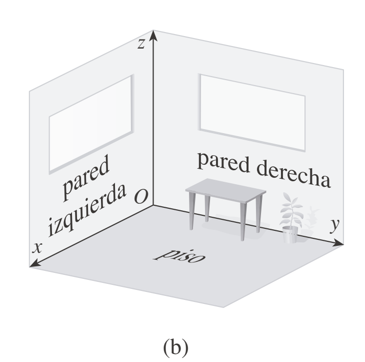


FIGURA 3 (a) Planos coordenados (b)

Como muchas personas tienen cierta dificultad para visualizar diagramas de figuras tridimensionales, podría resultar útil hacer lo siguiente [véase figura 3(b)]. Identifique cualquier esquina inferior de una habitación y denomínela el origen. La pared a su izquierda es el plano xz; la pared a su derecha, el plano yz y el piso, el plano xy. El eje x corre a lo largo de la intersección del piso y la pared izquierda. El eje y corre a lo largo de la intersección del piso y la pared derecha. El eje z corre hacia arriba desde el piso en dirección al techo a lo largo de la intersección de las dos paredes. Usted está situado en el primer octante y ahora puede imaginar otras siete habitaciones situadas en los otros siete octantes (tres en el mismo piso y cuatro en el piso inferior), todos ellos relacionados por el punto de esquina común O.

Ahora bien, si P es cualquier punto en el espacio, sea a la distancia (dirigida) del plano yz a P; b, la distancia del plano xz a P, y c la distancia del plano xy a P. Se representa el punto P con la terna ordenada (a, b, c) de números reales y se llaman a, b y c a las **coordenadas** de P; a es la coordenada x, b la coordenada y y c la coordenada z. Así, para localizar el punto (a, b, c) se comienza por el origen O y se desplaza a unidades a lo largo del eje x, luego b unidades en paralelo al eje y y, por último, c unidades en paralelo al eje z, como en la figura 4.

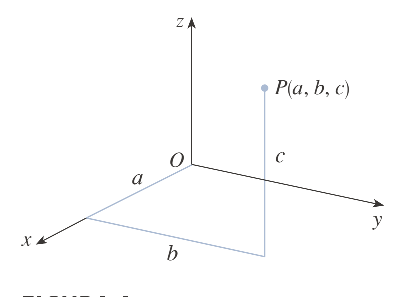


FIGURA 4

El punto $P(a, b, c)$ determina una caja rectangular como en la figura 5. Si se traza una recta perpendicular de P al plano xy se obtiene un punto Q con las coordenadas $(a, b, 0)$, llamado **proyección** de P en el plano xy. De igual manera, $R(0, b, c)$ y $S(a, 0, c)$ son las proyecciones de P en el plano yz y el plano xz, respectivamente.

Como ilustraciones numéricas, los puntos $(-4, 3, -5)$ y $(3, -2, -6)$ se trazan en la figura 6.

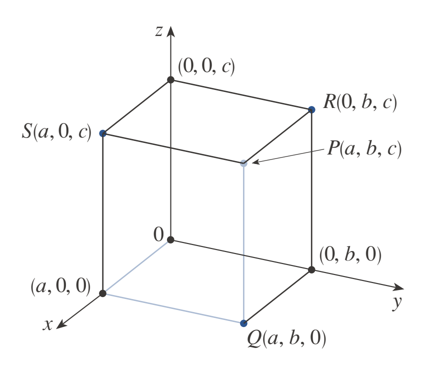
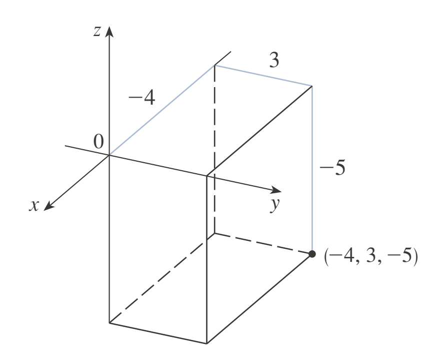


FIGURA 5



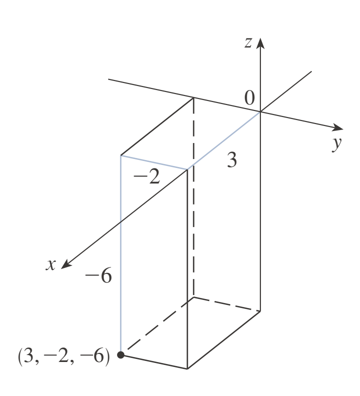


FIGURA 6

El producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales y se denota con $\mathbb{R}^3$. Se ha dado una correspondencia inyectiva entre puntos P en el espacio y ternas ordenadas (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$. Esto se llama **sistema de coordenadas rectangulares tridimensional**. Observe que, en términos de coordenadas, el primer octante puede describirse como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son todas positivas.

Superficies

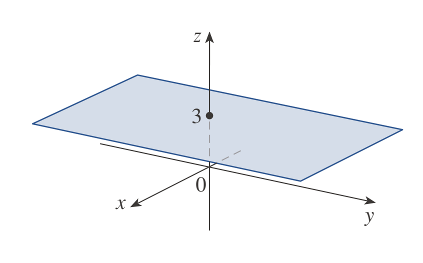
En geometría analítica bidimensional, la gráfica de una ecuación que implica x y y es una curva en $\mathbb{R}^2$. En geometría analítica tridimensional, una ecuación en x, y y z representa una *superficie* en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 1 ¿Qué superficies en $\mathbb{R}^3$ están representadas por las ecuaciones siguientes?

(a) $z = 3$ (b) $y = 5$

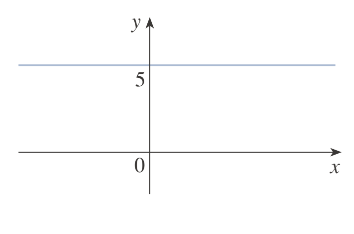
SOLUCIÓN

(a) La ecuación $z = 3$ representa el conjunto $\{(x, y, z) \mid z = 3\}$, el cual es el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ cuya coordenada z es 3 (x y y pueden ser cualquier valor). Este es el plano horizontal paralelo al plano xy y tres unidades arriba de él, como en la figura 7(a).



(a) $z = 3$, un plano en $\mathbb{R}^3$

(b) $y = 5$, un plano en $\mathbb{R}^3$



(c) $y = 5$, una línea en $\mathbb{R}^2$

FIGURA 7

(b) La ecuación $y = 5$ representa el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ cuya coordenada y es 5. Este es el plano vertical paralelo al plano xz y cinco unidades a la derecha de él, como en la figura 7(b). ■



NOTA Cuando se da una ecuación, debe deducirse del contexto si representa una curva en $\mathbb{R}^2$ o una superficie en $\mathbb{R}^3$. En el ejemplo 1, $y = 5$ representa un plano en $\mathbb{R}^3$, pero, desde luego, $y = 5$ también puede representar una recta en $\mathbb{R}^2$ si se trata con geometría analítica bidimensional. Véase la figura 7(b) y (c).

En general, si k es una constante, entonces $x = k$ representa un plano paralelo al plano yz, $y = k$ es un plano paralelo al plano xz y $z = k$ es un plano paralelo al plano xy. En la figura 5, las caras de la caja rectangular están formadas por los tres planos coordenados $x = 0$ (el plano yz), $y = 0$ (el plano xz) y $z = 0$ (el plano xy) y los planos $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

EJEMPLO 2

(a) ¿Qué puntos (x, y, z) satisfacen las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{y} \quad z = 3?$$

(b) ¿Qué representa la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ como una superficie en $\mathbb{R}^3$?

SOLUCIÓN

(a) Como $z = 3$, los puntos se encuentran en el plano horizontal $z = 3$ del ejemplo 1(a). Como $x^2 + y^2 = 1$, los puntos se encuentran en el círculo con radio 1 y centro en el eje z. Véase la figura 8.

(b) Dado que $x^2 + y^2 = 1$, sin ninguna restricción en z, se ve que el punto (x, y, z) podría situarse en un círculo en cualquier plano horizontal $z = k$. Así, la superficie $x^2 + y^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$ consta de todos los posibles círculos horizontales $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$ y es, por tanto, el cilindro circular con radio 1 cuyo eje es el eje z. Véase la figura 9.

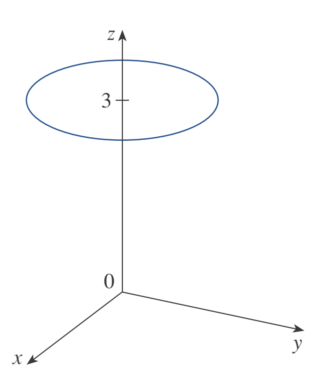




FIGURA 8
El círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 3$

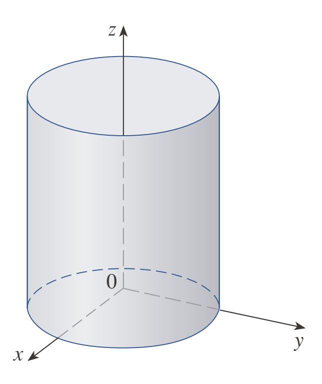


FIGURA 9
El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ ■

EJEMPLO 3 Describa y trace la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $y = x$.

SOLUCIÓN Esta ecuación representa el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas x y y son iguales, es decir $\{(x, x, z) \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$. Este es un plano vertical que interseca el plano xy en la recta $y = x$, $z = 0$. La porción de este plano que se ubica en el primer octante se traza en la figura 10. ■

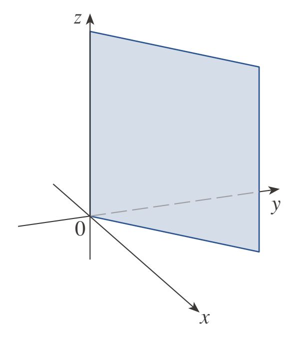


FIGURA 10
El plano $y = x$

Distancia y esferas

La fórmula conocida para la distancia entre dos puntos en un plano puede extenderse fácilmente a la fórmula tridimensional siguiente.

Fórmula de distancia en tres dimensiones La distancia $|P_1P_2|$ entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

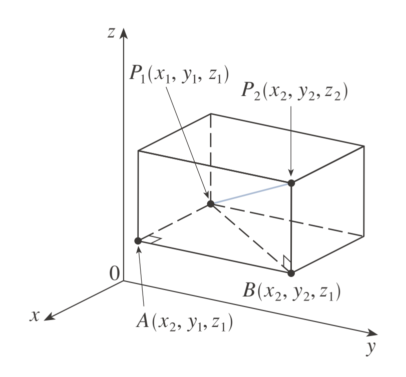


FIGURA 11

Para ver por qué esta fórmula es cierta, se ha construido una caja rectangular como en la figura 11, donde P_1 y P_2 son vértices opuestos y las caras de la caja son paralelas a los planos coordenados. Si $A(x_2, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_1)$ son los vértices de la caja indicada en la figura, entonces

$$|P_1A| = |x_2 - x_1| \qquad |AB| = |y_2 - y_1| \qquad |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

Como los triángulos P_1BP_2 y P_1AB son rectángulos, dos aplicaciones del teorema de Pitágoras dan

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$$

y

$$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

Si se combinan estas ecuaciones, se obtiene

$$|P_1P_2|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2$$

$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Por tanto,

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



EJEMPLO 4 La distancia del punto $P(2, -1, 7)$ al punto $Q(1, -3, 5)$ es

$$|PQ| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 + 1)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$ ■

EJEMPLO 5 Determine una ecuación de una esfera con radio r y centro $C(h, k, l)$.

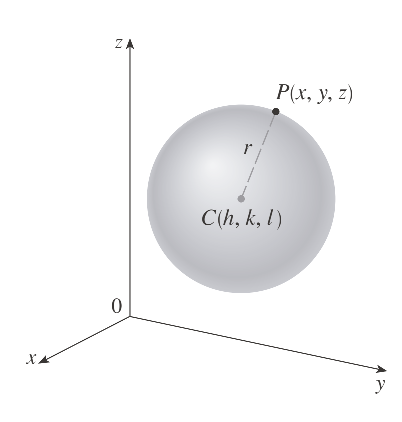


FIGURA 12

SOLUCIÓN Por definición, una esfera es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ cuya distancia desde C es r. (Véase la figura 12.) Así, P está en esa esfera si y solo si $|PC| = r$. Si se eleva al cuadrado ambos miembros, se tiene $|PC|^2 = r^2$ o

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$ ■

Será útil recordar el resultado del ejemplo 5.

Ecuación de una esfera Una ecuación de una esfera con centro $C(h, k, l)$ y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen O, entonces una ecuación de una esfera es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

EJEMPLO 6 Demuestre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ es la ecuación de una esfera y determine su centro y radio.

SOLUCIÓN Se puede reescribir la ecuación dada en la forma de una ecuación de una esfera si se completan los cuadrados:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8$$

Al comparar esta ecuación con la forma estándar, se ve que es la ecuación de una esfera con centro $(-2, 3, -1)$ y radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. ■

EJEMPLO 7 ¿Qué región en $\mathbb{R}^3$ está representada por las desigualdades siguientes?

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \qquad z \leqslant 0$$

SOLUCIÓN Las desigualdades

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$$

pueden reescribirse como

$$1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 2$$

así representan los puntos (x, y, z) cuya distancia desde el origen es de al menos 1 y a lo sumo 2. Pero también se da que $z \leqslant 0$, de manera que los puntos se sitúan en o debajo del plano xy. Así, las desigualdades dadas representan la región que se ubica entre (o en) las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y debajo de (o en) el plano xy. Esto se traza en la figura 13. ■

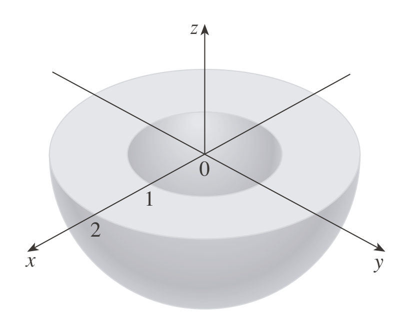


FIGURA 13

12.1 EJERCICIOS

1. Suponga que comienza en el origen, se mueve a lo largo del eje x una distancia de 4 unidades en la dirección positiva y después se mueve hacia abajo una distancia de 3 unidades. ¿Cuáles son las coordenadas de su posición?

2. Trace los puntos $(1, 5, 3)$, $(0, 2, -3)$, $(-3, 0, 2)$ y $(2, -2, -1)$ en un solo conjunto de ejes de coordenadas.

3. ¿Cuál de los puntos $A(-4, 0, -1)$, $B(3, 1, -5)$ y $C(2, 4, 6)$ está más cerca del plano yz? ¿Cuál de esos puntos se encuentra en el plano xz?

4. ¿Cuáles son las proyecciones del punto $(2, 3, 5)$ en los planos xy, yz y xz? Trace una caja rectangular con el origen y $(2, 3, 5)$ como vértices opuestos y con sus caras paralelas a los planos coordenados. Etiquete todos los vértices de la caja. Determine la longitud de la diagonal de la caja.

5. ¿Qué representa la ecuación $x = 4$ en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué representa en $\mathbb{R}^3$? Ilustre con diagramas.

6. ¿Qué representa la ecuación $y = 3$ en $\mathbb{R}^3$? ¿Qué representa $z = 5$? ¿Qué representa el par de ecuaciones $y = 3$, $z = 5$? En otras palabras, describa el conjunto de puntos (x, y, z) tal que $y = 3$ y $z = 5$. Ilustre con un diagrama.

7. Describa y trace la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $x + y = 2$.

8. Describa y trace la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $x^2 + z^2 = 9$.

9-10 Determine las longitudes de los lados del triángulo PQR. ¿Es este un triángulo rectángulo? ¿Es un triángulo isósceles?

9. $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$, $R(1, 2, 1)$

10. $P(2, -1, 0)$, $Q(4, 1, 1)$, $R(4, -5, 4)$

11. Determine si estos puntos se encuentran en una línea recta.
   (a) $A(2, 4, 2)$, $B(3, 7, —2)$, $C(1, 3, 3)$
   (b) $D(0, —5, 5)$, $E(1, —2, 4)$, $F(3, 4, 2)$

12. Determine la distancia de $(3, 7, -5)$ a cada uno de los elementos siguientes.
   (a) El plano xy
   (b) El plano yz
   (c) El plano xz
   (d) El eje x
   (e) El eje y
   (f) El eje z



13. Determine una ecuación de la esfera con centro $(1, -4, 3)$ y radio 5. ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?

14. Determine una ecuación de la esfera con centro $(2, -6, 4)$ y radio 5. Describa su intersección con cada uno de los planos coordenados.

15. Determine una ecuación de la esfera que pasa por el punto $(4, 3, -1)$ y tiene centro $(3, 8, 1)$.

16. Determine una ecuación de la esfera que pasa por el origen y cuyo centro es $(1, 2, 3)$.

17-20 Demuestre que cada una de estas ecuaciones representa una esfera y determine su centro y radio.

17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$

18. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z + 17 = 0$

19. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8x - 24z + 1$

20. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 10 + 6y + 12z$

---

21. (a) Pruebe que el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

(b) Determine las longitudes de las medianas del triángulo con vértices $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ y $C(4, 1, 5)$. (Una *mediana* de un triángulo es un segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.)

22. Determine una ecuación de una esfera si uno de sus diámetros tiene los puntos finales $(5, 4, 3)$ y $(1, 6, -9)$.

23. Determine ecuaciones de las esferas con centro $(2, -3, 6)$ que tocan (a) el plano xy, (b) el plano yz, (c) el plano xz.

24. Determine una ecuación de la esfera más grande con centro $(5, 4, 9)$ contenida en el primer octante.

25-38 Describa en palabras la región de $\mathbb{R}^3$ representada por cada ecuación (ecuaciones) o desigualdad.

25. $x = 9$

26. $x \geqslant -3$

27. $z < 8$

28. $z \geqslant -1$

29. $0 \leqslant z \leqslant 6$

30. $y^2 = 4$

31. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = -1$

32. $x^2 + y^2 = 4$

33. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

34. $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$

35. $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 5$

36. $y^2 + z^2 = 16$

37. $x^2 + z^2 \leqslant 9$

38. $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$

39-42 Escriba desigualdades para describir la región.

39. La región entre el plano yz y el plano vertical $x = 5$

40. El cilindro sólido que se encuentra sobre o debajo del plano $z = 8$ y sobre o arriba del disco en el plano xy con centro en el origen y radio 2

41. La región que consta de todos los puntos entre (pero no sobre) las esferas de radio r y R centradas en el origen, donde $r < R$

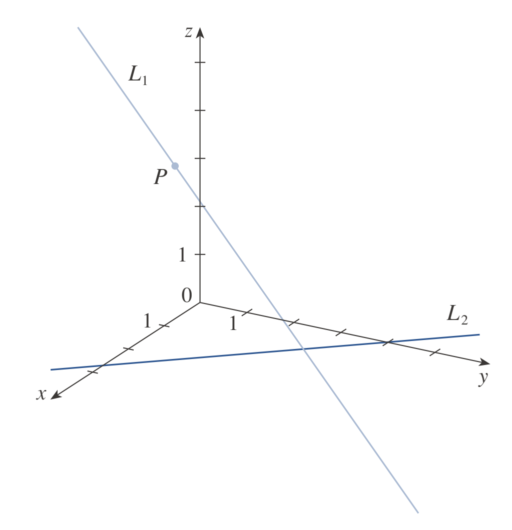
42. El hemisferio superior sólido de la esfera de radio 2 centrada en el origen

---

43. La figura muestra una recta L_1 en el espacio y una segunda recta L_2, la cual es la proyección de L_1 en el plano xy. (En otras palabras, los puntos en L_2 están directamente abajo, o arriba, de los puntos en L_1.)

(a) Determine las coordenadas del punto P en la recta L_1.

(b) Localice en el diagrama los puntos A, B y C, donde la recta L_1 interseca el plano xy, el plano yz y el plano xz, respectivamente.



44. Considere los puntos P tales que la distancia de P a $A(-1, 5, 3)$ sea el doble de la distancia de P a $B(6, 2, -2)$. Demuestre que el conjunto de todos esos puntos es una esfera y determine su centro y radio.

45. Determine una ecuación del conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos $A(-1, 5, 3)$ y $B(6, 2, -2)$. Describa ese conjunto.

46. Determine el volumen del sólido que se ubica dentro de las dos esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

47. Determine la distancia entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z - 11$.

48. Describa y trace un sólido con las propiedades siguientes. Cuando es iluminado por rayos paralelos al eje z, su sombra es un disco circular. Si los rayos son paralelos al eje y, su sombra es un cuadrado. Si los rayos son paralelos al eje x, su sombra es un triángulo isósceles.

12.2 Vectores

El término **vector** es usado por los científicos para indicar una cantidad (como desplazamiento, velocidad o fuerza) que posee tanto magnitud como dirección. Un vector suele representarse con una flecha o un segmento de recta dirigido. La longitud de la flecha representa la magnitud del vector y la flecha apunta en la dirección del vector. Se denota un vector imprimiendo una letra en negritas (**v**) o poniendo una flecha sobre la letra ($\vec{v}$).

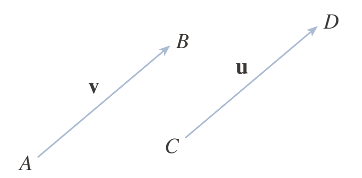


FIGURA 1
Vectores equivalentes

Por ejemplo, suponga que una partícula se mueve a lo largo de un segmento de recta del punto A al punto B. El **vector de desplazamiento v** correspondiente, el cual se muestra en la figura 1, tiene el **punto inicial** A (la cola) y el **punto terminal** B (la punta), lo que se indica escribiendo $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. Observe que el vector $\mathbf{u} = \overrightarrow{CD}$ tiene la misma longitud y la misma dirección que **v** aunque esté en una posición diferente. Se dice que **u** y **v** son **equivalentes** (o **iguales**) y se escribe $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. El **vector cero**, denotado por **0**, tiene longitud 0. Este es el único vector sin dirección específica.

Combinación de vectores

Suponga que una partícula se mueve de A a B, así que su vector de desplazamiento es $\overrightarrow{AB}$. Luego la partícula cambia de dirección y se mueve de B a C, con vector de desplazamiento $\overrightarrow{BC}$ como en la figura 2. El efecto combinado de estos desplazamientos es que la partícula se ha movido de A a C. El vector resultante de desplazamiento $\overrightarrow{AC}$ se llama la *suma* de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y se escribe

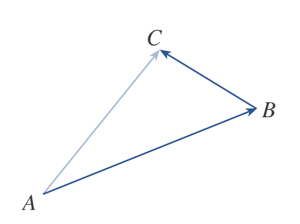


FIGURA 2

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

En general, se comienza con los vectores **u** y **v**, primero se mueve **v** de tal forma que su cola coincida con la punta de **u** y se defina la suma de **u** y **v** como sigue.

Definición de la adición de vectores Si **u** y **v** son vectores posicionados de tal manera que el punto inicial de **v** está en el punto terminal de **u**, entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector del punto inicial de **u** al punto terminal de **v**.

La definición de la adición de vectores se ilustra en la figura 3. Usted puede ver por qué esta definición suele llamarse la **ley del triángulo**.

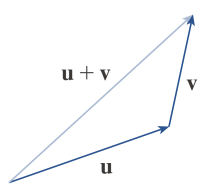


FIGURA 3
La ley del triángulo

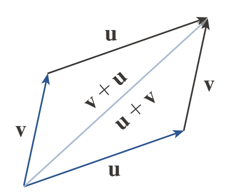


FIGURA 4
La ley del paralelogramo

En la figura 4 se comienza con los mismos vectores **u** y **v** como en la figura 3 y se traza otra copia de **v** con el mismo punto inicial que **u**. Al completar el paralelogramo, se observa que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Esto también da otra forma de construir la suma: si se coloca **u** y **v** de tal manera que comiencen en el mismo punto, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se ubica a lo largo de la diagonal del paralelogramo con **u** y **v** como lados. (Esto se llama **ley del paralelogramo**.)

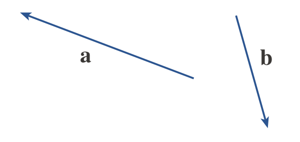


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Trace la suma de los vectores **a** y **b** que se muestran en la figura 5.

SOLUCIÓN Primero se mueve **b** y se coloca su cola en la punta de **a**, cuidando de trazar una copia de **b** que tenga la misma longitud y dirección. Luego se traza el vector

a + **b** [véase la figura 6(a)] comenzando en el punto inicial de **a** y terminando en el punto terminal de la copia de **b**.

O bien, se podría colocar **b** de tal modo que empiece donde comienza **a** y construir **a** + **b** por la ley del paralelogramo como en la figura 6(b).

TEC Visual 12.2 muestra cómo funcionan las leyes del triángulo y del paralelogramo para varios vectores **a** y **b**.

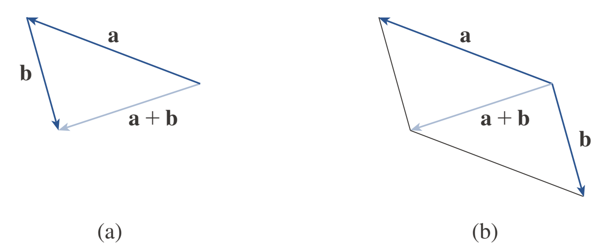


FIGURA 6 (a) (b)

Es posible multiplicar un vector por un número real c. (En este contexto al número real c se le llama **escalar** para distinguirlo de un vector.) Por ejemplo, si se quiere que 2**v** sea un vector igual a **v** + **v**, el cual tiene la misma dirección que **v** pero es dos veces más largo. En general, un vector por un escalar se multiplica como sigue.

Definición de la multiplicación por un escalar Si c es un escalar y **v** un vector, entonces el **múltiplo escalar** c**v** es el vector cuya longitud es $|c|$ veces la longitud de **v** y cuya dirección es la misma que **v** si $c > 0$ y opuesta a **v** si $c < 0$. Si $c = 0$ o **v** = **0**, entonces c**v** = **0**.

Esta definición se ilustra en la figura 7. Vea que los números reales operan aquí como factores de escalamiento; por eso se llaman escalares. Observe que dos vectores diferentes de cero son **paralelos** si son múltiplos escalares entre sí. En particular, el vector −**v** = (−1)**v** tiene la misma longitud que **v** pero apunta en la dirección opuesta. Se llama **negativo** de **v.**

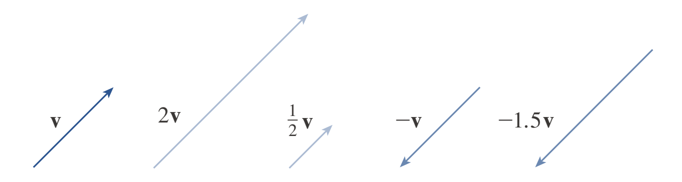
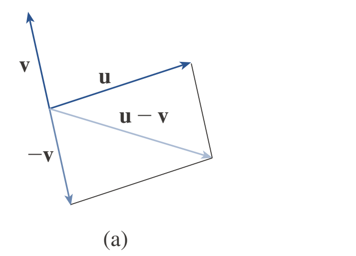


FIGURA 7
Múltiplos escalares de **v**

Por la **diferencia u − v** de dos vectores se entiende

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

Así, se puede construir **u** − **v** trazando primero el negativo de **v**, −**v**, y sumándolo después a **u** por la ley del paralelogramo como en la figura 8(a). O bien, como **v** + (**u** − **v**) = **u**, el vector **u** − **v**, cuando se suma **v**, da **u**. Así, se podría construir **u** − **v** como en la figura 8(b) por la ley del triángulo. Observe que si **u** y **v** comienzan en el mismo punto inicial, entonces **u** − **v** une la punta de **v** con la punta de **u**.



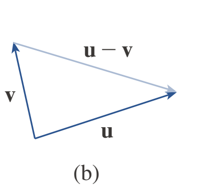


FIGURA 8
Trazo de **u** − **v**

(a) (b)





FIGURA 9

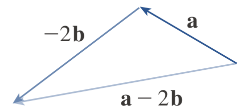


FIGURA 10

EJEMPLO 2 Si **a** y **b** son los vectores que se muestran en la figura 9, trace **a** − 2**b**.

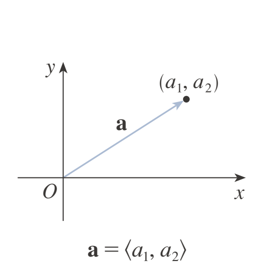
SOLUCIÓN Primero se traza el vector −2**b** apuntando en la dirección opuesta a **b** y del doble de su largo. Se le coloca con la cola en la punta de **a** y luego se emplea la ley del triángulo para trazar **a** + (−2**b**) como en la figura 10. ■

Componentes

Para ciertos propósitos es mejor introducir un sistema de coordenadas y tratar los vectores algebraicamente. Si se coloca el punto inicial de un vector **a** en el origen de un sistema de coordenadas rectangular, el punto terminal de **a** tiene coordenadas de la forma (a_1, a_2) o (a_1, a_2, a_3), dependiendo de si el sistema de coordenadas es bi o tridimensional (véase la figura 11). Estas coordenadas se llaman los **componentes** de **a** y se escribe

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \qquad \text{o} \qquad \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Se usa la notación $\langle a_1, a_2 \rangle$ para el par ordenado que se refiere a un vector para no confundirla con el par ordenado (a_1, a_2), que se refiere a un punto en el plano.



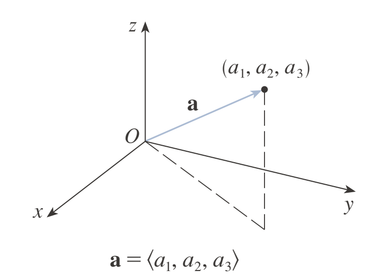


FIGURA 11 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

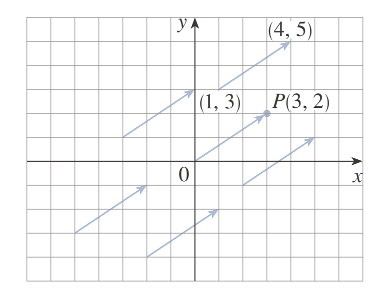


FIGURA 12
Representaciones de $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$

Por ejemplo, los vectores que aparecen en la figura 12 son todos ellos equivalentes al vector $\overrightarrow{OP} = \langle 3, 2 \rangle$ cuyo punto terminal es $P(3, 2)$. Lo que tienen en común es que el punto terminal se alcanza desde el punto inicial por un desplazamiento de tres unidades a la derecha y dos arriba. Todos estos vectores geométricos pueden concebirse como **representaciones** del vector algebraico $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$. La representación particular $\overrightarrow{OP}$ del origen al punto $P(3, 2)$ se llama **vector de posición** del punto P.

En tres dimensiones, el vector $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es el **vector de posición** del punto $P(a_1, a_2, a_3)$. (Véase la figura 13.) Considere cualquier otra representación $\overrightarrow{AB}$ de **a**, donde el punto inicial es $A(x_1, y_1, z_1)$ y el punto terminal es $B(x_2, y_2, z_2)$. Debe tener $x_1 + a_1 = x_2$, $y_1 + a_2 = y_2$, y $z_1 + a_3 = z_2$, de manera que $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, y $a_3 = z_2 - z_1$. Se tiene así el resultado siguiente.

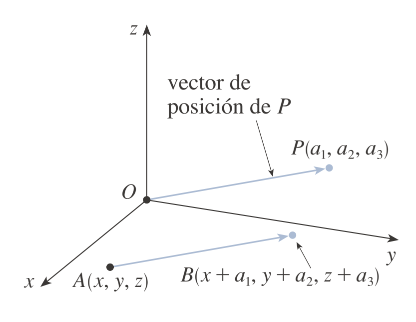


FIGURA 13
Representaciones de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

1 Dados los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, el vector **a** con representación $\overrightarrow{AB}$ es

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

EJEMPLO 3 Determine el vector representado por el segmento de recta dirigida con punto inicial $A(2, -3, 4)$ y punto terminal $B(-2, 1, 1)$.

SOLUCIÓN Por (1), el vector correspondiente a $\overrightarrow{AB}$ es

$$\mathbf{a} = \langle -2 -2, 1 - (-3), 1 - 4 \rangle = \langle -4, 4, -3 \rangle$$ ■

La **magnitud** o **longitud** del vector **v** es la longitud de cualquiera de sus representaciones y se denota con el símbolo $|\mathbf{v}|$ o $\|\mathbf{v}\|$. Por el uso de la fórmula de la distancia para calcular la longitud de un segmento OP, se obtienen las fórmulas siguientes.

La longitud del vector bidimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La longitud del vector tridimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

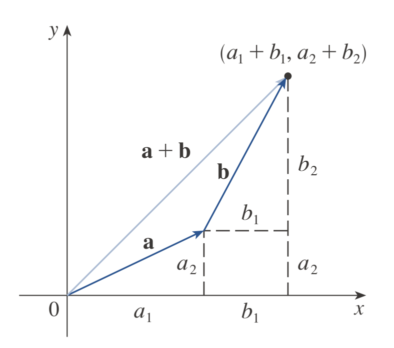


FIGURA 14

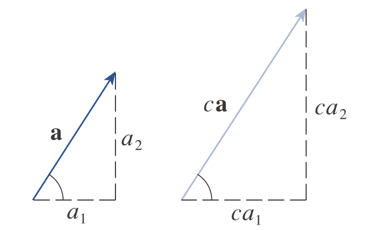


FIGURA 15

¿Cómo se suman algebraicamente los vectores? La figura 14 muestra que si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, la suma es $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, al menos para el caso en que los componentes son positivos. En otras palabras, *para sumar vectores algebraicos se suman los componentes correspondientes*. De igual manera, *para restar vectores se restan los componentes correspondientes*. En los triángulos similares de la figura 15 se ve que los componentes de $c\mathbf{a}$ son ca_1 y ca_2. Así, *para multiplicar un vector por un escalar se multiplica cada componente por ese escalar*.

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$$

De igual manera, para vectores tridimensionales,

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle - \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

$$c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

EJEMPLO 3 Si $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, determine $|\mathbf{a}|$ y los vectores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{b}$ y $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.

SOLUCIÓN

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle \\ &= \langle 4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2, 1, 8 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \langle 4, 0, 3 \rangle - \langle -2, 1, 5 \rangle \\ &= \langle 4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5 \rangle = \langle 6, -1, -2 \rangle \end{aligned}$$

$$3\mathbf{b} = 3\langle -2, 1, 5 \rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(5) \rangle = \langle -6, 3, 15 \rangle$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} &= 2\langle 4, 0, 3 \rangle + 5\langle -2, 1, 5 \rangle \\ &= \langle 8, 0, 6 \rangle + \langle -10, 5, 25 \rangle = \langle -2, 5, 31 \rangle \end{aligned}$$

■

Vectores en n dimensiones se usan para enlistar varias cantidades en forma organizada. Por ejemplo, los componentes de un vector hexadimensional

$$\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rangle$$

podrían representar los precios de seis diferentes ingredientes requeridos para hacer un producto particular. Vectores tetradimensionales $\langle x, y, z, t \rangle$ se emplean en la teoría de la relatividad, donde los tres primeros componentes especifican una posición en el espacio y el cuarto representa el tiempo.

Se denota con V_2 el conjunto de todos los vectores bidimensionales y con V_3 el conjunto de todos los vectores tridimensionales. Más en general, después se tendrá que considerar el conjunto V_n de todos los vectores n-dimensionales. Un vector n-dimensional es una n-ada ordenada:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales llamados componentes de $\mathbf{a}$. La adición y la multiplicación por un escalar se definen en términos de componentes justo como en los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Propiedades de los vectores Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores en V_n y c y d son escalares, entonces

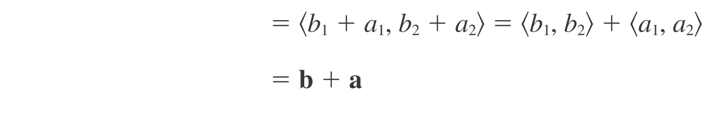
1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ **2.** $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ **4.** $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

5. $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$ **6.** $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$

7. $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$ **8.** $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Estas ocho propiedades de los vectores pueden verificarse rápidamente en términos geométricos o algebraicos. Por ejemplo, la propiedad 1 puede verse en la figura 4 (es equivalente a la ley del paralelogramo) o como sigue para el caso $n = 2$:



$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\ &= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{a} \end{aligned}$$

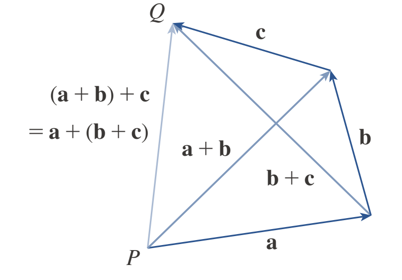


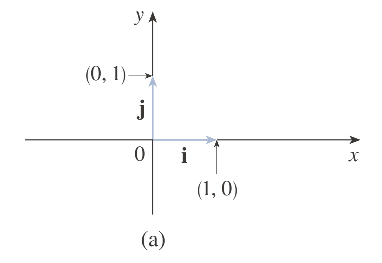
FIGURA 16

Se puede ver por qué la propiedad 2 (la ley asociativa) es cierta si se examina la figura 16 y se aplica la ley del triángulo varias veces: el vector $\overrightarrow{PQ}$ se obtiene ya sea construyendo primero $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y después sumando $\mathbf{c}$ o sumando $\mathbf{a}$ al vector $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Tres vectores en V_3 desempeñan un papel especial. Sea

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Estos vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se llaman **vectores de base estándar**. Tienen longitud 1 y apuntan en la dirección de los ejes x, y y z positivos. De igual forma, en dos dimensiones se definió $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. (Véase la figura 17.)



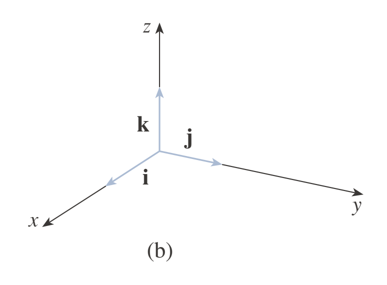
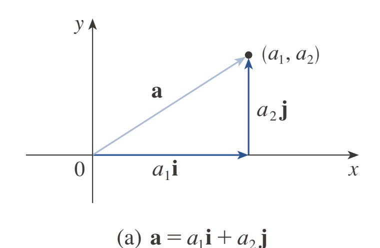
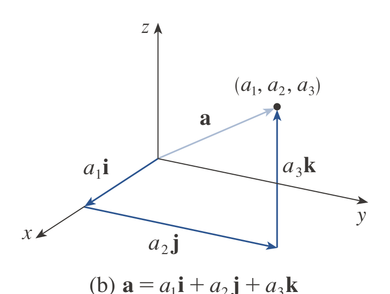


FIGURA 17
Vectores de base estándar en V_2 y V_3



(a) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$



(b) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

FIGURA 18

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, se puede escribir

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle a_1, 0, 0\rangle + \langle 0, a_2, 0\rangle + \langle 0, 0, a_3\rangle$$

$$= a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle$$

2 $$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Así, cualquier vector en V_3 puede expresarse en términos de **i**, **j** y **k**. Por ejemplo,

$$\langle 1, -2, 6\rangle = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

De igual modo, en dos dimensiones, se puede escribir

3 $$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

Véase la figura 18 para la interpretación geométrica de las ecuaciones 3 y 2 y compare con la figura 17.

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, exprese el vector $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ en términos de **i**, **j** y **k**.

SOLUCIÓN Usando las propiedades 1, 2, 5, 6 y 7 de los vectores, se tiene

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k})$$

$$= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 21\mathbf{k} = 14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$ ■

Gibbs

Josiah Willard Gibbs (1839-1903), profesor de física matemática en Yale College, publicó el primer libro sobre vectores, *Vector Analysis*, en 1881. Objetos más complicados, llamados cuaterniones, habían sido previamente inventados por Hamilton como herramientas matemáticas para describir el espacio, pero no eran fáciles de usar por los científicos. Los cuaterniones tienen una parte escalar y una parte vectorial. La idea de Gibbs fue usar la parte vectorial por separado. Maxwell y Heaviside tuvieron ideas similares, pero el enfoque de Gibbs ha resultado ser el modo más conveniente de estudiar el espacio.

Un **vector unitario** es un vector cuya longitud es 1. Por ejemplo, **i**, **j** y **k** son vectores unitarios. En general, si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces el vector unitario con igual dirección que **a** es

4 $$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Para comprobar esto, sea $c = 1/|\mathbf{a}|$. Entonces $\mathbf{u} = c\mathbf{a}$ y c es un escalar positivo, así que **u** tiene la misma dirección que **a**. Asimismo,

$$|\mathbf{u}| = |c\mathbf{a}| = |c||\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1$$

EJEMPLO 6 Determine el vector unitario en la dirección del vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN El vector dado tiene longitud

$$|2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

así, por la ecuación 4, el vector unitario con la misma dirección es

$$\tfrac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}$$ ■

Aplicaciones

Los vectores son útiles en muchos aspectos de la física y la ingeniería. En el capítulo 13 se verá cómo describen la velocidad y aceleración de objetos que se mueven en el espacio. Aquí se examinarán las fuerzas.

Una fuerza se representa con un vector porque tiene tanto magnitud (medida en libras o newtons) como dirección. Si varias fuerzas actúan sobre un objeto, la **fuerza resultante** experimentada por el objeto es la suma vectorial de esas fuerzas.



EJEMPLO 7 Una carga con masa de 100 kg cuelga de dos alambres, como se muestra en la figura 19. Determine las tensiones (fuerzas) $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en ambos alambres y las magnitudes de las tensiones.

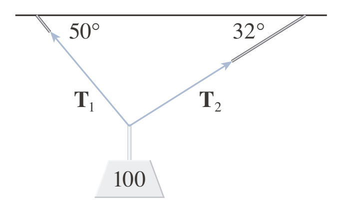


FIGURA 19

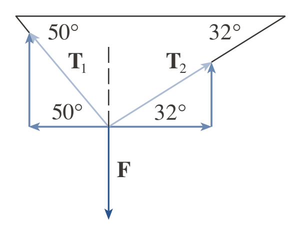


FIGURA 20

SOLUCIÓN Primero se expresa $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en términos de sus componentes horizontales y verticales. De la figura 20 se deduce que

5 $$\mathbf{T}_1 = -|\mathbf{T}_1| \cos 50° \,\mathbf{i} + |\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° \,\mathbf{j}$$

6 $$\mathbf{T}_2 = |\mathbf{T}_2| \cos 32° \,\mathbf{i} + |\mathbf{T}_2| \operatorname{sen} 32° \,\mathbf{j}$$

La fuerza de gravedad que actúa sobre la carga es $\mathbf{F} = -100(9.8)\mathbf{j} = -980\mathbf{j}$. La resultante $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ de las tensiones sirve de contrapeso a $\mathbf{F}$, así que se debe tener

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = -\mathbf{F} = 980\mathbf{j}$$

Por tanto,

$$\left(-|\mathbf{T}_1| \cos 50° + |\mathbf{T}_2| \cos 32°\right) \mathbf{i} + \left(|\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° + |\mathbf{T}_2| \operatorname{sen} 32°\right) \mathbf{j} = 980\,\mathbf{j}$$

Igualando componentes, se tiene

$$-|\mathbf{T}_1| \cos 50° + |\mathbf{T}_2| \cos 32° = 0$$

$$|\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° + |\mathbf{T}_2| \operatorname{sen} 32° = 980$$

Si se despeja $|\mathbf{T}_2|$ en la primera de estas ecuaciones y se sustituye en la segunda, se obtiene

$$|\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° + \frac{|\mathbf{T}_1| \cos 50°}{\cos 32°} \operatorname{sen} 32° = 980$$

Así, las magnitudes de las tensiones son

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{980}{\operatorname{sen} 50° + \tan 32° \cos 50°} \approx 839 \text{ N}$$

y $$|\mathbf{T}_2| = \frac{|\mathbf{T}_1| \cos 50°}{\cos 32°} \approx 636 \text{ N}$$

Al sustituir estos valores en (5) y (6), se obtienen los vectores de tensión

$$\mathbf{T}_1 \approx -539\mathbf{i} + 643\mathbf{j}$$

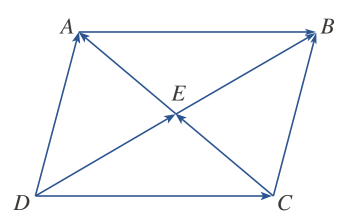
$$\mathbf{T}_2 \approx 539\mathbf{i} + 337\mathbf{j}$$ ■

12.2 EJERCICIOS

1. ¿Las cantidades siguientes son vectores o escalares? Explique su respuesta.
(a) El costo de un boleto de cine
(b) La corriente de un río
(c) La trayectoria de vuelo inicial de Houston a Dallas
(d) La población mundial

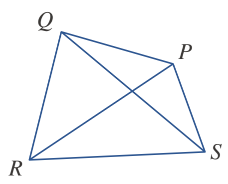
2. ¿Cuál es la relación entre el punto (4, 7) y el vector $\langle 4, 7\rangle$? Ilustre con un diagrama.

3. Mencione todos los vectores iguales en el paralelogramo que se muestra aquí.

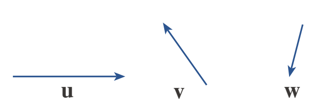


4. Escriba cada combinación de vectores como un vector.

(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$
(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$



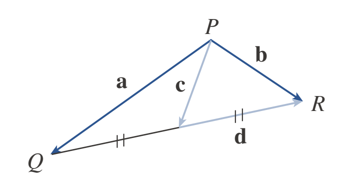
5. Copie los vectores de la figura y úselos para trazar los vectores siguientes.
(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$
(c) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
(e) $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$ (f) $\mathbf{u} - \mathbf{w} - \mathbf{v}$



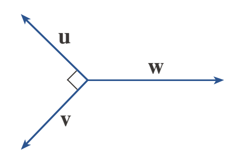
6. Copie los vectores de la figura y úselos para trazar los vectores siguientes.
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
(c) $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ (d) $-3\mathbf{b}$
(e) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ (f) $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$



7. En la figura, la punta de **c** y la cola de **d** son ambos el punto medio de QR. Exprese **c** y **d** en términos de **a** y **b**.



8. Si los vectores en la figura satisfacen $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$, ¿qué es $|\mathbf{w}|$?



9-14 Determine un vector **a** con representación dada por el segmento de recta dirigida $\overrightarrow{AB}$. Trace $\overrightarrow{AB}$ y la representación equivalente comenzando en el origen.

9. $A(-2, 1)$, $B(1, 2)$
10. $A(-5, -1)$, $B(-3, 3)$
11. $A(3, -1)$, $B(2, 3)$
12. $A(3, 2)$, $B(1, 0)$
13. $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$
14. $A(0, 6, -1)$, $B(3, 4, 4)$

15-18 Determine la suma de los vectores dados e ilustre geométricamente.

15. $\langle -1, 5\rangle$, $\langle 6, -1\rangle$
16. $\langle 3, -3\rangle$, $\langle 1, 6\rangle$
17. $\langle 3, 0, 1\rangle$, $\langle 0, 8, 0\rangle$
18. $\langle 1, 3, -2\rangle$, $\langle 0, 0, 6\rangle$

19-22 Determine $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $4\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

19. $\mathbf{a} = \langle -3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 9, -1\rangle$
20. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
21. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$
22. $\mathbf{a} = \langle 8, 1, -4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -2, 1\rangle$

23-25 Determine un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

23. $\langle 6, -2\rangle$
24. $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
25. $8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

26. Determine el vector con la misma dirección que $\langle 6, 2, -3\rangle$, pero con longitud 4.

27-28 ¿Cuál es el ángulo entre el vector dado y la dirección positiva del eje x?

27. $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$
28. $8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

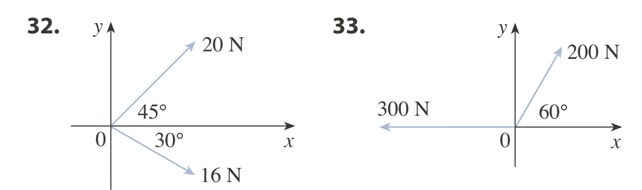
29. Si **v** se ubica en el primer cuadrante y hace un ángulo $\pi/3$ con el eje x positivo y $|\mathbf{v}| = 4$, determine **v** en forma de componente.

30. Si un niño tira de un trineo en la nieve sobre un camino parejo con una fuerza de 50 N ejercida a un ángulo de 38° sobre la horizontal, determine los componentes horizontal y vertical de la fuerza.

31. Un mariscal de campo lanza un balón con un ángulo de elevación de 40° y una rapidez de 60 pies/s. Determine los componentes horizontal y vertical del vector de velocidad.

32-33 Determine la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma con el eje x positivo.

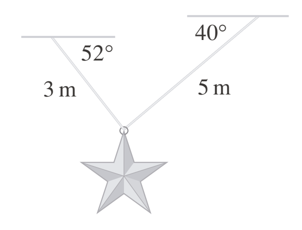
32. **33.**



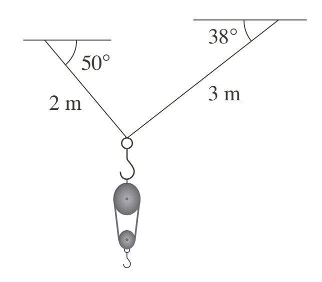
34. La magnitud de un vector de velocidad se llama *rapidez*. Suponga que un viento sopla *desde* la dirección N45°O con una rapidez de 50 km/h. (Esto significa que la dirección desde la que sopla el viento se encuentra 45° al oeste de la dirección norte.) Un piloto conduce un avión en la dirección N60°E a una rapidez propia (rapidez en aire quieto) de 250 km/h. El *curso real*, o *trayectoria*, del avión es la dirección de la resultante de los vectores de velocidad del avión y el viento. La *rapidez en tierra* del avión es la magnitud de la resultante. Determine el curso real y la rapidez en tierra del avión.

35. Una mujer camina al oeste en la cubierta de un barco a 5 km/h. El barco se dirige al norte a una rapidez de 35 km/h. Determine la rapidez y dirección de la mujer en relación con la superficie del agua.

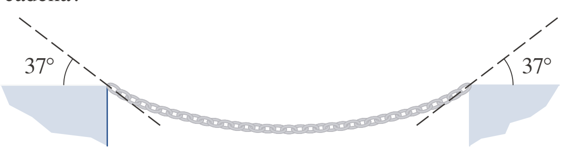
36. Sogas de 3 y 5 m de longitud son sujetadas a un elemento decorativo suspendido sobre una plaza pública. La decoración tiene una masa de 5 kg. Las sogas, sujetadas a diferentes alturas, forman ángulos de 52° y 40° con la horizontal. Determine la tensión en cada alambre y la magnitud de cada tensión.



37. Un aparejo de poleas está suspendido en una bodega con sogas de 2 y 3 m de longitud. El aparejo pesa 350 N. Las sogas, sujetadas a diferentes alturas, forman ángulos de 50° y 38° con la horizontal. Determine la tensión en cada soga y la magnitud de cada tensión.



38. La tensión **T** en cada extremo de una cadena tiene una magnitud de 25 N (véase la figura). ¿Cuál es el peso de la cadena?



39. Un barquero desea cruzar un canal de 3 km de ancho y quiere desembarcar en un punto 2 km río arriba de su punto de partida. La corriente del canal fluye a 3.5 km/h y la rapidez de la embarcación es de 13 km/h.
(a) ¿Qué dirección debe seguir el barquero?
(b) ¿Cuánto tiempo durará el trayecto?

40. Tres fuerzas actúan sobre un objeto. Dos de ellas están en un ángulo de 100° entre sí y tienen magnitudes de 25 N y 12 N. La tercera es perpendicular al plano de esas dos fuerzas y tiene una magnitud de 4 N. Calcule la magnitud de la fuerza que contrarrestaría exactamente a estas tres fuerzas.

41. Determine los vectores unitarios paralelos a la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (2, 4).

42. (a) Determine los vectores unitarios paralelos a la recta tangente a la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/6, 1)$.
(b) Determine los vectores unitarios perpendiculares a esa recta tangente.
(c) Trace la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ y los vectores de los incisos (a) y (b) comenzando en $(\pi/6, 1)$.

43. Si A, B y C son los vértices de un triángulo, determine

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

44. Sea C el punto del segmento de recta AB que está dos veces más lejos de B que de A. Si $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, y $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, demuestre que $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$.

45. (a) Trace los vectores $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 7, 1 \rangle$.
(b) Demuestre, por medio de un diagrama, que hay escalares s y t tales que $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.
(c) Use el diagrama para estimar los valores de s y t.
(d) Determine los valores exactos de s y t.

46. Suponga que **a** y **b** son vectores diferentes de cero no paralelos y que **c** es cualquier vector en el plano determinado por **a** y **b**. Dé un argumento geométrico para demostrar que **c** puede escribirse como $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para escalares adecuados s y t. Dé después un argumento usando componentes.

47. Si $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, describa el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = 1$.

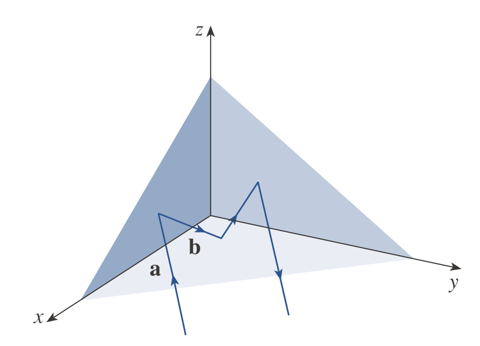
48. Si $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$, describa el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = k$, donde $k > |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

49. La figura 16 da una demostración geométrica de la propiedad 2 de los vectores. Use componentes para dar una prueba algebraica de este axioma para el caso $n = 2$.

50. Pruebe algebraicamente la propiedad 5 de los vectores para el caso $n = 3$. Use después triángulos similares para dar una prueba geométrica.

51. Use vectores para comprobar que la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado y de la mitad de su longitud.

52. Suponga que tres planos coordenados han sido cubiertos con espejos y que un rayo luminoso dado por el vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ cae primeramente sobre el plano xz, como se muestra en la figura. Use el dato de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para demostrar que la dirección del rayo reflejado está dada por $\mathbf{b} = \langle a_1, -a_2, a_3 \rangle$. Deduzca que, después de ser reflejado por los tres espejos mutuamente perpendiculares, el rayo resultante es paralelo al rayo inicial. (Científicos espaciales estadounidenses emplearon este principio, junto con rayos láser y una serie de espejos angulares sobre la luna, para calcular con gran precisión la distancia de la Tierra a la luna.)



12.3 El producto punto

Hasta aquí se han sumado dos vectores y multiplicado un vector por un escalar. Surge la pregunta: ¿es posible multiplicar dos vectores de tal manera que su producto sea una cantidad útil? Un producto así es el producto punto, cuya definición aparece enseguida. Otro es el producto cruz, que se analizará en la sección siguiente.

1 Definición Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, **el producto punto** de **a** y **b** es el número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Así, para determinar el producto punto de **a** y **b**, se multiplican los componentes correspondientes y se suman. El resultado no es un vector. Es un número real, es decir un escalar. Por esta razón, al producto punto también se le conoce como **producto escalar** (o **producto interno**). Aunque la definición 1 se da para vectores tridimensionales, el producto punto de vectores bidimensionales se define en forma similar:

$$\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

EJEMPLO 1

$$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$

$$\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \left\langle 6, 2, -\tfrac{1}{2} \right\rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

$$(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$$

■

El producto punto obedece muchas de las leyes que se aplican a los productos ordinarios de números reales. Estas se enuncian en el teorema siguiente.

2 Propiedades del producto punto Si **a**, **b** y **c** son vectores en V_3 y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ **2.** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ **4.** $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Estas propiedades se comprueban fácilmente usando la definición 1. Por ejemplo, he aquí las comprobaciones de las propiedades 1 y 3:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2$

3.
$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}\end{aligned}$$

Las comprobaciones de las propiedades restantes se dejan como ejercicios. ■

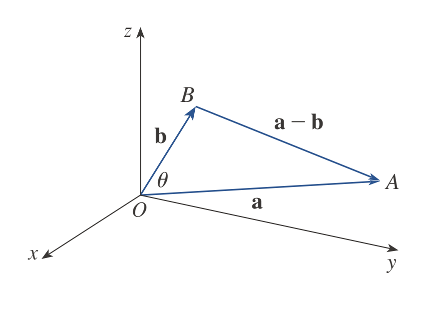


FIGURA 1

El producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ puede recibir una interpretación geométrica en términos del **ángulo** θ **entre a y b**, el cual se define como el ángulo entre las representaciones de **a** y **b** que parten del origen, donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. En otras palabras, θ es el ángulo entre los segmentos de recta $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ de la figura 1. Observe que si **a** y **b** son vectores paralelos, entonces $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

La fórmula del teorema siguiente es usada por los físicos como la *definición* del producto punto.

3 Teorema Si θ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

COMPROBACIÓN Si se aplica la ley de los cosenos al triángulo OAB de la figura 1, se obtiene

4 $$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos \theta$$

(Observe que la ley de los cosenos no deja de aplicarse en los casos límite en que $\theta = 0$ o π, o $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.) Pero $|OA| = |\mathbf{a}|$, $|OB| = |\mathbf{b}|$ y $|AB| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, así que la ecuación 4 se convierte en

5 $$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

Si se usan las propiedades 1, 2 y 3 del producto punto, el miembro izquierdo de esta ecuación puede reescribirse como sigue:

$$\begin{aligned}|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación 5 da

$$|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

Así, $$-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

o $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$ ■

EJEMPLO 2 Si los vectores **a** y **b** tienen longitudes de 4 y 6 y el ángulo entre ellos es $\pi/3$, determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

SOLUCIÓN Usando el teorema 3, se tiene

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\pi/3) = 4 \cdot 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 12$$ ■

La fórmula del teorema 3 también permite determinar el ángulo entre dos vectores.

6 Corolario Si θ es el ángulo entre los vectores diferentes de cero **a** y **b**, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

EJEMPLO 3 Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2\rangle$.

SOLUCIÓN Como

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

y como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

del corolario 6 se desprende que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Así, el ángulo entre **a** y **b** es

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 1.46 \quad (\text{o } 84°)$$ ■

Dos vectores diferentes de cero **a** y **b** se llaman **perpendiculares** u **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\theta = \pi/2$. Entonces, el teorema 3 da

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\pi/2) = 0$$

y, a la inversa, si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, entonces $\cos\theta = 0$, así que $\theta = \pi/2$. El vector cero **0** se considera perpendicular a todos los vectores. En consecuencia, se tiene el método siguiente para determinar si dos vectores son ortogonales.

7 Dos vectores **a** y **b** son ortogonales si y solo si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

EJEMPLO 4 Demuestre que $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es perpendicular a $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Como

$$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = 0$$

estos vectores son perpendiculares por (7). ■

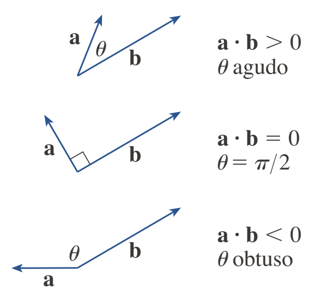


FIGURA 2

TEC Visual 12.3A muestra una animación de la figura 2.

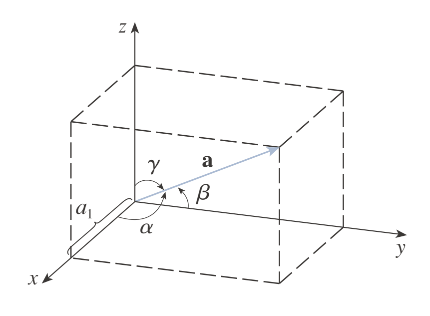


FIGURA 3

Como $\cos\theta > 0$ si $0 \leqslant \theta < \pi/2$ y $\cos\theta < 0$ si $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, se ve que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es positivo para $\theta < \pi/2$ y negativo para $\theta > \pi/2$. Se puede concebir que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ mide el grado en que **a** y **b** apuntan en la misma dirección. El producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es positivo si **a** y **b** apuntan en la misma dirección general, 0 si son perpendiculares, y negativo si apuntan en direcciones generalmente opuestas (véase la figura 2). En el caso extremo en que **a** y **b** apuntan exactamente en la misma dirección, se tiene $\theta = 0$, así que $\cos\theta = 1$ y

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

Si **a** y **b** apuntan en direcciones exactamente opuestas, entonces se tiene $\theta = \pi$, así que $\cos\theta = -1$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.

Ángulos de dirección y cosenos directores

Los **ángulos de dirección** de un vector **a** diferente de cero son los ángulos α, β y γ (en el intervalo $[0, \pi]$) que **a** forma con los ejes x, y y z positivos, respectivamente. (Véase la figura 3.)

Los cosenos de estos ángulos de dirección, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, se llaman **cosenos directores** del vector **a**. Usando el corolario 6 con **b** reemplazada por **i**, se obtiene

8
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$$

(Esto también puede deducirse directamente de la figura 3.)

De igual manera, también se tiene

9
$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

Tras elevar al cuadrado las expresiones en las ecuaciones 8 y 9 y sumar, se observa que

10
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

También se pueden usar las ecuaciones 8 y 9 para escribir

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \big\langle |\mathbf{a}| \cos\alpha, |\mathbf{a}| \cos\beta, |\mathbf{a}| \cos\gamma \big\rangle$$

$$= |\mathbf{a}| \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

Por tanto,

11
$$\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

lo que indica que los cosenos directores de **a** son los componentes del vector unitario en la dirección de **a**.

EJEMPLO 5 Determine los ángulos de dirección del vector $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$.

SOLUCIÓN Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, las ecuaciones 8 y 9 dan

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

así que

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74° \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58° \qquad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37°$$

■

TEC Visual 12.3B muestra cómo cambia la figura 4 cuando se varía **a** y **b**.

Proyecciones

La figura 4 muestra representaciones $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ de dos vectores **a** y **b** con el mismo punto inicial P. Si S es el pie de la perpendicular de R a la recta que contiene $\overrightarrow{PQ}$, entonces el vector con representación $\overrightarrow{PS}$ se llama **proyección vectorial** de **b** en **a** y se denota con $\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$. (Usted puede concebir esto como una sombra de **b**.)

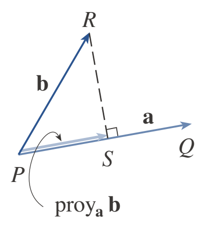
La **proyección escalar** de **b** en **a** (también llamada **componente de b a lo largo de a**) se define como la magnitud con signo de la proyección vectorial, la cual es el número $|\mathbf{b}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre **a** y **b**. (Véase la figura 5.) Esto se denota con $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$. Obsérvese que esta cantidad es negativa si $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$. La ecuación

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{a}|\big(|\mathbf{b}|\cos\theta\big)$$

muestra que el producto punto de **a** y **b** puede interpretarse como la longitud de **a** multiplicada por la proyección escalar de **b** en **a**. Como

$$|\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{b}$$

el componente de **b** a lo largo de **a** puede calcularse tomando el producto punto de **b** con el vector unitario en la dirección de **a**. Estas ideas se resumen como sigue.



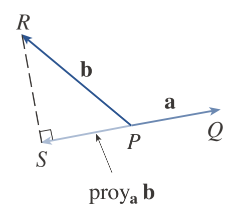


FIGURA 4
Proyecciones vectoriales

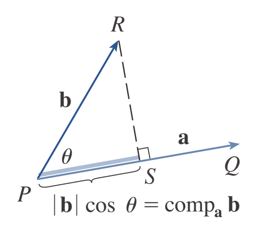


FIGURA 5
Proyección escalar

Proyección escalar de **b** en **a**:	$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$
Proyección vectorial de **b** en **a**:	$\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \left(\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}$

Observe que la proyección vectorial es la proyección escalar multiplicada por el vector unitario en la dirección de **a**.

EJEMPLO 6 Determine la proyección escalar y la proyección vectorial de $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 2\rangle$ en $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1\rangle$.

SOLUCIÓN Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, la proyección escalar de **b** en **a** es

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + 3(1) + 1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

La proyección vectorial es esta proyección escalar multiplicada por el vector unitario en la dirección de **a**:

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{3}{\sqrt{14}}\,\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{14}\,\mathbf{a} = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14}\right\rangle$$ ■

Un uso de las proyecciones ocurre en física al calcular trabajo. En la sección 6.4 se definió el trabajo hecho por una fuerza constante F al mover un objeto por una distancia d como $W = Fd$, pero esto solo se aplica cuando la fuerza se dirige a lo largo de la línea de movimiento del objeto. Suponga, sin embargo, que la fuerza constante es un vector $\mathbf{F} = \overrightarrow{PR}$ que apunta en otra dirección, como en la figura 6. Si esa fuerza mueve el objeto de P a Q, el **vector de desplazamiento** es $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$. El **trabajo** realizado por esta fuerza se define como el producto del componente de la fuerza a lo largo de **D** y la distancia recorrida:

$$W = \big(|\mathbf{F}|\cos\theta\big)|\mathbf{D}|$$

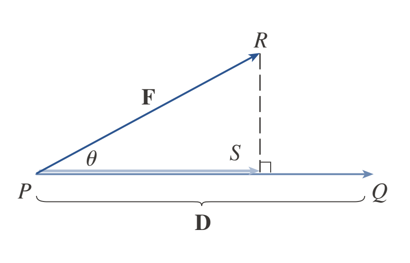
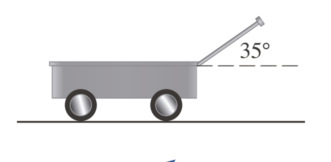


FIGURA 6

Pero por el teorema 3 se tiene

$$\boxed{12} \qquad W = |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$$

Así, el trabajo realizado por una fuerza constante **F** es el producto punto $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$, donde **D** es el vector de desplazamiento.



F

35°

D



FIGURA 7

EJEMPLO 7 Una carretilla es tirada por una distancia de 100 m a lo largo de una trayectoria horizontal por una fuerza constante de 70 N. El tirador de la carretilla se mantiene en un ángulo de 35° sobre la horizontal. Determine el trabajo efectuado por la fuerza.

SOLUCIÓN Si **F** y **D** son los vectores de fuerza y de desplazamiento, como se ilustra en la figura 7, el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos 35°$$

$$= (70)(100)\cos 35° \approx 5734\ \text{N}\cdot\text{m} = 5734\ \text{J}$$ ■

EJEMPLO 8 Una fuerza está dada por un vector $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y mueve una partícula del punto $P(2, 1, 0)$ al punto $Q(4, 6, 2)$. Determine el trabajo realizado.

SOLUCIÓN El vector de desplazamiento es $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 5, 2\rangle$, así que por la ecuación 12 el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = \langle 3, 4, 5\rangle \cdot \langle 2, 5, 2\rangle$$

$$= 6 + 20 + 10 = 36$$

Si la unidad de longitud es metros y la magnitud de la fuerza se mide en newtons, entonces el trabajo realizado es 36 J. ■

12.3 EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de las expresiones siguientes tienen sentido? ¿Cuáles no lo tienen? Explique su respuesta.
(a) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$
(b) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$
(c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$
(d) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
(e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}$
(f) $|\mathbf{a}|\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

2-10 Determine $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

2. $\mathbf{a} = \langle 5, -2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 4\rangle$

3. $\mathbf{a} = \langle 1.5, 0.4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, 6\rangle$

4. $\mathbf{a} = \langle 6, 4, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 5, -9\rangle$

5. $\mathbf{a} = \langle 1.9, 3.6, -1.1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2.1, -2.2, -4.1\rangle$

6. $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s\rangle$, $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t\rangle$

7. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$

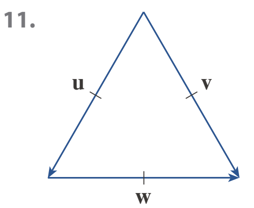
8. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

9. $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 4$, el ángulo entre **a** y **b** es 30°

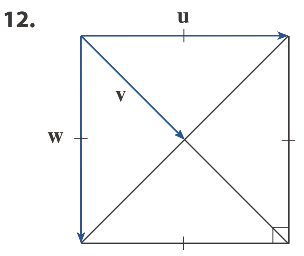
10. $|\mathbf{a}| = 80$, $|\mathbf{b}| = 50$, el ángulo entre **a** y **b** es $3\pi/4$

11-12 Si **u** es un vector unitario, determine $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$.

11.



12.



13. (a) Demuestre que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$.
(b) Demuestre que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$.

14. Un vendedor ambulante vende a hamburguesas, b hot dogs y c refrescos en un día dado. Cobra \$4 por hamburguesa, \$2.50 por hot dog y \$1 por refresco. Si $\mathbf{A} = \langle a, b, c\rangle$ y $\mathbf{P} = \langle 4, 2.5, 1\rangle$, ¿cuál es el significado del producto punto $\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}$?

15-20 Determine el ángulo entre los vectores. (Determine primero una expresión exacta y después aproxime al grado más cercano.)

15. $\mathbf{a} = \langle 4, 3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1\rangle$

16. $\mathbf{a} = \langle -2, 5\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 12\rangle$

17. $\mathbf{a} = \langle 1, -4, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 2, -2 \rangle$

18. $\mathbf{a} = \langle -1, 3, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 2, 1 \rangle$

19. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

20. $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

21-22 Determine, al grado más cercano, los tres ángulos de cada triángulo con los vértices dados.

21. $P(2, 0)$, $Q(0, 3)$, $R(3, 4)$

22. $A(1, 0, -1)$, $B(3, -2, 0)$, $C(1, 3, 3)$

23-24 Determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos.

23. (a) $\mathbf{a} = \langle 9, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 6 \rangle$
(b) $\mathbf{a} = \langle 4, 5, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -1, 5 \rangle$
(c) $\mathbf{a} = -8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
(d) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

24. (a) $\mathbf{u} = \langle -5, 4, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -1 \rangle$
(b) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u} = \langle c, c, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle c, 0, -c \rangle$

25. Use vectores para decidir si el triángulo con vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ y $R(6, -2, -5)$ es rectángulo.

26. Determine los valores de x tales que el ángulo entre los vectores $\langle 2, 1, -1 \rangle$ y $\langle 1, x, 0 \rangle$ sea de 45°.

27. Determine un vector unitario que sea ortogonal tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ como a $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

28. Determine dos vectores unitarios que formen un ángulo de 60°con $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

29-30 Determine el ángulo agudo entre las rectas.

29. $2x - y = 3$, $3x + y = 7$

30. $x + 2y = 7$, $5x - y = 2$

31-32 Determine los ángulos agudos entre las curvas en sus puntos de intersección. (El ángulo entre dos curvas es el ángulo entre sus rectas tangentes en el punto de intersección.)

31. $y = x^2$, $y = x^3$

32. $y = \operatorname{sen} x$, $\quad y = \cos x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

33-37 Determine los cosenos directores y ángulos de dirección del vector. (Dé los ángulos de dirección al grado más cercano.)

33. $\langle 2, 1, 2 \rangle$

34. $\langle 6, 3, -2 \rangle$

35. $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

36. $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. $\langle c, c, c \rangle$, $\quad$ donde $c > 0$

38. Si un vector tiene ángulos de dirección $\alpha = \pi/4$ y $\beta = \pi/3$, determine el tercer ángulo de dirección γ.

39-44 Determine las proyecciones escalar y vectorial de **b** en **a**.

39. $\mathbf{a} = \langle 4, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 7 \rangle$

40. $\mathbf{a} = \langle -1, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 5 \rangle$

41. $\mathbf{a} = \langle 4, 7, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -1, 1 \rangle$

42. $\mathbf{a} = \langle -1, 4, 8 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 12, 1, 2 \rangle$

43. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

44. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{k}$

45. Demuestre que el vector $\text{ort}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ es ortogonal a **a**. (Esto se llama **proyección ortogonal** de **b**.)

46. Para los vectores del ejercicio 40, determine $\text{ort}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ e ilustre trazando los vectores **a**, **b**, $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ y $\text{ort}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

47. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$, determine un vector **b** tal que $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = 2$.

48. Suponga que **a** y **b** son vectores diferentes de cero.
(a) ¿En qué circunstancias $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$?
(b) ¿En qué circunstancias $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$?

49. Determine el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ que mueve un objeto del punto $(0, 10, 8)$ al punto $(6, 12, 20)$ a lo largo de una línea recta. La distancia se mide en metros y la fuerza en newtons.

50. Un camión de remolque arrastra un automóvil descompuesto a lo largo de una calle. La cadena forma un ángulo de 30° con la calle y la tensión en la cadena es de 1500 N. ¿Cuánto trabajo realiza el camión para tirar del auto a lo largo de 1 km?

51. Una mujer ejerce una fuerza horizontal de 140 N sobre una caja al subirla por una rampa de 4 m de largo e inclinada en un ángulo de 20° sobre la horizontal. Determine el trabajo realizado sobre la caja.

52. Determine el trabajo efectuado por una fuerza de 100 N que actúa en la dirección N50°W al mover un objeto 5 m al oeste.

53. Use una proyección escalar para demostrar que la distancia de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $ax + by + c = 0$ es

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

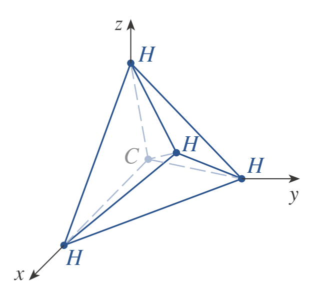
Emplee esta fórmula para hallar la distancia del punto $(-2, 3)$ a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

54. Si $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, demuestre que la ecuación vectorial $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0$ representa una esfera y determine su centro y radio.

55. Determine el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus aristas.

56. Determine el ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.

57. Una molécula de metano, CH_4, se compone de cuatro átomos de hidrógeno en los vértices de un tetraedro regular y un átomo de carbono en el centroide. El *ángulo de enlace* es el ángulo formado por la combinación H—C—H; este es el ángulo entre las rectas que unen el átomo de carbono con dos de los átomos de hidrógeno. Demuestre que el ángulo de enlace es de alrededor de 109.5°. [*Sugerencia*: tome los vértices del tetraedro como los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) y (1, 1, 1), como se muestra en la figura. Entonces el centroide es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.]



58. Si $\mathbf{c} = |\mathbf{a}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a}$, donde **a**, **b** y **c** son vectores diferentes de cero, demuestre que **c** biseca el ángulo entre **a** y **b**.

59. Compruebe las propiedades 2, 4 y 5 del producto punto (teorema 2).

60. Suponga que todos los lados de un cuadrilátero son iguales en longitud y que los lados opuestos son paralelos. Use métodos vectoriales para demostrar que las diagonales son perpendiculares.

61. Use el teorema 3 para comprobar la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

62. La desigualdad del triángulo para vectores es

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

(a) Dé una interpretación geométrica de la desigualdad del triángulo.

(b) Emplee la desigualdad de Cauchy-Schwarz del ejercicio 61 para comprobar la desigualdad del triángulo. [*Sugerencia*: use el dato de que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ y emplee la propiedad 3 del producto punto.]

63. La ley del paralelogramo sostiene que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

(a) Dé una interpretación geométrica de la ley del paralelogramo.

(b) Compruebe la ley del paralelogramo. (Véase la sugerencia del ejercicio 62.)

64. Demuestre que si $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son ortogonales, entonces los vectores **u** y **v** deben tener la misma longitud.

65. Si θ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**, demuestre que

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \cdot \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cos^2 \theta$$

12.4 El producto cruz

Dados los dos vectores diferentes de cero $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, es muy útil poder determinar un vector **c** diferente de cero perpendicular tanto a **a** como a **b**, como se verá en la sección siguiente y en los capítulos 13 y 14. Si $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ es ese vector, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ y $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, y por tanto

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 \tag{1}$$

$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 \tag{2}$$

Para eliminar c_3 se multiplica (1) por b_3 y (2) por a_3 y se resta:

$$(a_1b_3 - a_3b_1)c_1 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 = 0 \tag{3}$$

La ecuación 3 tiene la forma $pc_1 + qc_2 = 0$, para la que una solución obvia es $c_1 = q$ y $c_2 = -p$. Así, una solución de (3) es

$$c_1 = a_2b_3 - a_3b_2 \qquad c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$$

Al sustituir estos valores en (1) y (2) se obtiene

$$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

Esto significa que un vector perpendicular tanto a **a** como a **b** es

$$\langle c_1, c_2, c_3 \rangle = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

El vector resultante se llama *producto cruz* de **a** y **b** y se denota con $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Hamilton

El producto cruz fue inventado por el matemático irlandés sir William Rowan Hamilton (1805-1865), quien había creado un precursor de los vectores, llamado cuaterniones. Cuando tenía cinco años de edad, Hamilton ya sabía leer en latín, griego y hebreo. A los ocho años añadió el francés e italiano y a los diez ya sabía leer en árabe y sánscrito. A los 21, cuando aún era estudiante de licenciatura en el Trinity College de Dublín, ¡fue nombrado profesor de astronomía de la universidad y astrónomo real de Irlanda!

4 Definición Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, el **producto cruz** de **a** y **b** es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\rangle$$

Observe que el **producto cruz a × b** de dos vectores **a** y **b**, a diferencia del producto punto, es un vector. Por esta razón también se le conoce como **producto vectorial**. Nótese que **a** × **b** se define solo para el caso en que **a** y **b** son *vectores tridimensionales*.

A fin de recordar con más facilidad la definición 4, se usa la notación de los determinantes. Un **determinante de orden 2** se define con

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(Multiplique las diagonales y reste.) Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$$

Un **determinante de orden 3** puede definirse en términos de determinantes de segundo orden como sigue:

$$\boxed{5} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Observe que cada término en el miembro derecho de la ecuación 5 involucra un número a_i en la primera fila del determinante y que a_i se multiplica por el determinante de segundo orden obtenido del miembro izquierdo eliminando la fila y columna en la que aparece a_i. Adviértase también el signo menos en el segundo término. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0 - 4) - 2(6 + 5) + (-1)(12 - 0) = -38$$

Si se reescribe ahora la definición 4 usando determinantes de segundo orden y los vectores de base estándar **i**, **j** y **k**, se verá que el producto cruz de los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ es

$$\boxed{6} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

En vista de la semejanza entre las ecuaciones 5 y 6, a menudo se escribe

$$\boxed{7} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Aunque la primera fila del determinante simbólico de la ecuación 7 consta de vectores, si se desarrolla como si fuera un determinante ordinario usando la regla de la ecuación 5,



se obtiene la ecuación 6. La fórmula simbólica de la ecuación 7 es probablemente la manera más fácil de recordar y calcular productos cruz.

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (-15 - 28)\,\mathbf{i} - (-5 - 8)\,\mathbf{j} + (7 - 6)\,\mathbf{k} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k}$$ ■

EJEMPLO 2 Demuestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para cualquier vector $\mathbf{a}$ en V_3.

SOLUCIÓN Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2a_3 - a_3a_2)\,\mathbf{i} - (a_1a_3 - a_3a_1)\,\mathbf{j} + (a_1a_2 - a_2a_1)\,\mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} - 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$ ■

Se construye el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ para que fuera perpendicular tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$. Esta es una de las propiedades más importantes de un producto cruz, así que enfatícelo y compruébelo en el teorema siguiente y dé una prueba formal.

8 Teorema El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$.

COMPROBACIÓN A fin de demostrar que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$, se calcula su producto punto como sigue:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3$$

$$= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3$$

$$= 0$$

Un cálculo similar demuestra que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$. Por tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$ y a $\mathbf{b}$. ■

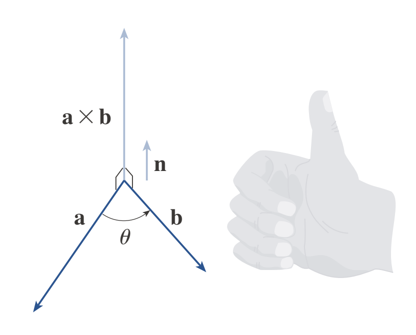


FIGURA 1
La regla de la mano derecha da la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se representan con segmentos de recta dirigida con el mismo punto inicial (como en la figura 1), el teorema 8 indica que el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ apunta en una dirección perpendicular al plano que pasa por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Resulta que la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dada por la *regla de la mano derecha*: si usted dobla los dedos de su mano derecha en la

dirección de una rotación (a través de un ángulo de menos de 180°) de **a** a **b**, su pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Ahora que se conoce la dirección del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, para completar su descripción geométrica falta su longitud $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Esta está dada por el teorema siguiente.

9 Teorema Si θ es el ángulo entre **a** y **b** (de tal manera que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), entonces

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

TEC Visual 12.4 muestra cómo cambia $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ al cambiar **b**.

COMPROBACIÓN De las definiciones del producto cruz y la longitud de un vector se deduce que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\
&\qquad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2\theta \qquad \text{(por el teorema 12.3.3)} \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

Si se toman las raíces cuadradas y se observa que $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen}\theta$ porque $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$ cuando $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, se tiene

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

■

Caracterización geométrica de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Como un vector está completamente determinado por su magnitud y dirección, ahora puede decirse que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el vector perpendicular tanto a **a** como a **b**, cuya orientación es determinada por la regla de la mano derecha y cuya longitud es $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$. De hecho, así es justamente como los físicos *definen* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

10 Corolario Dos vectores diferentes de cero **a** y **b** son paralelos si y solo si

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

COMPROBACIÓN Dos vectores diferentes de cero **a** y **b** son paralelos si y solo si $\theta = 0$ o π. En cualquier caso, $\operatorname{sen}\theta = 0$, así que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$ y por tanto $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. ■

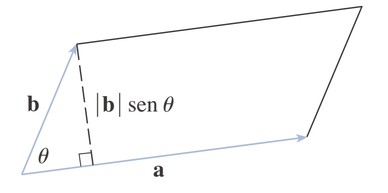


FIGURA 2

La interpretación geométrica del teorema 9 puede verse examinando la figura 2. Si **a** y **b** se representan con segmentos de recta dirigida con el mismo punto inicial, entonces determinan un paralelogramo con base $|\mathbf{a}|$, altura $|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$ y área

$$A = |\mathbf{a}|\big(|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta\big) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Se tiene entonces la siguiente manera de interpretar la magnitud de un producto cruz.

La longitud del producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

EJEMPLO 3 Determine un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN El vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular tanto a $\overrightarrow{PQ}$ como a $\overrightarrow{PR}$, y por tanto perpendicular al plano que pasa por P, Q y R. Por (12.2.1) se sabe que

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\,\mathbf{i} + (5 - 4)\,\mathbf{j} + (-1 - 6)\,\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\,\mathbf{i} + (-1 - 4)\,\mathbf{j} + (1 - 6)\,\mathbf{k} = -5\,\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Se calcula el producto cruz de estos vectores:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-5 - 35)\,\mathbf{i} - (15 - 0)\,\mathbf{j} + (15 - 0)\,\mathbf{k} = -40\,\mathbf{i} - 15\,\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

Así, el vector $\langle -40, -15, 15 \rangle$ es perpendicular al plano dado. Cualquier múltiplo escalar diferente de cero de este vector, como $\langle -8, -3, 3 \rangle$, también es perpendicular al plano. ■

EJEMPLO 4 Determine el área del triángulo con vértices $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 se calculó que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle$. El área del paralelogramo con lados adyacentes PQ y PR es la longitud de este producto cruz:

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = 5\sqrt{82}$$

El área A del triángulo PQR es la mitad del área de este paralelogramo, es decir $\frac{5}{2}\sqrt{82}$. ■

Si se aplican los teoremas 8 y 9 a los vectores de base estándar **i, j** y **k** usando $\theta = \pi/2$, se obtiene

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{I}$	$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

Observe que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

Así, el producto cruz no es conmutativo. Asimismo,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

mientras que

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Así, la ley asociativa de la multiplicación no suele aplicarse; es decir, en general,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Sin embargo, algunas de las leyes usuales del álgebra *sí* se aplican a los productos cruz. El teorema siguiente resume las propiedades de los productos vectoriales.

11 Propiedades del producto cruz Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Estas propiedades pueden comprobarse escribiendo los vectores en términos de sus componentes y usando la definición de producto cruz. Se da la comprobación de la propiedad 5 y se dejan las comprobaciones restantes como ejercicios.

COMPROBACIÓN DE LA PROPIEDAD 5 Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, entonces

12
$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\
&= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}
\end{aligned}$$
■

Productos triples

El producto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que ocurre en la propiedad 5 se llama **triple producto escalar** de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Observe en la ecuación 12 que se puede escribir el producto triple escalar como un determinante:

13
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

El significado geométrico del producto triple escalar puede verse considerando el paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. (Véase la figura 3.) El área de la base del paralelogramo es $A = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$. Si θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, entonces la altura h del paralelepípedo es $h = |\mathbf{a}||\cos\theta|$. (Debe usar $|\cos\theta|$ en vez de $\cos\theta$ en el caso $\theta > \pi/2$.) Así, el volumen del paralelepípedo es

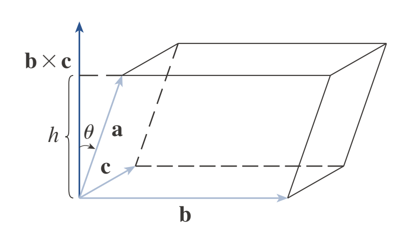


FIGURA 3

$$V = Ah = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\mathbf{a}||\cos\theta| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Se ha demostrado entonces la fórmula siguiente.

14 El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c** es la magnitud de su triple producto escalar:

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Si se usa la fórmula en (14) y se descubre que el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0, entonces los vectores deben situarse en el mismo plano; es decir, son **coplanares**.

EJEMPLO 5 Use el triple producto escalar para demostrar que los vectores $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18 \rangle$ son coplanares.

SOLUCIÓN Use la ecuación 13 para calcular su producto triple escalar:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0$$

Así, por (14), el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0. Esto significa que **a**, **b** y **c** son coplanares. ■

El producto $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que ocurre en la propiedad 6 se llama **triple producto vectorial** de **a**, **b** y **c**. La propiedad 6 se usará para derivar la primera ley de Kepler del movimiento de los planetas en el capítulo 13. Su comprobación se deja como ejercicio 50.

Momento de torsión

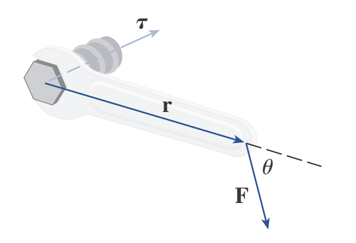


FIGURA 4

La idea de un producto cruz ocurre a menudo en física. En particular, se considera una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto dado por un vector de posición **r**. (Por ejemplo, si se aprieta un tornillo aplicando una fuerza a una llave como en la figura 4, se produce un efecto de torsión.) El momento de **torsión** $\boldsymbol{\tau}$ (en relación con el origen) se define como el producto cruz de los vectores de posición y de fuerza

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

y mide la tendencia del cuerpo a rotar alrededor del origen. La dirección del vector de momento de torsión indica el eje de la rotación. De acuerdo con el teorema 9, la magnitud del vector de momento de torsión es

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores de posición y fuerza. Observe que el único componente de **F** que puede causar una rotación es el perpendicular a **r**, es decir $|\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$. La magnitud del momento de torsión es igual al área del paralelogramo determinada por **r** y **F**.

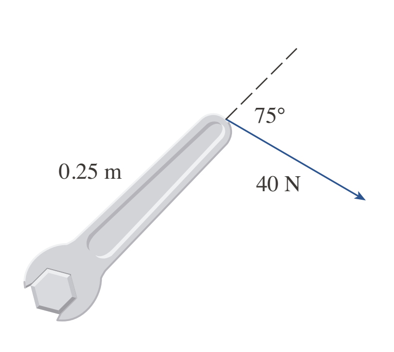


FIGURA 5

EJEMPLO 6 Un tornillo se aprieta aplicando una fuerza de 40 N a una llave de 0.25 m como se muestra en la figura 5. Determine la magnitud del momento de torsión alrededor del centro del tornillo.

SOLUCIÓN La magnitud del vector de momento de torsión es

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} 75° = (0.25)(40) \operatorname{sen} 75°$$
$$= 10 \operatorname{sen} 75° \approx 9.66 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Si el tornillo es de rosca derecha, entonces el vector de momento de torsión es

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\,\mathbf{n} \approx 9.66\,\mathbf{n}$$

donde **n** es un vector unitario dirigido hacia el pie de la página (por la regla de la mano derecha). ■

12.4 EJERCICIOS

1-7 Determine el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y compruebe que es ortogonal tanto a **a** como a **b**.

1. $\mathbf{a} = \langle 2, 3, 0\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 1, 0, 5\rangle$

2. $\mathbf{a} = \langle 4, 3, -2\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 2, -1, 1\rangle$

3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

4. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

5. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

6. $\mathbf{a} = t\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

7. $\mathbf{a} = \langle t, 1, 1/t\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle t^2, t^2, 1\rangle$

---

8. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Trace **a**, **b** y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vectores a partir del origen.

9-12 Determine el vector, no con determinantes, sino usando propiedades del producto cruz.

9. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k}$

10. $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{k})$

11. $(\mathbf{j} - \mathbf{i}) \times (\mathbf{k} - \mathbf{i})$

12. $(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{k})$

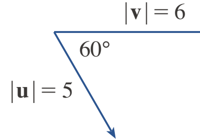
---

13. Indique si cada una de estas expresiones tiene sentido. De no ser así, explique por qué. Si lo tiene, indique si se trata de un vector o de un escalar.
(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
(c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
(e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ (f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

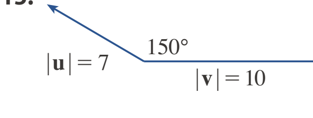
14-15 Determine $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ y establezca si $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se dirige a la página o fuera de la página.



14.

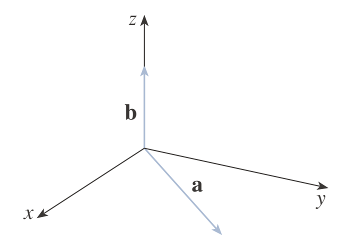


15.



---

16. La figura muestra un vector **a** en el plano xy y un vector **b** en la dirección de **k**. Sus longitudes son $|\mathbf{a}| = 3$ y $|\mathbf{b}| = 2$.
(a) Determine $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
(b) Use la regla de la mano derecha para decidir si los componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ son positivos, negativos o 0.



17. Si $\mathbf{a} = \langle 2, -1, 3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 2, 1\rangle$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

18. Si $\mathbf{a} = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, 1, 3\rangle$, demuestre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

19. Determine dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\langle 3, 2, 1\rangle$ como a $\langle -1, 1, 0\rangle$.

20. Determine dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ como a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

21. Demuestre que $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} \times \mathbf{0}$ para cualquier vector **a** en V_3.

22. Demuestre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos los vectores **a** y **b** en V_3.

23-26 Compruebe la propiedad de productos cruz (teorema 11).

23. Propiedad 1: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

24. Propiedad 2: $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$

25. Propiedad 3: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

26. Propiedad 4: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

---

27. Determine el área del paralelogramo con vértices $A(-3, 0)$, $B(-1, 3)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -1)$.

28. Determine el área del paralelogramo con vértices $P(1, 0\ 2)$, $Q(3, 3, 3)$, $R(7, 5, 8)$ y $S(5, 2, 7)$.

29-32 (a) Determine un vector diferente de cero ortogonal al plano que pasa por los puntos P, Q y R y (b) determine el área del triángulo PQR.

29. $P(1, 0, 1)$, $Q(-2, 1, 3)$, $R(4, 2, 5)$

30. $P(-1, 3, 1)$, $Q(0, 5, 2)$, $R(4, 3, -1)$

31. $P(0, -2, 0)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(5, 3, 1)$

32. $P(2, -3, 4)$, $Q(-1, -2, 2)$, $R(3, 1, -3)$

33-34 Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c**.

33. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

34. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

35-36 Determine el volumen del paralelepípedo con extremos adyacentes PQ, PR y PS.

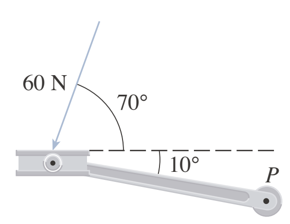
35. $P(-2, 1, 0)$, $Q(2, 3, 2)$, $R(1, 4, -1)$, $S(3, 6, 1)$

36. $P(3, 0\ 1)$, $Q(-1, 2, 5)$ $R(5, 1, -1)$, $S(0, 4, 2)$

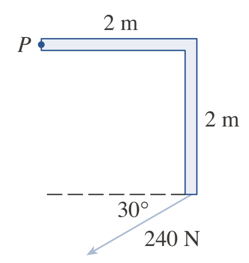
37. Use el triple producto escalar para comprobar que los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ son coplanares.

38. Use el triple producto escalar para determinar si los puntos $A(1, 3, 2)$, $B(3, -1, 6)$, $C(5, 2, 0)$ y $D(3, 6, -4)$ están en el mismo plano.

39. Un pedal de bicicleta es empujado por un pie con una fuerza de 60 N, como se muestra. El eje del pedal es de 18 cm de largo. Determine la magnitud del momento de torsión alrededor de P.



40. Encuentre la magnitud del momento de torsión alrededor de P si una fuerza de 240 N se aplica como se muestra.



41. Una llave de 30 cm de largo se tiende a lo largo del eje y positivo y sujeta un tornillo en el origen. Una fuerza se aplica en la dirección $\langle 0, 3, -4 \rangle$ al extremo de la llave. Determine la magnitud de la fuerza necesaria para proporcionar al tornillo un momento de torsión de $100\ \text{N} \cdot \text{m}$.

42. Sea $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$ y sea $\mathbf{u}$ un vector con longitud 3 que parte del origen y rota en el plano xy. Determine los valores máximo y mínimo de la longitud del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. ¿En qué dirección apunta $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

43. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sqrt{3}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle 1, 2, 2 \rangle$, determine el ángulo entre **a** y **b**.

44. (a) Determine todos los vectores **v** tales que

$$\langle 1, 2, 1 \rangle \times \mathbf{v} = \langle 3, 1, -5 \rangle$$

(b) Explique por qué no hay ningún vector **v** tal que

$$\langle 1, 2, 1 \rangle \times \mathbf{v} = \langle 3, 1, 5 \rangle$$

45. (a) Sea P un punto no en la recta L que pasa por los puntos Q y R. Demuestre que la distancia d del punto P a la recta L es

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

donde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ y $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Use la fórmula del inciso (a) para determinar la distancia del punto $P(1, 1, 1)$ a la recta que pasa por $Q(0, 6, 8)$ y $R(-1, 4, 7)$.

46. (a) Sea P un punto no en el plano que pasa por los puntos Q, R y S. Demuestre que la distancia d de P al plano es

$$d = \frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

donde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QS}$, y $\mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Use la fórmula del inciso (a) para determinar la distancia del punto $P(2, 1, 4)$ al plano que pasa por los puntos $Q(1, 0, 0)$, $R(0, 2, 0)$, y $S(0, 0, 3)$.

47. Demuestre que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

48. Si $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, demuestre que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

49. Demuestre que $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

50. Demuestre la propiedad 6 de los productos cruz, es decir

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

51. Use el ejercicio 50 para comprobar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

52. Demuestre que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

53. Suponga que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

(a) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, ¿de esto se sigue que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(b) Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, ¿de esto se sigue que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(c) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, ¿de esto se sigue que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

54. Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son vectores no coplanares, sea

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

(Estos vectores ocurren en el estudio de la cristalografía. Vectores de la forma $n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + n_3\mathbf{v}_3$, donde cada n_i es un entero, forman una *red* para un cristal. Vectores escritos de modo similar en términos de $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ y $\mathbf{k}_3$ forman la *red recíproca*.)

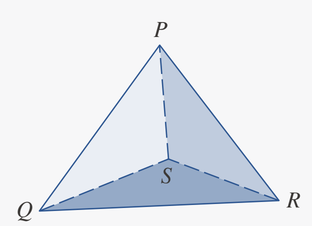
(a) Demuestre que $\mathbf{k}_i$ es perpendicular a $\mathbf{v}_j$ si $i \neq j$.

(b) Demuestre que $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

(c) Demuestre que $\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) = \dfrac{1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

LA GEOMETRÍA DE UN TETRAEDRO



Un tetraedro es un sólido con cuatro vértices, P, Q, R y S, y cuatro caras triangulares, como se muestra en la figura.

1. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ vectores con longitudes iguales a las áreas de las caras opuestas a los vértices P, Q, R y S, respectivamente, y direcciones perpendiculares a las respectivas caras y que apuntan hacia fuera. Demuestre que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

2. El volumen V de un tetraedro es un tercio la distancia de un vértice a la cara opuesta multiplicado por el área de esa cara.

(a) Determine una fórmula para el volumen de un tetraedro en términos de las coordenadas de sus vértices P, Q, R y S.

(b) Determine el volumen del tetraedro cuyos vértices son $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 2, 3)$, $R(1, 1, 2)$ y $S(3, -1, 2)$.

3. Suponga que el tetraedro de la figura tiene un vértice trirrectangular S. (Esto significa que los tres ángulos en S son rectos.) Sean A, B y C las áreas de las tres caras que se encuentran en S, y sea D el área de la cara opuesta PQR. Usando o no el resultado del problema 1, demuestre que

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

(Esta es una versión tridimensional del teorema de Pitágoras.)

12.5 Ecuaciones de rectas y planos

Rectas

Una recta en el plano xy se determina cuando se dan un punto en la recta y la dirección de la recta (su pendiente o ángulo de inclinación). La ecuación de la recta puede escribirse entonces usando la forma punto-pendiente.

De igual manera, una recta L en el espacio tridimensional se determina cuando se conoce un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en L y la dirección de L. En tres dimensiones, la dirección de una recta es convenientemente descrita por un vector, así que sea $\mathbf{v}$ un vector paralelo a L. Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario en L, y sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores de posición de P_0 y P (es decir, que tienen representaciones $\overrightarrow{OP_0}$ y $\overrightarrow{OP}$). Si $\mathbf{a}$ es el vector con representación $\overrightarrow{P_0P}$, como en la figura 1, la ley del triángulo para la adición de vectores da $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$. Pero como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ son vectores paralelos, hay un escalar t tal que $\mathbf{a} = t\mathbf{v}$. Así,

FIGURA 1

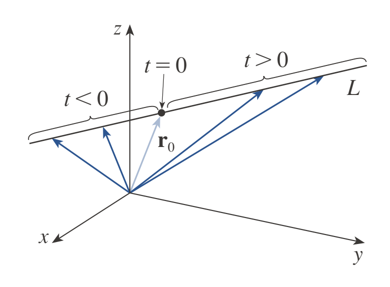


FIGURA 2

1 $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$$

la cual es una **ecuación vectorial** de L. Cada valor del **parámetro** t da el vector de posición $\mathbf{r}$ de un punto en L. En otras palabras, al variar t, la recta es trazada por la punta del vector $\mathbf{r}$. Como indica la figura 2, valores positivos de t corresponden a puntos en L situados a un lado de P_0, mientras que valores negativos de t corresponden a puntos situados al otro lado de P_0.

Si el vector $\mathbf{v}$ que da la dirección de la recta L se escribe en forma de componente como $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$, se tiene $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc\rangle$. También puede escribirse $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, así que la ecuación vectorial (1) se convierte en

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc\rangle$$

Dos vectores son iguales si y solo si sus componentes correspondientes son iguales. Por tanto, se tienen tres ecuaciones escalares:

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta L que pasa por el punto $P_0\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$. Cada valor del parámetro t da un punto (x, y, z) en L.

2 Ecuaciones paramétricas para una recta que pasa por el punto $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y paralela al vector de dirección $\langle a, b, c\rangle$ son

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

La figura 3 muestra la recta L del ejemplo 1 y su relación con el punto dado y con el vector que da su dirección.

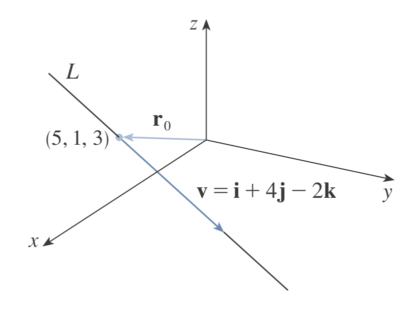


FIGURA 3

EJEMPLO 1

(a) Determine una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto (5, 1, 3) y es paralela al vector $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
(b) Determine otros dos puntos en esa recta.

SOLUCIÓN

(a) Aquí $\mathbf{r}_0 = \langle 5, 1, 3\rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, así que la ecuación vectorial (1) se convierte en

$$\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

o

$$\mathbf{r} = (5 + t)\,\mathbf{i} + (1 + 4t)\,\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

(b) La selección del valor paramétrico $t = 1$ da $x = 6$, $y = 5$ y $z = 1$, de modo que (6, 5, 1) es un punto en la recta. De igual forma, $t = -1$ da el punto $(4, -3, 5)$. ■

La ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de una recta no son únicas. Si se cambia el punto o el parámetro o se elige un vector paralelo diferente, entonces las ecuaciones cambian. Por ejemplo, si en lugar de (5, 1, 3), se elige el punto (6, 5, 1) en el ejemplo 1, entonces las ecuaciones paramétricas de la recta se convierten en

$$x = 6 + t \qquad y = 5 + 4t \qquad z = 1 - 2t$$



O si se mantiene el punto (5, 1, 3) pero se elige el vector paralelo $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, se llega a las ecuaciones

$$x = 5 + 2t \qquad y = 1 + 8t \qquad z = 3 - 4t$$

En general, si un vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ se usa para describir la dirección de una recta L, los números a, b y c se llaman **números de dirección** de L. Como cualquier vector paralelo a $\mathbf{v}$ podría usarse también, se ve que tres números cualesquiera proporcionales a a, b y c podrían usarse igualmente como un conjunto de números de dirección para L.

Otra manera de describir una recta L es eliminar el parámetro t de las ecuaciones 2. Si ni a ni b ni c son 0, se puede despejar t en cada una de estas ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_0}{a} \qquad t = \frac{y - y_0}{b} \qquad t = \frac{z - z_0}{c}$$

Al igualar los resultados, se obtiene

3
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones simétricas** de L. Observe que los números a, b y c que aparecen en los denominadores de las ecuaciones 3 son números de dirección de L, es decir componentes de un vector paralelo a L. Si de a, b y c alguno es 0, aun así se puede eliminar t. Por ejemplo, si $a = 0$, se podrían escribir las ecuaciones de L como

$$x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Esto significa que L se sitúa en el plano vertical $x = x_0$.

La figura 4 muestra la recta L del ejemplo 2 y el punto P donde interseca el plano xy.

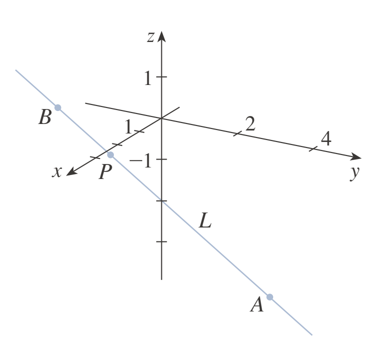


FIGURA 4

EJEMPLO 2

(a) Determine las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, -3)$ y $B(3, -1, 1)$.
(b) ¿En qué punto interseca esta recta el plano xy?

SOLUCIÓN

(a) No se da explícitamente un vector paralelo a la recta, pero observe que el vector $\mathbf{v}$ con representación $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a la recta y

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 2, -1 - 4, 1 - (-3)\rangle = \langle 1, -5, 4\rangle$$

Así, los números de dirección son $a = 1$, $b = -5$ y $c = 4$. Tomando el punto $(2, 4, -3)$ como P_0, las ecuaciones paramétricas (2) son

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t$$

y las ecuaciones simétricas (3) son

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

(b) La recta interseca el plano xy cuando $z = 0$, así que se pone $z = 0$ en las ecuaciones simétricas y se obtiene

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{3}{4}$$

Esto da $x = \frac{11}{4}$ y $y = \frac{1}{4}$, de manera que la recta interseca el plano xy en el punto $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$. ■

En general, el procedimiento del ejemplo 2 muestra que los números de dirección de la recta L que pasa por los puntos $P_0\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y $P_1\langle x_1, y_1, z_1\rangle$ son $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ y $z_1 - z_0$, así que las ecuaciones simétricas de L son

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

A menudo se necesita una descripción no de una recta entera, sino de solo un segmento de recta. ¿Cómo podría describir, por ejemplo, el segmento de recta AB del ejemplo 2? Si pone $t = 0$ en las ecuaciones paramétricas del ejemplo 2(a), se obtiene el punto $(2, 4, -3)$, y si se pone $t = 1$ se obtiene $(3, -1, 1)$. Así, el segmento de recta AB se describe con las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

o con la correspondiente ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 + t, 4 - 5t, -3 + 4t\rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

En general, por la ecuación 1 se sabe que la ecuación vectorial de una recta que pasa por (la punta de) el vector $\mathbf{r}_0$ en la dirección de un vector $\mathbf{v}$ es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Si la recta también pasa por (la punta de) $\mathbf{r}_1$, se puede tomar $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ y su ecuación vectorial es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$

El segmento de recta de $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$ está dado por el intervalo paramétrico $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4 El segmento de recta de $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$ está dado por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Las rectas L_1 y L_2 del ejemplo 3, mostradas en la figura 5, son rectas sesgadas.

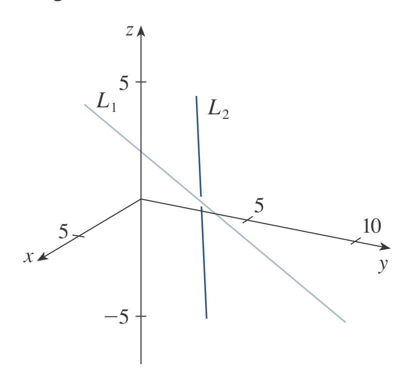


FIGURA 5

EJEMPLO 3 Demuestre que las rectas L_1 y L_2 con ecuaciones paramétricas

$$L_1: \quad x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$

$$L_2: \quad x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

son **rectas sesgadas**; es decir, no intersecan ni son paralelas (y por tanto no están en el mismo plano).

SOLUCIÓN Las rectas no son paralelas porque los vectores de dirección correspondientes $\langle 1, 3, -1\rangle$ y $\langle 2, 1, 4\rangle$ no son paralelos. (Sus componentes no son proporcionales.) Si L_1 y L_2 tuvieran un punto de intersección, habría valores de t y s tales que

$$1 + t = 2s$$

$$-2 + 3t = 3 + s$$

$$4 - t = -3 + 4s$$

Pero si se resuelven las dos primeras ecuaciones, se obtiene $t = \frac{11}{5}$ y $s = \frac{8}{5}$, y estos valores no satisfacen la tercera ecuación. En consecuencia, no hay valores de t y s que satisfagan las tres ecuaciones, así que L_1 y L_2 no intersecan. Por tanto, L_1 y L_2 son rectas sesgadas. ■

Planos

Aunque una recta en el espacio está determinada por un punto y una dirección, un plano en el espacio es más difícil de describir. Un vector paralelo a un plano no basta para sugerir

la "dirección" del plano, pero un vector perpendicular al plano especifica por completo su dirección. Así, un plano en el espacio está determinado por un punto $P_0\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ en el plano y un vector **n** ortogonal al plano. Este vector ortogonal **n** se llama **vector normal**. Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario en el plano, y sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores de posición de P_0 y P. Entonces, el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ está representado por $\overrightarrow{P_0P}$. (Véase la figura 6.) El vector normal **n** es ortogonal a todos los vectores en el plano dado. En particular, **n** es ortogonal a $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, así que se tiene

FIGURA 6

5 $$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

lo que puede reescribirse como

6 $$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

La ecuación 5 o la ecuación 6 se llama **ecuación vectorial del plano**.

Para obtener una ecuación escalar del plano, se escribe $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Así, la ecuación vectorial (5) se convierte en

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

o

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

7 Una **ecuación escalar del plano** que pasa por el punto $P_0\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ con vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

EJEMPLO 4 Determine una ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ con vector normal $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4\rangle$. Determine las intersecciones y trace el plano.

SOLUCIÓN Si se incluye $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ y $z_0 = -1$ en la ecuación 7, se observa que una ecuación del plano es

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

o $$2x + 3y + 4z = 12$$

Para determinar la intersección en x se establece $y = z = 0$ en esta ecuación y se obtiene $x = 6$. De igual modo, la intersección en y es 4 y la intersección en z es 3. Esto permite trazar la porción del plano que se sitúa en el primer octante (véase la figura 7). ■

FIGURA 7

Al reunir términos en la ecuación 7 como se hizo en el ejemplo 4, puede reescribir la ecuación de un plano como



$$ax + by + cz + d = 0$$

donde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. La ecuación 8 se llama **ecuación lineal** en x, y y z. A la inversa, puede demostrarse que si a, b y c no son 0, la ecuación lineal (8) representa un plano con vector normal $\langle a, b, c\rangle$. (Véase el ejercicio 83.)

La figura 8 muestra la porción del plano del ejemplo 5 encerrada por el triángulo PQR.

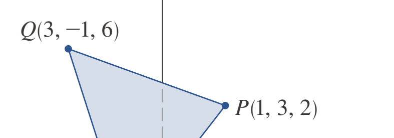
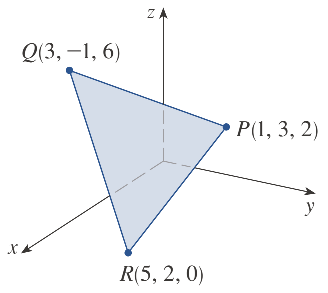



FIGURA 8

EJEMPLO 5 Determine una ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$ y $R(5, 2, 0)$.

SOLUCIÓN Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ correspondientes a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 4 \rangle \qquad \mathbf{b} = \langle 4, -1, -2 \rangle$$

Puesto que tanto $\mathbf{a}$ como $\mathbf{b}$ están en el plano, su producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal al plano y puede tomarse como el vector normal. Así,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} + 14\,\mathbf{k}$$

Con el punto $P(1, 3, 2)$ y el vector normal $\mathbf{n}$, una ecuación del plano es

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0$$

o

$$6x + 10y + 7z = 50$$

■

EJEMPLO 6 Determine el punto en el que la recta con ecuaciones paramétricas $x = 2 + 3t$, $y = -4t$, $z = 5 + t$ interseca el plano $4x + 5y - 2z = 18$.

SOLUCIÓN Se sustituyen las expresiones para x, y y z de las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano:

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18$$

Esto se simplifica en $-10t = 20$, así que $t = -2$. Por tanto, el punto de intersección ocurre cuando el valor paramétrico es $t = -2$. Entonces $x = 2 + 3(-2) = -4$, $y = -4(-2) = 8$, $z = 5 - 2 = 3$ y el punto de intersección es $(-4, 8, 3)$. ■

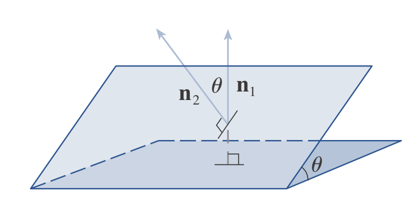


FIGURA 9

Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos. Por ejemplo, los planos $x + 2y - 3z = 4$ y $2x + 4y - 6z = 3$ son paralelos porque sus vectores normales son $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 4, -6 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$. Si dos planos no son paralelos, entonces intersecan en una línea recta y el ángulo entre los dos planos se define como el ángulo agudo entre sus vectores normales (véase el ángulo θ de la figura 9).

La figura 10 muestra los planos del ejemplo 7 y su recta de intersección L.

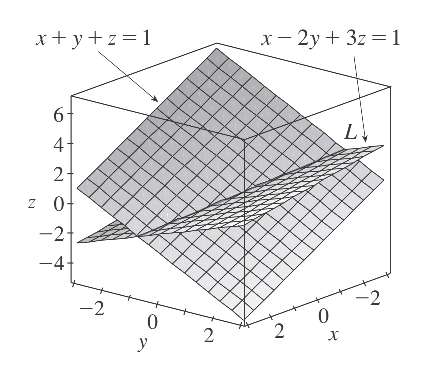


FIGURA 10

EJEMPLO 7

(a) Determine el ángulo entre los planos $x + y + z = 1$ y $x - 2y + 3z = 1$.

(b) Determine ecuaciones simétricas para la recta de intersección L de esos dos planos.

SOLUCIÓN

(a) Los vectores normales de estos planos son

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \qquad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, 3 \rangle$$

de manera que si θ es el ángulo entre los planos, el corolario 12.3.6 da

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1 + 1 + 1}\,\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^\circ$$

(b) Primero se debe hallar un punto en L. Por ejemplo, se puede determinar el punto en el que la recta interseca el plano xy estableciendo $z = 0$ en las ecuaciones de ambos

planos. Esto da las ecuaciones $x + y = 1$ y $x - 2y = 1$, cuya solución es $x = 1$, $y = 0$. Así, el punto $(1, 0, 0)$ está en L.

Ahora se observa que como L está en ambos planos, es perpendicular a los dos vectores normales. Así, un vector $\mathbf{v}$ paralelo a L está dado por el producto cruz

Otra forma de determinar la recta de intersección es despejar dos de las variables de las ecuaciones de los planos en términos de la tercera, que puede tomarse como el parámetro.

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

y las ecuaciones simétricas de L pueden escribirse como

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$ ■

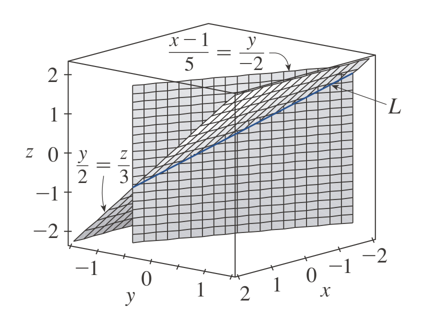


FIGURA 11

La figura 11 muestra cómo la recta L del ejemplo 7 también puede considerarse la recta de intersección de los planos deducida de sus ecuaciones simétricas.

NOTA Como una ecuación lineal en x, y y z representa un plano y dos planos no paralelos intersecan en una recta, de esto se sigue que dos ecuaciones lineales pueden representar una recta. Los puntos (x, y, z) que satisfacen tanto $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ como $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ están en esos dos planos, así que ese par de ecuaciones lineales representa la recta de intersección de los planos (si no son paralelos). Por ejemplo, en el ejemplo 7 la recta L fue dada como la recta de intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x - 2y + 3z = 1$. Las ecuaciones simétricas que se determinaron para L podrían escribirse como

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y}{-2} \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

lo que es de nuevo un par de ecuaciones lineales. Estas exhiben a L como la recta de intersección de los planos $(x - 1)/5 = y/(-2)$ y $y/(-2) = z/(-3)$. (Véase la figura 11.)

En general, cuando se escriben las ecuaciones de una recta en la forma simétrica

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

se puede considerar la recta como la recta de intersección de los dos planos

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \qquad \text{y} \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Distancias

EJEMPLO 8 Determine una fórmula para la distancia D de un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$.

SOLUCIÓN Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ cualquier punto en el plano dado y sea $\mathbf{b}$ el vector correspondiente a $\overrightarrow{P_0P_1}$. Entonces

$$\mathbf{b} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$$

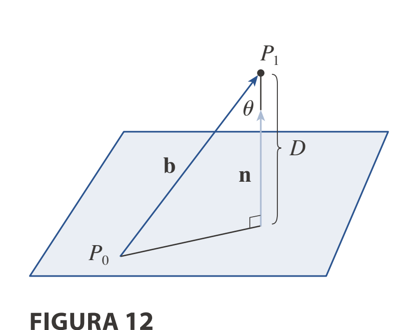


FIGURA 12

En la figura 12 puede verse que la distancia D de P_1 al plano es igual al valor absoluto de la proyección escalar de $\mathbf{b}$ en el vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$. (Véase la sección 12.3.) Así,

$$D = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como P_0 está en el plano, sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano, así que se tiene $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Por tanto, la fórmula para D puede escribirse como

9 $$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ ■

EJEMPLO 9 Determine la distancia entre los planos paralelos $10x + 2y - 2z = 5$ y $5x + y - z = 1$.

SOLUCIÓN Se señala primero que los planos son paralelos porque sus vectores normales $\langle 10, 2, -2\rangle$ y $\langle 5, 1, -1\rangle$ son paralelos. Para determinar la distancia D entre los planos, se elige cualquier punto en un plano y se calcula su distancia al otro plano. En particular, si se incluye $y = z = 0$ en la ecuación del primer plano, se obtiene $10x = 5$ y $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ es un punto en este plano. Por la fórmula 9, la distancia entre $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ y el plano $5x + y - z - 1 = 0$ es

$$D = \frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Así, la distancia entre los planos es $\sqrt{3}/6$. ■

EJEMPLO 10 En el ejemplo 3 se demostró que las rectas

$$L_1\colon x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$

$$L_2\colon x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

son sesgadas. Determine la distancia entre ellas.

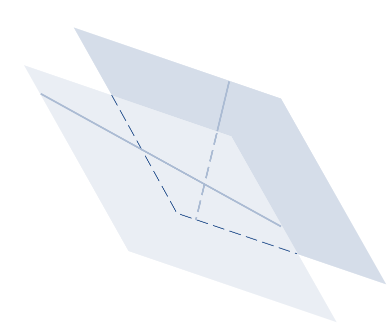


FIGURA 13
Las rectas sesgadas, como las del ejemplo 10, siempre están en planos paralelos (no idénticos).

SOLUCIÓN Como las dos rectas L_1 y L_2 son sesgadas, pueden verse como tendidas en dos planos paralelos P_1 y P_2. La distancia entre L_1 y L_2 es igual a la distancia entre P_1 y P_2, la que puede calcularse como en el ejemplo 9. El vector normal común para ambos planos debe ser ortogonal tanto a $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1\rangle$ (la dirección de L_1) como a $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4\rangle$ (la dirección de L_2). Así, un vector normal es

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Si se incluye $s = 0$ en las ecuaciones de L_2, se obtiene el punto $(0, 3, -3)$ en L_2, de modo que una ecuación para P_2 es

$$13(x - 0) - 6(y - 3) - 5(z + 3) = 0 \qquad \text{o} \qquad 13x - 6y - 5z + 3 = 0$$

Si ahora se establece $t = 0$ en las ecuaciones para L_1, se obtiene el punto $(1, -2, 4)$ en P_1. Así, la distancia entre L_1 y L_2 es igual a la distancia de $(1, -2, 4)$ a $13x - 6y - 5z + 3 = 0$. Por la fórmula 9, esta distancia es

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0.53$$ ■

12.5 EJERCICIOS

1. Determine si cada uno de los enunciados siguientes es cierto o falso en $\mathbb{R}^3$.
(a) Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas.
(b) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.
(c) Dos planos paralelos a uno tercero son paralelos.
(d) Dos planos perpendiculares a uno tercero son paralelos.
(e) Dos rectas paralelas a un plano son paralelas.
(f) Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas.
(g) Dos planos paralelos a una recta son paralelos.
(h) Dos planos perpendiculares a una recta son paralelos.
(i) Dos planos se intersecan o son paralelos.
(j) Dos rectas se intersecan o son paralelas.
(k) Un plano y una recta intersecan o son paralelos.

2-5 Determine una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta.

2. La recta que pasa por el punto $(6, -5, 2)$ y paralela al vector $\langle 1, 3, -\frac{2}{3}\rangle$

3. La recta que pasa por el punto $(2, 2.4, 3.5)$ y paralela al vector $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

4. La recta que pasa por el punto $(0, 14, -10)$ y paralela a la recta $x = -1 + 2t$, $y = 6 - 3t$, $z = 3 + 9t$

5. La recta que pasa por el punto $(1, 0, 6)$ y perpendicular al plano $x + 3y + z = 5$

6-12 Determine ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas para la recta.

6. La recta que pasa por el origen y el punto $(4, 3, -1)$

7. La recta que pasa por los puntos $(0, \frac{1}{2}, 1)$ y $(2, 1 -3)$

8. La recta que pasa por los puntos $(4, -6, 6)$ y $(2, 3, 1)$

9. La recta que pasa por los puntos $(8, 4, -1)$ y $(5, 4, 6)$

10. La recta que pasa por $(2, 1, 0)$ y perpendicular tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ como a $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. La recta que pasa por $(-6, 2, 3)$ y paralela a la recta $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y = z + 1$

12. La recta de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 1$ y $x - y + z = 1$

13. ¿La recta que pasa por $(-4, -6, 1)$ y $(-2, 0, -3)$ es paralela a la que pasa por $(10, 18, 4)$ y $(5, 3, 14)$?

14. ¿La recta que pasa por $(8, 0, 5)$ y $(4, 2, -3)$ es perpendicular a la que pasa por $(4, 3, 7)$ y $(7, 1, 3)$?

15. (a) Determine ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto $(1, -5, 6)$ y es paralela al vector $\langle -1, 2, -3\rangle$.
(b) Determine los puntos en los que la recta requerida en el inciso (a) interseca los planos coordenados.

16. (a) Determine ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(2, 4, 6)$ y es perpendicular al plano $x - y + 3z = 7$.
(b) ¿En qué puntos interseca esa recta los planos coordenados?

17. Encuentre una ecuación vectorial para el segmento de recta de $(6, -1, 9)$ a $(7, 6, 0)$.

18. Encuentre ecuaciones paramétricas para el segmento de recta de $(-2, 18, 31)$ a $(11, -4, 48)$.

19-22 Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, sesgadas o intersecantes. Si se intersecan, encuentre el punto de intersección.

19. L_1: $x = 3 + 2t, \quad y = 4 - t, \quad z = 1 + 3t$
L_2: $x = 1 + 4s, \quad y = 3 - 2s, \quad z = 4 + 5s$

20. L_1: $x = 4 - 6t, \quad y = 1 + 3t, \quad z = -5 + 2t$
L_2: $x = 5 + 18t, \quad y = 6 - 9t, \quad z = 3 - 6t$

21. L_1: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{-3}$
L_2: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-2}{-7}$

22. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$
L_2: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z}{7}$

23-40 Determine una ecuación del plano.

23. El plano que pasa por el punto $(6, 3, 2)$ y perpendicular al vector $\langle -2, 1, 5\rangle$

24. El plano que pasa por el punto $(4, 0, -3)$ y con vector normal $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. El plano que pasa por el punto $\left(-1, \frac{1}{2}, 3\right)$ y con vector normal $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

26. El plano que pasa por el punto $(2, 0, 1)$ y perpendicular a la recta $x = 3t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 4t$

27. El plano que pasa por el punto $(1, -1, -1)$ y paralelo al plano $5x - y - z = 6$

28. El plano que pasa por el punto $(3, -2, 8)$ y paralelo al plano $z = x + y$

29. El plano que pasa por el punto $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y paralelo al plano $x + y + z = 0$

30. El plano que contiene la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ y paralelo al plano $5x + 2y + z = 1$

31. El plano que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$

32. El plano que pasa por el origen y los puntos $(3, -2, 1)$ y $(1, 1, 1)$

33. El plano que pasa por los puntos $(2, 1, 2)$, $(3, -8, 6)$ y $(-2, -3, 1)$

34. El plano que pasa por los puntos $(3, 0, -1)$, $(-2, -2, 3)$ y $(7, 1, -4)$

35. El plano que pasa por el punto $(3, 5, -1)$ y que contiene la recta $x = 4 - t$, $y = 2t - 1$, $z = -3t$

36. El plano que pasa por el punto $(6, -1, 3)$ y que contiene la recta con ecuaciones simétricas $x/3 = y + 4 = z/2$

37. El plano que pasa por el punto $(3, 1, 4)$ y que contiene la recta de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 1$ y $2x - y + z = -3$

38. El plano que pasa por los puntos $(0, -2, 5)$ y $(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $2z = 5x + 4y$

39. El plano que pasa por el punto $(1, 5, 1)$ y es perpendicular a los planos $2x + y - 2z = 2$ y $x + 3z = 4$

40. El plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$ y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$

41-44 Use intersecciones para trazar el plano.

41. $2x + 5y + z = 10$

42. $3x + y + 2z = 6$

43. $6x - 3y + 4z = 6$

44. $6x + 5y - 3z = 15$

45-47 Determine el punto en el que la recta interseca el plano dado.

45. $x = 2 - 2t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + t; \quad x + 2y - z = 7$

46. $x = t - 1, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 3 - t; \quad 3x - y + 2z = 5$

47. $5x = y/2 = z + 2; \quad 10x - 7y + 3z + 24 = 0$

48. ¿Dónde interseca la recta que pasa por $(-3, 1, 0)$ y $(-1, 5, 6)$ el plano $2x + y - z = -2$?

49. Determine números de dirección para la recta de intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x + z = 0$.

50. Determine el coseno del ángulo entre los planos $x + y + z = 0$ y $x + 2y + 3z = 1$.

51-56 Determine si los planos son paralelos, perpendiculares o ninguno de los dos. En este caso, encuentre el ángulo entre ellos. (Redondee a un decimal.)

51. $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$

52. $9x - 3y + 6z = 2, \quad 2y = 6x + 4z$

53. $x + 2y - z = 2, \quad 2x - 2y + z = 1$

54. $x - y + 3z = 1, \quad 3x + y - z = 2$

55. $2x - 3y = z, \quad 4x = 3 + 6y + 2z$

56. $5x + 2y + 3z = 2, \quad y = 4x - 6z$

57-58 (a) Determine ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos y (b) encuentre el ángulo entre los planos.

57. $x + y + z = 1, x + 2y + 2z = 1$

58. $3x - 2y + z = 1, 2x + y - 3z = 3$

59-60 Determine ecuaciones simétricas para la recta de intersección de los planos.

59. $4x - y + 2z = 3, 2x + y + 7z = 9$

60. $z = 3x + 2y + 1, z = 4x + y + 3$

61. Determine una ecuación para el plano que consta de todos los puntos equidistantes de los puntos $(1, 0, -2)$ y $(3, 4, 0)$.

62. Determine una ecuación para el plano que consta de todos los puntos equidistantes de los puntos $(2, 5, 5)$ y $(-6, 3, 1)$.

63. Determine una ecuación del plano con intersección a en x, intersección b en y e intersección c en z.

64. (a) Encuentre el punto en el que intersecan las rectas dadas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$$

$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2 \rangle + s\langle -1, 1, 0 \rangle$$

(b) Halle una ecuación del plano que contiene estas rectas.

65. Determine ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, paralela al plano $x + y + z = 2$ y perpendicular a la recta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

66. Determine ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, perpendicular a la recta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$ y que interseca esta recta.

67. ¿Cuáles de los cuatro planos siguientes son paralelos? ¿Algunos de ellos son idénticos?

P_1: $3x + 6y - 3z = 6$ $\quad$ P_2: $4x - 12y + 8z = 5$

P_3: $9y = 1 + 3x + 6z$ $\quad$ P_4: $z = x + 2y - 2$

68. ¿Cuáles de las cuatro rectas siguientes son paralelas? ¿Algunas de ellas son idénticas?

L_1: $x = 1 + 6t, \quad y = 1 - 3t, \quad z = 12t + 5$

L_2: $x = 1 + 2t, \quad y = t, \quad z = 1 + 4t$

L_3: $2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$

L_4: $\mathbf{r} = \langle 3, 1, 5 \rangle + t\langle 4, 2, 8 \rangle$

69-70 Use la fórmula del ejercicio 12.4.45 para determinar la distancia del punto a la recta dada.

69. $(4, 1, -2); \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4 - 3t$

70. $(0, 1, 3); \quad x = 2t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 3 + t$

71-72 Determine la distancia del punto al plano dado.

71. $(-2, 2, 1)$, $3x - 5y + z = 5$

72. $(4, 0, 4)$, $x - 6y + 3z = -25$

73-74 Determine la distancia entre los planos paralelos dados.

73. $2x - 3y + z = 4$, $4x - 6y + 2z = 3$

74. $6z = 4y - 2x$, $9z = 1 - 3x + 6y$

---

75. Demuestre que la distancia entre los planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

76. Determine ecuaciones de los planos paralelos al plano $x + 2y - 2z = 1$ y a dos unidades de distancia de él.

77. Demuestre que las rectas con ecuaciones simétricas $x = y = z$ y $x + 1 = y/2 = z/3$ son sesgadas y determine la distancia entre ellas.

78. Halle la distancia entre las rectas sesgadas con ecuaciones paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$ y $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

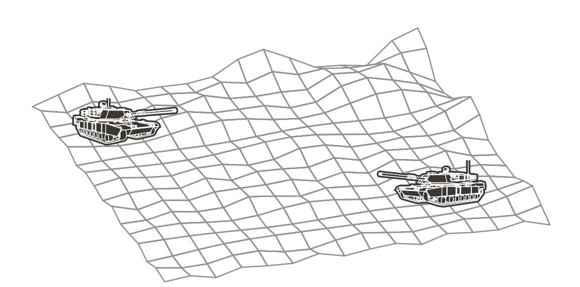
79. Sea L_1 la recta que pasa por el origen y el punto $(2, 0, -1)$. Sea L_2 la recta que pasa por los puntos $(1, -1, 1)$ y $(4, 1, 3)$. Determine la distancia entre L_1 y L_2.

80. Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $(1, 2, 6)$ y $(2, 4, 8)$. Sea L_2 la recta de intersección de los planos P_1 y P_2, donde P_1 es el plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y P_2 el plano que pasa por los puntos $(3, 2, -1)$, $(0, 0, 1)$ y $(1, 2, 1)$. Calcule la distancia entre L_1 y L_2.

81. Dos tanques participan en un simulacro de batalla. El tanque A está en el punto (325, 810, 561) y el tanque B en el punto (765, 675, 599).

(a) Determine ecuaciones paramétricas para la línea de mira entre los tanques.

(b) Si se divide la línea de mira en 5 segmentos iguales, las elevaciones del terreno en los cuatro puntos intermedios del tanque A al tanque B son 549, 566, 586 y 589. ¿Los tanques pueden verse entre sí?



82. Dé una descripción geométrica de cada familia de planos.

(a) $x + y + z = c$

(b) $x + y + cz = 1$

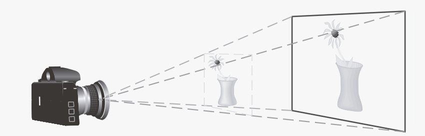
(c) $y \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta = 1$

83. Si a, b y c no son 0, demuestre que la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano y $\langle a, b, c\rangle$ es un vector normal al plano.

Sugerencia: suponga $a \neq 0$ y reescriba la ecuación en la forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

PROYECTO DE LABORATORIO PONER LA TRIDIMENSIONALIDAD EN PERSPECTIVA



Los programadores de gráficos para computadora enfrentan el mismo reto que los grandes pintores del pasado: cómo representar una escena tridimensional como una imagen plana en un plano bidimensional (una pantalla o un lienzo). Para crear la ilusión de perspectiva, en la que los objetos cercanos parecen más grandes que los lejanos, los objetos tridimensionales en la memoria de la computadora se proyectan en una ventana rectangular desde el punto de vista en el que se localiza el ojo, o la cámara. El volumen de visualización –la porción de espacio que será visible– es la región contenida por los cuatro planos que pasan por el punto de vista y un extremo de la ventana. Si los objetos en la escena se extienden más allá de esos cuatro planos, deben ser truncados antes de que datos de píxeles sean enviados a la pantalla. Por tanto, estos planos se llaman *planos de corte*.

1. Suponga que la pantalla está representada por un rectángulo en el plano yz con vértices $(0, \pm 400, 0)$ y $(0, \pm 400, 600)$ y que la cámara se encuentra en $(1000, 0, 0)$. Una recta L en la escena pasa por los puntos (230, –285, 102) y (860, 105, 264). ¿En qué puntos debe ser cortada L por los planos de corte?

2. Si el segmento de recta cortado se proyecta en la ventana, identifique el segmento de recta resultante.

3. Use ecuaciones paramétricas para trazar las orillas de la ventana, el segmento de recta cortado y su proyección en la ventana. Añada después las líneas de mira que unen el punto de vista con cada extremo de los segmentos cortados para comprobar que la proyección es correcta.

4. Un rectángulo con vértices $(621, -147, 206)$, $(563, 31, 242)$, $(657, -111, 86)$ y $(599, 67, 122)$ se agrega a la escena. La recta L interseca este rectángulo. Para hacer que el rectángulo parezca opaco, un programador puede usar *representación de líneas ocultas*, que elimina porciones de objetos que están detrás de otros objetos. Identifique la porción de L que debería eliminarse.

12.6 Cilindros y superficies cuádricas

Ya se examinaron dos tipos especiales de superficies: planos (en la sección 12.5) y esferas (en la sección 12.1). Aquí se investigarán otros dos tipos de superficies: cilindros y superficies cuádricas.

Para trazar la gráfica de una superficie es útil determinar las curvas de intersección de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Estas curvas se llaman **trazas** (o secciones transversales) de la superficie.

Cilindros

Un **cilindro** es una superficie que consta de todas las rectas (llamadas **generatrices**) paralelas a una recta dada y que pasan por una curva plana dada.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la superficie $z = x^2$.

SOLUCIÓN Observe que la ecuación de la gráfica, $z = x^2$, no implica a y. Esto significa que cualquier plano vertical con la ecuación $y = k$ (paralela al plano xz) interseca la gráfica en una curva con la ecuación $z = x^2$. Así, estas trazas verticales son parábolas. La figura 1 muestra cómo se forma la gráfica tomando la parábola $z = x^2$ en el plano xz y moviéndola en la dirección del eje y. Esta gráfica es una superficie, llamada **cilindro parabólico**, y está compuesta por numerosas copias infinitamente desplazadas de la misma parábola. Aquí las generatrices del cilindro son paralelas al eje y.

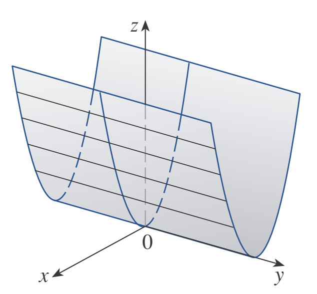


FIGURA 1
La superficie $z = x^2$ es un cilindro parabólico.

■

Se señala que la variable y está ausente en la ecuación del cilindro del ejemplo 1. Esto es habitual en una superficie cuyas generatrices son paralelas a uno de los ejes de coordenadas. Si una de las variables x, y y z falta en la ecuación de una superficie, esta es un cilindro.

EJEMPLO 2 Identifique y trace las superficies.

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y^2 + z^2 = 1$

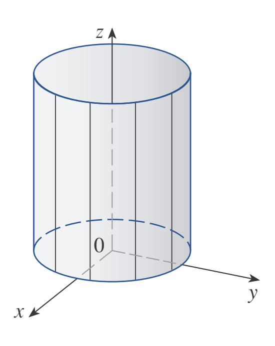


FIGURA 2
$x^2 + y^2 = 1$

SOLUCIÓN
(a) Como z está ausente y las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$ representan un círculo con radio 1 en el plano $z = k$, la superficie $x^2 + y^2 = 1$ es un cilindro circular cuyo eje es el eje z. (Véase la figura 2.) Aquí las generatrices son líneas verticales.

(b) En este caso falta x y la superficie es un cilindro circular cuyo eje es el eje x. (Véase la figura 3.) Esto se obtiene tomando el círculo $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$ en el plano yz y moviéndolo en paralelo al eje x. ■

NOTA Cuando se trata con superficies, es importante advertir que una ecuación como $x^2 + y^2 = 1$ representa un cilindro y no un círculo. La traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy es el círculo con ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

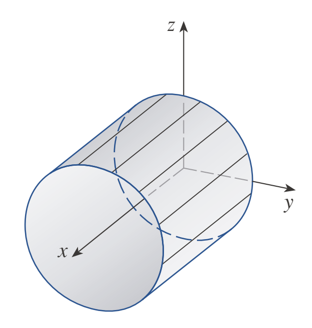


FIGURA 3
$y^2 + z^2 = 1$

Superficies cuádricas

Una **superficie cuádrica** es la gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables x, y y z. La más general de esas ecuaciones es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde $A, B, C,..., J$ son constantes, pero por traslación y rotación puede convertirse en una de estas dos formas estándar

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad \text{o} \quad Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Las superficies cuádricas son la contraparte en tres dimensiones de las secciones cónicas en el plano. (Véase la sección 10.5 para un repaso de las secciones cónicas.)

EJEMPLO 3 Use trazas para diagramar la superficie cuádrica con la ecuación

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

SOLUCIÓN Al sustituir $z = 0$ se halla que la traza en el plano xy es $x^2 + y^2/9 = 1$, la que se reconoce como una ecuación de una elipse. En general, la traza horizontal en el plano $z = k$ es

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

la cual es una elipse, siempre y cuando $k^2 < 4$, es decir $-2 < k < 2$.

De igual manera, las trazas verticales paralelas a los planos yz y xz también son elipses:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2 \qquad x = k \qquad (\text{si } -1 < k < 1)$$

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9} \qquad y = k \qquad (\text{si } -3 < k < 3)$$

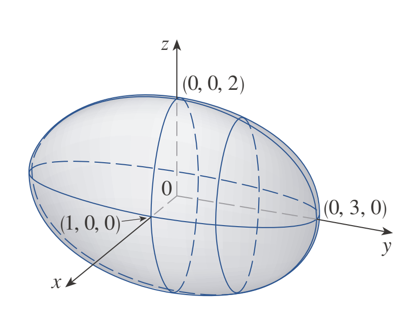


FIGURA 4
El elipsoide $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

La figura 4 muestra cómo al diagramar algunas trazas, se esboza la forma de la superficie. Esta se llama **elipsoide** porque todas sus trazas son elipses. Observe que es simétrica con respecto a cada plano coordenado; esto es un reflejo del hecho de que su ecuación solo implica potencias pares de x, y y z. ■

EJEMPLO 4 Use trazas para diagramar la superficie $z = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Si se establece $x = 0$, se obtiene $z = y^2$, así que el plano yz interseca la superficie en una parábola. Si se aplica $x = k$ (una constante), se obtiene $z = y^2 + 4k^2$.



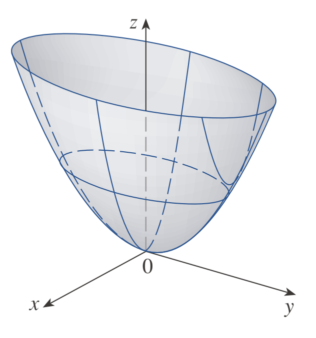


FIGURA 5
La superficie $z = 4x^2 + y^2$ es un paraboloide elíptico. Las trazas horizontales son elipses; las trazas verticales son parábolas.

Esto significa que si se corta la gráfica con cualquier plano paralelo al plano yz, se obtiene una parábola que se abre hacia arriba. De igual modo, si $y = k$, la traza es $z = 4x^2 + k^2$, la que es de nueva cuenta una parábola que se abre hacia arriba. Si se aplica $z = k$, se obtienen las trazas horizontales $4x^2 + y^2 = k$, que se reconocen como una familia de elipses. En conocimiento de las formas de las trazas, se puede diagramar la gráfica en la figura 5. A causa de las trazas elípticas y parabólicas, la superficie cuádrica $z = 4x^2 + y^2$ se llama **paraboloide elíptico**. ■

EJEMPLO 5 Trace la superficie $z = y^2 - x^2$.

SOLUCIÓN Las trazas en los planos verticales $x = k$ son las parábolas $z = y^2 - k^2$, que se abren hacia arriba. Las trazas en $y = k$ son las parábolas $z = -x^2 + k^2$, que se abren hacia abajo. Las trazas horizontales son $y^2 - x^2 = k$, una familia de hipérbolas. Se dibujan las familias de trazas en la figura 6 y se muestran cómo aparecen las trazas cuando se colocan en sus planos correctos en la figura 7.

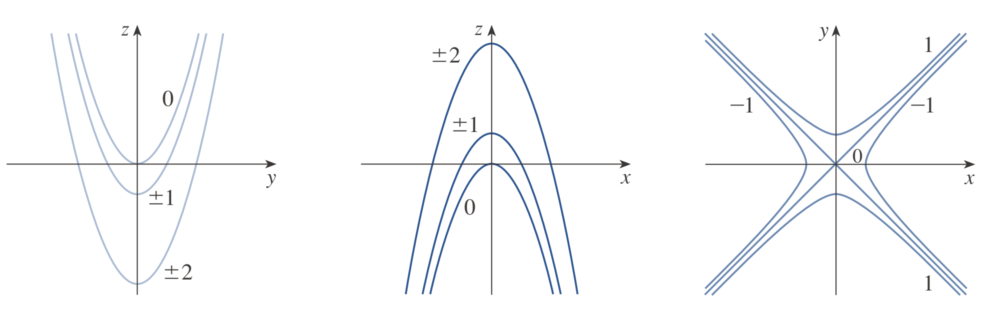


FIGURA 6
Las trazas verticales son parábolas; las trazas horizontales son hipérbolas. Todas las trazas se rotulan con el valor de k.

Las trazas en $x = k$ son $z = y^2 - k^2$. Las trazas en $y = k$ son $z = -x^2 + k^2$. Las trazas en $z = k$ son $y^2 - x^2 = k$.

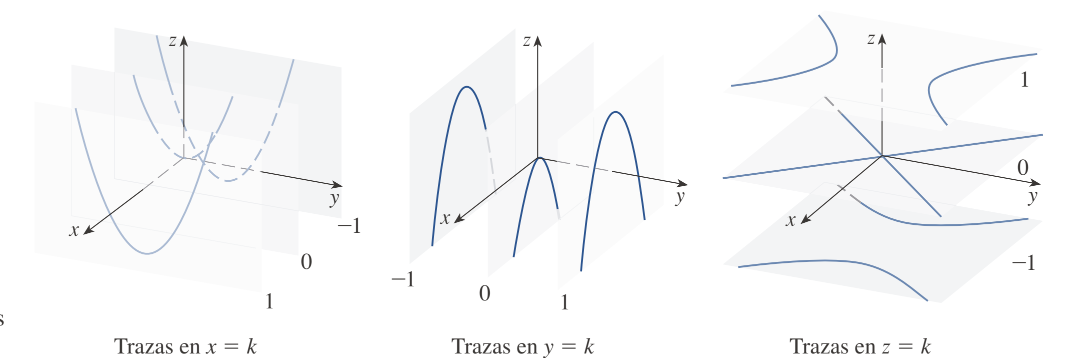
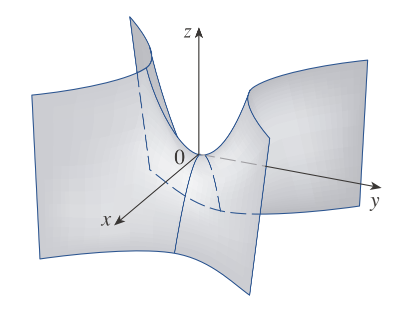


FIGURA 7
Trazas desplazadas a sus planos correctos

TEC En Module 12.6A puede investigar cómo las trazas determinan la forma de una superficie.

En la figura 8 se reúnen las trazas de la figura 7 para formar la superficie $z = y^2 - x^2$, un **paraboloide hiperbólico**. Observe que la forma de la superficie cerca del origen se asemeja a la de una silla de montar. Esta superficie se investigará más a fondo en la sección 14.7 cuando se analicen los puntos de silla.



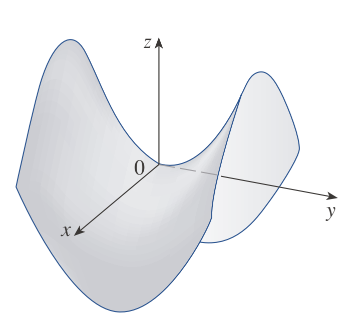


FIGURA 8
Dos vistas de la superficie $z = y^2 - x^2$, un paraboloide hiperbólico

■

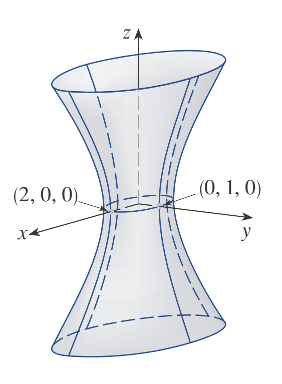


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Trace la superficie $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

SOLUCIÓN La traza en cualquier plano horizontal $z = k$ es la elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

pero las trazas en los planos xz y yz son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad y = 0 \qquad \text{y} \qquad y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \quad x = 0$$

Esta superficie se llama **hiperboloide de una hoja** y se representa en la figura 9. ■

La idea de usar trazas para dibujar una superficie se emplea en el software de graficación tridimensional. En la mayoría de esos programas, las trazas en los planos verticales $x = k$ y $y = k$ se dibujan para valores igualmente espaciados de k y partes de la gráfica se omiten usando la eliminación de líneas ocultas. La tabla 1 muestra gráficos elaborados en computadora de los seis tipos básicos de superficies cuádricas en forma estándar. Todas las superficies son simétricas con respecto al eje z. Si una superficie cuádrica es simétrica en relación con un eje diferente, su ecuación cambia en consecuencia.

Tabla 1 Gráficos de superficies cuádricas

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ Todas las trazas son elipses. Si $a = b = c$, el elipsoide es una esfera.	Cono	$\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x = k$ y $y = k$ son hipérbolas si $k \neq 0$, pero pares de rectas si $k = 0$.
Paraboloide elíptico	$\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico	$\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas. Se ilustra el caso en el que $c < 0$.	Hiperboloide de dos hojas	$-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas horizontales en $z = k$ son elipses si $k > c$ o $k < -c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

TEC En Module 12.6B puede ver cómo cambios en a, b y c en la tabla 1 afectan la forma de la superficie cuádrica.

EJEMPLO 7 Identifique y trace la superficie $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

SOLUCIÓN Dividiendo entre -4, primero se pone la ecuación en forma estándar:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Al comparar esta ecuación con la tabla 1, se ve que representa un hiperboloide de dos hojas, siendo la única diferencia que en este caso el eje del hiperboloide es el eje y. Las trazas en los planos xy y yz son las hipérbolas

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad z = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1 \qquad x = 0$$

Esta superficie no tiene ninguna traza en el plano xz, pero las trazas en los planos verticales $y = k$ para $|k| > 2$ son las elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1 \qquad y = k$$

las cuales pueden escribirse como

$$\frac{x^2}{\dfrac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2\left(\dfrac{k^2}{4} - 1\right)} = 1 \qquad y = k$$

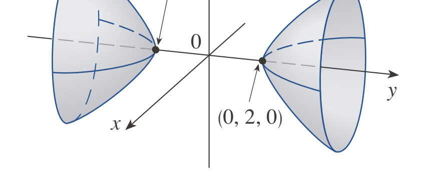


FIGURA 10
$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

Estas trazas se usan para hacer el diagrama de la figura 10. ■

EJEMPLO 8 Clasifique la superficie cuádrica $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

SOLUCIÓN Completando el cuadrado se reescribe la ecuación como

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

Al comparar esta ecuación con la tabla 1, vea que representa un paraboloide elíptico. Aquí, sin embargo, el eje del paraboloide es paralelo al eje y, y ha sido desplazado para que su vértice esté en el punto $(3, 1, 0)$. Las trazas en el plano $y = k$ $(k > 1)$ son las elipses

$$(x - 3)^2 + 2z^2 = k - 1 \qquad y = k$$

La traza en el plano xy es la parábola con la ecuación $y = 1 + (x - 3)^2$, $z = 0$. El paraboloide se representa en la figura 11.

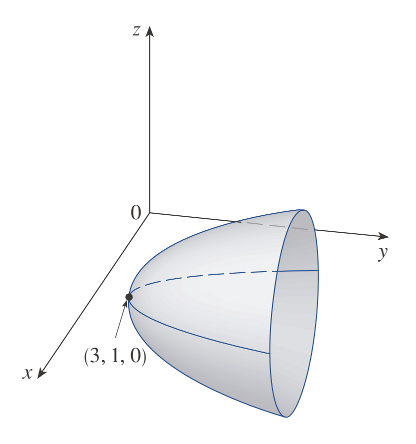


FIGURA 11
$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

■

Aplicaciones de las superficies cuádricas

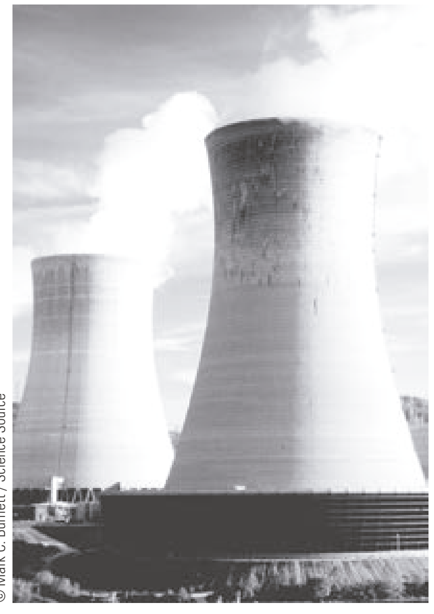
Ejemplos de superficies cuádricas pueden hallarse en el mundo a nuestro alrededor. De hecho, el mundo mismo es un buen ejemplo. Aunque la Tierra es comúnmente modelada como una esfera, un modelo más acertado es una elipsoide, porque la rotación de la Tierra ha causado un aplanamiento en los polos. (Véase el ejercicio 49.)

Paraboloides circulares, obtenidas mediante rotación de una parábola alrededor de su eje, se usan para recolectar y reflejar luz, sonido y señales de radio y televisión. En un radiotelescopio, por ejemplo, señales de estrellas distantes que impactan la concavidad son reflejadas al receptor en el foco y, por tanto, amplificadas. (Esta idea se explica en el problema 22 de la página 273.) El mismo principio se aplica a los micrófonos y los platillos satelitales en forma de paraboloides.

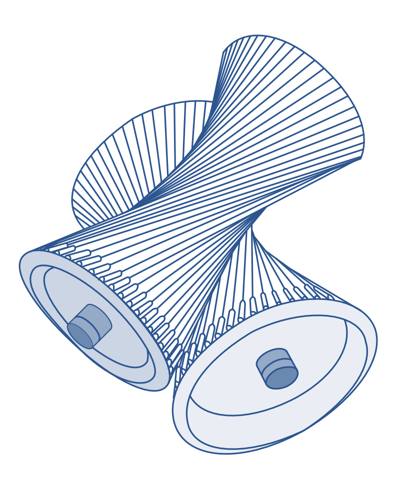
Las torres de enfriamiento de reactores nucleares suelen diseñarse en forma de hiperboloides de una hoja por razones de estabilidad estructural. Pares de hiperboloides se usan para transmitir movimiento rotacional entre ejes sesgados. (Las ruedas dentadas de los engranajes son las líneas generatrices de los hiperboloides. Véase el ejercicio 51.)



Un platillo satelital refleja señales al foco de un paraboloide.



Los reactores nucleares tienen torres de enfriamiento en forma de hiperboloides.



Hiperboloides producen la transmisión de engranajes.

12.6 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué representa la ecuación $y = x^2$ como una curva en $\mathbb{R}^2$?
(b) ¿Qué representa como una superficie en $\mathbb{R}^3$?
(c) ¿Qué representa la ecuación $z = y^2$?

2. (a) Trace la gráfica de $y = e^x$ como una curva en $\mathbb{R}^2$.
(b) Trace la gráfica de $y = e^x$ como una superficie en $\mathbb{R}^3$.
(c) Describa y trace la superficie $z = e^y$.

3-8 Describa y trace la superficie.

3. $y^2 + 4z^2 = 4$

4. $z = 4 - x^2$

5. $z = 1 - y^2$

6. $y = z^2$

7. $xy = 1$

8. $z = \text{sen } y$

9. (a) Determine e identifique las trazas de la superficie cuádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y explique por qué la gráfica se parece a la gráfica del hiperboloide de una hoja de la tabla 1.
(b) Si se cambia la ecuación del inciso (a) a $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, ¿cómo se ve afectada la gráfica?
(c) ¿Y si se cambiara la ecuación del inciso (a) a $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

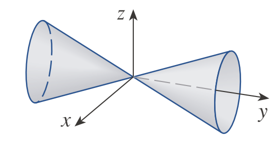
10. (a) Determine e identifique las trazas de la superficie cuádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y explique por qué esta gráfica se parece a la gráfica del hiperboloide de dos hojas de la tabla 1.
(b) Si la ecuación del inciso (a) cambia a $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, ¿qué le sucede a la gráfica? Trace la nueva gráfica.

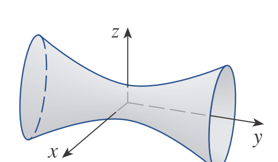
11-20 Use trazas para diagramar e identificar la superficie.

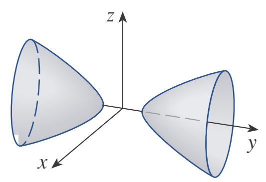
11. $x^2 = y^2 + 4z^2$
12. $4x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 36$
13. $x^2 = 4y^2 + z^2$
14. $z^2 - 4x^2 - y^2 = 4$
15. $9y^2 + 4z^2 = x^2 + 36$
16. $3x^2 + y + 3z^2 = 0$
17. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{4} = 1$
18. $3x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$
19. $y = z^2 - x^2$
20. $x = y^2 - z^2$

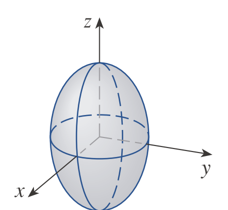
21-28 Asocie la ecuación con su gráfica (rotuladas I-VIII). Dé razones de su elección.

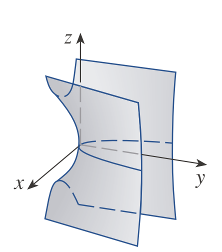
21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$
22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$
23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$
24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$
25. $y = 2x^2 + z^2$
26. $y^2 = x^2 + 2z^2$
27. $x^2 + 2z^2 = 1$
28. $y = x^2 - z^2$

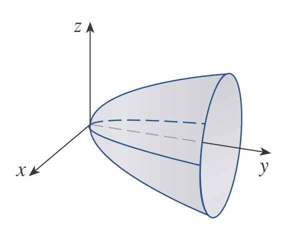
I


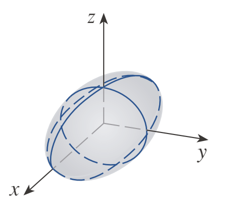
II


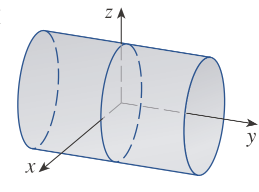
III


IV


V


VI


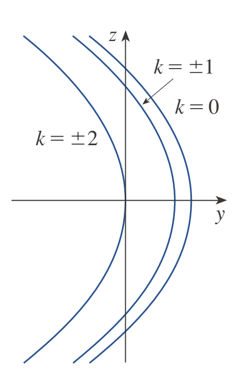
VII


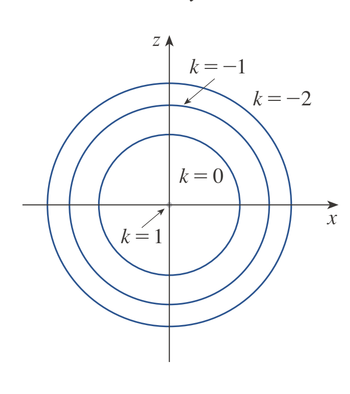
VIII


29-30 Dibuje e identifique una superficie cuádrica que pudiera tener las trazas mostradas.

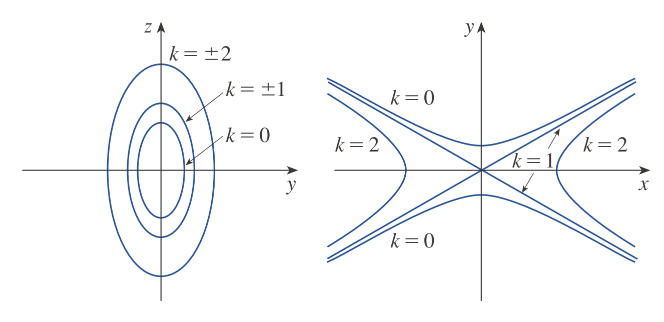
29. Trazas en $x = k$ Trazas en $y = k$







30. Trazas en $x = k$ Trazas en $z = k$



31-38 Reduzca la ecuación a una de las formas estándar, clasifique la superficie y trácela.

31. $y^2 = x^2 + \frac{1}{9}z^2$
32. $4x^2 - y + 2z^2 = 0$
33. $x^2 + 2y - 2z^2 = 0$
34. $y^2 = x^2 + 4z^2 + 4$
35. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - z + 10 = 0$
36. $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 2z + 3 = 0$
37. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0$
38. $4x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 8y + 4z + 55 = 0$

39-42 Use una computadora con software de graficación tridimensional para graficar la superficie. Experimente con puntos de vista y dominios para las variables hasta que obtenga una vista satisfactoria de la superficie.

39. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$
40. $x^2 - y^2 - z = 0$
41. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$
42. $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$

43. Trace la región delimitada por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leqslant z \leqslant 2$.

44. Trace la región delimitada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

45. Determine una ecuación para la superficie obtenida de la rotación de la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje x.

46. Determine una ecuación para la superficie obtenida de la rotación de la recta $z = 2y$ alrededor del eje z.

47. Determine una ecuación para la superficie que consta de todos los puntos equidistantes del punto $(-1, 0, 0)$ y del plano $x = 1$. Identifique la superficie.

48. Determine una ecuación para la superficie que consta de todos los puntos P para los que la distancia de P al eje x es dos veces la distancia de P al plano yz. Identifique la superficie.

49. Tradicionalmente, la superficie de la Tierra ha sido modelada como una esfera, pero el World Geodetic System of 1984 (WGS-84) usa una elipsoide como un modelo más acertado. Este coloca el centro de la Tierra en el origen y el polo norte en el eje z positivo. La distancia del centro a los polos es de 6356.523 km y la distancia a un punto en el ecuador de 6378.137 km.

(a) Determine una ecuación de la superficie de la Tierra tal como la usa WGS-84.

(b) Curvas de igual latitud son trazas en los planos $z = k$. ¿Cuál es la forma de estas curvas?

(c) Los meridianos (curvas de igual longitud) son trazas en los planos de la forma $y = mx$. ¿Cuál es la forma de estos meridianos?

50. Una torre de enfriamiento de un reactor nuclear debe construirse con la forma de un hiperboloide de una hoja (véase la foto de la página 839). El diámetro en la base es de 280 m y el diámetro mínimo, 500 m arriba de la base, es de 200 m. Halle una ecuación para la torre.

51. Demuestre que si el punto (a, b, c) está en el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, entonces las rectas con ecuaciones paramétricas $x = a + t$, $y = b + t$, $z = c + 2(b - a)t$ y $x = a + t$, $y = b - t$, $z = c - 2(b + a)t$ se ubican por completo en este paraboloide. (Esto muestra que el paraboloide hiperbólico es lo que se llama una **superficie reglada**; es decir, puede ser generado por el movimiento de una línea recta. De hecho, este ejercicio indica que a través de cada punto en el paraboloide hiperbólico hay dos líneas generatrices. Las otras superficies cuádricas que también son superficies regladas son los cilindros, los conos y los hiperboloides de una hoja.)

52. Demuestre que la curva de intersección de las superficies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ y $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ se ubica en un plano.

53. Grafique las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 1 - y^2$ en una pantalla común usando el dominio $|x| \leqslant 1.2$, $|y| \leqslant 1.2$ y observe la curva de intersección de estas superficies. Demuestre que la proyección de esta curva en el plano xy es una elipse.

12 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. ¿Cuál es la diferencia entre un vector y un escalar?

2. ¿Cómo se suman geométricamente dos vectores? ¿Cómo se suman algebraicamente?

3. Si **a** es un vector y c un escalar, ¿cómo se relaciona c**a** con **a** geométricamente? ¿Cómo se determina c**a** algebraicamente?

4. ¿Cómo se determina el vector de un punto a otro?

5. ¿Cómo se determina el producto punto **a** · **b** de dos vectores si se conocen sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Y si se conocieran sus componentes?

6. ¿Qué utilidad tienen los productos punto?

7. Escriba expresiones para las proyecciones escalar y vectorial de **b** en **a**. Ilustre con diagramas.

8. ¿Cómo se determina el producto cruz **a** × **b** de dos vectores si se conocen sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Y si se conocieran sus componentes?

9. ¿Qué utilidad tienen los productos cruz?

10. (a) ¿Cómo se establece el área del paralelogramo determinado por **a** y **b**?

(b) ¿Cómo se establece el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c**?

11. ¿Cómo se determina un vector perpendicular a un plano?

12. ¿Cómo se determina el ángulo entre dos planos intersecantes?

13. Escriba una ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas para una recta.

14. Escriba una ecuación vectorial y una ecuación escalar para un plano.

15. (a) ¿Cómo se sabe si dos vectores son paralelos?

(b) ¿Cómo se sabe si dos vectores son perpendiculares?

(c) ¿Cómo se sabe si dos planos son paralelos?

16. (a) Describa un método para determinar si tres puntos P, Q y R están en la misma recta.

(b) Describa un método para determinar si cuatro puntos P, Q, R y S están en el mismo plano.

17. (a) ¿Cómo se determina la distancia de un punto a una recta?

(b) ¿Cómo se determina la distancia de un punto a un plano?

(c) ¿Cómo se determina la distancia entre dos rectas?

18. ¿Cuáles son las trazas de una superficie? ¿Cómo se les determina?

19. Escriba ecuaciones en forma estándar de los seis tipos de superficies cuádricas.



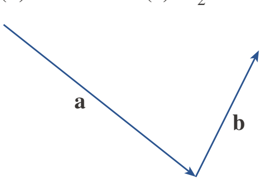
EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

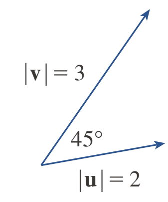
1. Si $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1 v_1, u_2 v_2 \rangle$.
2. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.
3. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.
4. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.
5. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
6. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
7. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}|$.
8. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3 y cualquier escalar k,
$$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$
9. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3 y cualquier escalar k,
$$k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$$
10. Para cualesquiera vectores **u**, **v** y **w** en V_3,
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$
11. Para cualesquiera vectores **u**, **v** y **w** en V_3,
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$
12. Para cualesquiera vectores **u**, **v** y **w** en V_3,
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$
13. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$.
14. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
15. El vector $\langle 3, -1, 2 \rangle$ es paralelo al plano
$$6x - 2y + 4z = 1$$
16. Una ecuación lineal $Ax + By + Cz + D = 0$ representa una recta en el espacio.
17. El conjunto de puntos $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es un círculo.
18. En $\mathbb{R}^3$ la gráfica de $y = x^2$ es un paraboloide.
19. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = 0$ o $\mathbf{v} = 0$.
20. Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = 0$ o $\mathbf{v} = 0$.
21. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = 0$ o $\mathbf{v} = 0$.
22. Si **u** y **v** están en V_3, entonces $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

EJERCICIOS

1. (a) Determine una ecuación de la esfera que pasa por el punto (6, –2, 3) y tiene centro (–1, 2, 1).
(b) Determine la curva en la que esa esfera interseca el plano yz.
(c) Determine el centro y radio de la esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z + 1 = 0$$
2. Copie los vectores en la figura y úselos para trazar cada uno de los vectores siguientes.
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (c) $-\frac{1}{2}\mathbf{a}$ (d) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$



3. Si **u** y **v** son los vectores mostrados en la figura, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. ¿$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está dirigida a la página o fuera de ella?



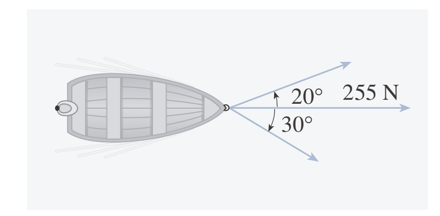
4. Calcule la cantidad dada si
$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$
(a) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ (b) $|\mathbf{b}|$
(c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
(e) $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ (f) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(g) $\mathbf{c} \times \mathbf{c}$ (h) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(i) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ (j) $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$
(k) El ángulo entre **a** y **b** (al grado más cercano)
5. Determine los valores de x tales que los vectores $\langle 3, 2, x \rangle$ y $\langle 2x, 4, x \rangle$ sean ortogonales.
6. Determine dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ como a $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
7. Suponga que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 2$. Determine
(a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$
(c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
(d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
8. Demuestre que si **a**, **b** y **c** están en V_3, entonces
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2$$
9. Determine el ángulo agudo entre dos diagonales de un cubo.

10. Dados los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(2, 3, 0)$, $C(-1, 1, 4)$ y $D(0, 3, 2)$, encuentre el volumen del paralelepípedo con lados adyacentes AB, AC y AD.

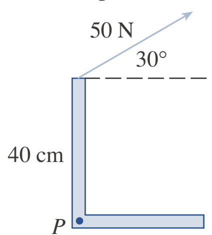
11. (a) Determine un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(1, 4, 3)$.
(b) Determine el área del triángulo ABC.

12. Una fuerza constante $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ mueve un objeto a lo largo del segmento de recta de $(1, 0, 2)$ a $(5, 3, 8)$. Determine el trabajo realizado si la distancia se mide en metros y la fuerza en newtons.

13. Un bote es tirado hacia la playa usando dos cuerdas, como se muestra en el diagrama. Si se necesita una fuerza de 255 N, determine la magnitud de la fuerza en cada cuerda.



14. Determine la magnitud del momento de torsión alrededor de P si una fuerza de 50 N se aplica como se muestra.



15-17 Determine ecuaciones paramétricas para la recta.

15. La recta que pasa por $(4, -1, 2)$ y $(1, 1, 5)$

16. La recta que pasa por $(1, 0, -1)$ y es paralela a la recta $\frac{1}{3}(x - 4) = \frac{1}{2}y = z + 2$

17. La recta que pasa por $(-2, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x - y + 5z = 12$

18-20 Determine una ecuación del plano.

18. El plano que pasa por $(2, 1, 0)$ y es paralelo a $x + 4y - 3z = 1$

19. El plano que pasa por $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 2)$ y $(6, 3, 1)$

20. El plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y que contiene la recta $x = 2t$, $y = 3 - t$, $z = 1 + 3t$

21. Encuentre el punto en el que la recta con ecuaciones paramétricas $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = 4t$ interseca el plano $2x - y + z = 2$.

22. Determine la distancia del origen a la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$.

23. Determine si las rectas dadas por las ecuaciones simétricas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

y

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{2}$$

son paralelas, sesgadas o intersecantes.

24. (a) Demuestre que los planos $x + y - z = 1$ y $2x - 3y + 4z = 5$ no son paralelos ni perpendiculares.
(b) Determine, al grado más cercano, el ángulo entre esos planos.

25. Determine una ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$ y perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

26. (a) Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(-1, -1, 10)$ y $C(1, 3, -4)$.
(b) Determine ecuaciones simétricas para la recta que pasa por B y que es perpendicular al plano del inciso (a).
(c) Un segundo plano pasa por $(2, 0, 4)$ y tiene vector normal $\langle 2, -4, -3\rangle$. Demuestre que el ángulo agudo entre los planos es de aproximadamente 43°.
(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los dos planos.

27. Determine la distancia entre los planos $3x + y - 4z = 2$ y $3x + y - 4z = 24$.

28-36 Identifique y trace la gráfica de cada superficie.

28. $x = 3$

29. $x = z$

30. $y = z^2$

31. $x^2 = y^2 + 4z^2$

32. $4x - y + 2z = 4$

33. $-4x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$

34. $y^2 + z^2 = 1 + x^2$

35. $4x^2 + 4y^2 - 8y + z^2 = 0$

36. $x = y^2 + z^2 - 2y - 4z + 5$

37. Una elipsoide se crea rotando la elipse $4x^2 + y^2 = 16$ alrededor del eje x. Determine una ecuación del elipsoide.

38. Una superficie consta de todos los puntos P tales que la distancia de P al plano $y = 1$ es dos veces la distancia de P al punto $(0, -1, 0)$. Determine una ecuación para esta superficie e identifíquela.

Problemas adicionales

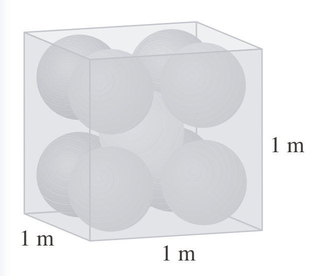


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. Cada arista de una caja cúbica tiene una longitud de 1 m. La caja contiene nueve pelotas esféricas con el mismo radio r. El centro de una pelota está en el centro del cubo y toca a las otras ocho. Cada una de estas otras toca tres lados de la caja. Así, las pelotas están ceñidamente empacadas en la caja (véase la figura). Determine r. (Si tiene dificultades con este problema, lea acerca de la estrategia para la resolución de problemas titulada *Utilice analogías* en la página 71.)

2. Sea B una caja sólida con longitud L, ancho W y altura H. Sea S el conjunto de todos los puntos que están a una distancia de a lo sumo 1 de algún punto de B. Exprese el volumen de S en términos de L, W y H.

3. Sea L la recta de intersección de los planos $cx + y + z = c$ y $x - cy + cz = -1$, donde c es un número real.
(a) Determine ecuaciones simétricas para L.
(b) Al variar el número c, la recta L se desplaza por una superficie S. Determine una ecuación para la curva de intersección de S con el plano horizontal $z = t$ (la traza de S en el plano $z = t$).
(c) Determine el volumen del sólido delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = 1$.

4. Un aeroplano es capaz de volar con una rapidez de 180 km/h en aire quieto. El piloto despega de un campo de aviación y se dirige al norte de acuerdo con la brújula del avión. Después de 30 minutos de vuelo, el piloto se da cuenta de que, debido al viento, el avión ha recorrido en realidad 80 km en un ángulo de 5° este del norte.
(a) ¿Cuál es la velocidad del viento?
(b) ¿Qué dirección debería haber seguido el piloto para llegar al destino previsto?

5. Suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores con $|\mathbf{v}_1| = 2$, $|\mathbf{v}_2| = 3$ y $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 5$. Sea $\mathbf{v}_3 = \text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = \text{proy}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_5 = \text{proy}_{\mathbf{v}_3}\mathbf{v}_4$ y así sucesivamente. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{v}_n|$.

6. Determine una ecuación de la esfera más grande que pasa por el punto (–1, 1, 4) y que es tal que cada uno de los puntos (x, y, z) dentro de la esfera satisface la condición

$$x^2 + y^2 + z^2 < 136 + 2(x + 2y + 3z)$$

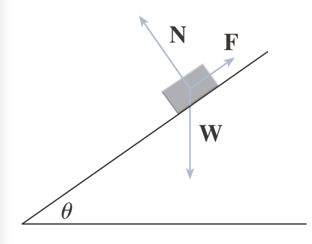


FIGURA PARA EL PROBLEMA 7

7. Suponga que un bloque de masa m se coloca en un plano inclinado, como se muestra en la figura. El descenso del bloque por el plano es retardado por la fricción; si θ no es demasiado grande, la fricción impedirá que el bloque se mueva en lo más mínimo. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son el peso $\mathbf{W}$, donde $|\mathbf{W}| = mg$ (g es la aceleración debida a la gravedad); la fuerza normal $\mathbf{N}$ (el componente normal de la fuerza de reacción del plano sobre el bloque), donde $|\mathbf{N}| = n$; y la fuerza $\mathbf{F}$ debida a la fricción, que actúa en paralelo con el plano inclinado, en oposición a la dirección del movimiento. Si el bloque está en reposo y θ aumenta, $|\mathbf{F}|$ también debe aumentar hasta que, en definitiva, $|\mathbf{F}|$ llegue a su máximo, más allá del cual el bloque comienza a deslizarse. En este ángulo θ_s se ha observado que $|\mathbf{F}|$ es proporcional a n. Así, cuando $|\mathbf{F}|$ llega a su máximo, puede decirse que $|\mathbf{F}| = \mu_s n$, donde μ_s se llama *coeficiente de fricción estática* y depende de los materiales que están en contacto.
(a) Observe que $\mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$ y deduzca que $\mu_s = \tan(\theta_s)$.
(b) Suponga que, para $\theta > \theta_s$, una fuerza externa adicional $\mathbf{H}$ se aplica al bloque, horizontalmente desde la izquierda, y sea $|\mathbf{H}| = h$. Si h es pequeña, el bloque puede deslizarse de todas maneras por el plano; si es lo bastante grande, el bloque subirá por el plano. Sea $h_{\text{mín}}$ el valor más pequeño de h que permite que el bloque permanezca inmóvil (de tal forma que $|\mathbf{F}|$ es máxima).

Eligiendo los ejes de coordenadas de tal modo que $\mathbf{F}$ se ubique a lo largo del eje x, resuelva cada fuerza en componentes paralelos y perpendiculares al plano inclinado y demuestre que

$$h_{\text{mín}} \operatorname{sen}\theta + mg\cos\theta = n \qquad \text{y} \qquad h_{\text{mín}}\cos\theta + \mu_s n = mg\operatorname{sen}\theta$$

(c) Demuestre que

$$h_{\text{min}} = mg\tan(\theta - \theta_s)$$

¿Esta ecuación parece razonable? ¿Tiene sentido para $\theta = \theta_s$? ¿Tiene sentido conforme $\theta \to 90°$? Explique su respuesta.

(d) Sea $h_{\text{máx}}$ el valor más grande de h que permite que el bloque permanezca inmóvil. (¿Qué dirección sigue **F**?) Demuestre que

$$h_{\max} = mg\tan(\theta + \theta_s)$$

¿Esta ecuación parece razonable? Explique su respuesta.

8. Un sólido tiene las propiedades siguientes. Cuando es iluminado por rayos paralelos al eje z, su sombra es un disco circular. Si los rayos son paralelos al eje y, su sombra es un cuadrado. Si los rayos son paralelos al eje x, su sombra es un triángulo isósceles. (En el ejercicio 12.1.48 se le pidió describir y trazar un ejemplo de un sólido como este, pero hay muchos sólidos de este tipo.) Suponga que la proyección en el plano xz es un cuadrado cuyos lados tienen longitud 1.

(a) ¿Cuál es el volumen del más grande de esos sólidos?
(b) ¿Hay un volumen al que se pueda calificar como el más reducido?

13 Funciones vectoriales



Las trayectorias de objetos que se mueven en el espacio, como los jets que aparecen aquí, pueden describirse con funciones vectoriales. En la sección 13.1 verá cómo usar estas funciones vectoriales para determinar si dos objetos así pueden chocar o no.

LAS FUNCIONES QUE SE HAN usado hasta aquí han sido funciones con valores reales. Ahora se estudiarán funciones cuyos valores son vectores porque tales funciones son necesarias para describir curvas y superficies en el espacio. También se usarán funciones con vectores como valores para describir el movimiento de objetos en el espacio. En particular, se emplearán para derivar las leyes del movimiento de los planetas de Kepler.

13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

En general, una función es una regla que asigna a cada elemento en el dominio un elemento en el rango. Una **función con un vector como valor**, o **función vectorial**, es simplemente una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores. Interesan en particular las funciones vectoriales **r** cuyos valores son vectores tridimensionales. Esto significa que para cada número t en el dominio de **r** hay un vector único en V_3, denotado por $\mathbf{r}(t)$. Si $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son los componentes del vector $\mathbf{r}(t)$, f, g y h son funciones de valores reales llamadas **funciones componentes** de **r** y se pueden escribir

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

Se usa la letra t para denotar la variable independiente porque representa el tiempo en la mayoría de las aplicaciones de funciones vectoriales.

EJEMPLO 1 Si

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t}\right\rangle$$

entonces las funciones componentes son

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3 - t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

Por efecto de la convención usual, el dominio de **r** consta de todos los valores de t para los que se define la expresión $\mathbf{r}(t)$. Las expresiones t^3, $\ln(3 - t)$ y $\sqrt{t}$ se definen en su totalidad cuando $3 - t > 0$ y $t \geqslant 0$. Así, el dominio de **r** es el intervalo $[0, 3)$. ■

Límites y continuidad

El **límite** de una función vectorial **r** se define tomando los límites de sus funciones componentes como sigue.

Si $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$, esta definición equivale a decir que la longitud y dirección del vector $\mathbf{r}(t)$ aproxima la longitud y dirección del vector **L**.

1 Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, entonces

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\right\rangle$$

siempre y cuando los límites de las funciones componentes existan.

En términos equivalentes, se podría haber usado una definición ε-δ (véase el ejercicio 54). Los límites de las funciones vectoriales obedecen las mismas reglas que los límites de funciones con valores reales (véase el ejercicio 53).

EJEMPLO 2 Determine $\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t)$, donde $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición 1, el límite de **r** es el vector cuyos componentes son los límites de las funciones componentes de **r**:

$$\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t\to 0}(1 + t^3)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to 0} te^{-t}\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{k} \qquad \text{(por la ecuación 3.3.2)}$$ ■

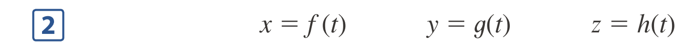
Una función vectorial **r** es **continua en *a*** si

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

En vista de la definición 1, vemos que **r** es continua en a si, y solo si, sus funciones componentes f, g y h son continuas en a.

Curvas en el espacio

Existe una estrecha relación entre funciones vectoriales continuas y curvas en el espacio. Suponga que f, g y h son funciones continuas con valores reales en un intervalo I. Entonces el conjunto C de todos los puntos (x, y, z) en el espacio, donde



$$\boxed{2} \qquad x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

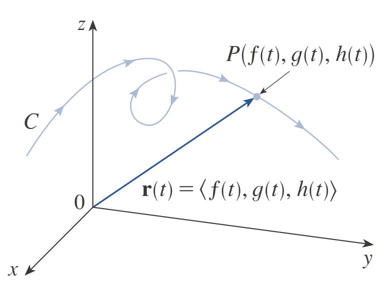


FIGURA 1

C es trazada por la punta de un vector de posición en movimiento $\mathbf{r}(t)$.

y t varía a todo lo largo del intervalo I, se llama una **curva en el espacio**. Las ecuaciones en (2) se llaman **ecuaciones paramétricas de *C*** y t se llama un **parámetro**. Se puede concebir C como trazada por una partícula en movimiento cuya posición en el tiempo t es $(f(t), g(t), h(t))$. Si se considera ahora la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, entonces $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición del punto $P(f(t), g(t), h(t))$ en C. Así, toda función vectorial continua **r** define una curva en el espacio C trazada por la punta del vector en movimiento $\mathbf{r}(t)$, como se muestra en la figura 1.

EJEMPLO 3 Describa la curva definida por la función vectorial



$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t\rangle$$

TEC Visual 13.1A muestra varias curvas trazadas por vectores de posición, incluidas las de las figuras 1 y 2.

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$x = 1 + t \qquad y = 2 + 5t \qquad z = -1 + 6t$$

las que con base en las ecuaciones 12.5.2 se reconocen como ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto $(1, 2, -1)$ y paralela al vector $\langle 1, 5, 6\rangle$. O bien, podría observar que la función puede escribirse como $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, donde $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 6\rangle$, y esta es la ecuación vectorial de una recta dada por la ecuación 12.5.1. ■

Curvas en un plano también pueden representarse en notación vectorial. Por ejemplo, la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 2t$ y $y = t + 1$ (véase el ejemplo 10.1.1) también podrían describirse con la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1\rangle = (t^2 - 2t)\,\mathbf{i} + (t + 1)\,\mathbf{j}$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$.

EJEMPLO 4 Trace la curva cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas para esta curva son

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

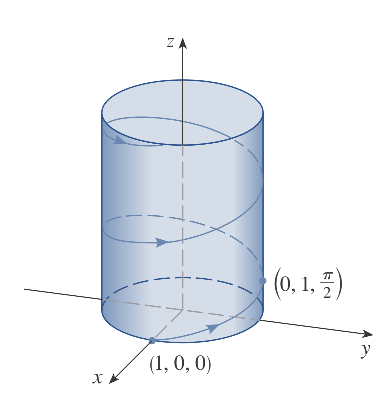


FIGURA 2

Como $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ para todos los valores de t, la curva debe estar en el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. El punto (x, y, z) se sitúa directamente arriba del punto $(x, y, 0)$, el cual se mueve a contrarreloj alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. (La proyección de la curva en el plano xy tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, 0\rangle$. Véase el ejemplo 10.1.2.) Como $z = t$, la curva sube en espiral alrededor del cilindro al incrementarse t. Esta curva, la cual se muestra en la figura 2, se llama **hélice**. ■



FIGURA 3

Una hélice doble

La forma de sacacorchos de la hélice del ejemplo 4 es conocida por su ocurrencia en resortes. También aparece en el modelo del ADN (ácido desoxirribonucleico, el material genético de las células vivas). En 1953 James Watson y Francis Crick demostraron que la estructura de la molécula del ADN es la de dos hélices paralelas y enlazadas como en la figura 3.

En los ejemplos 3 y 4 se dieron ecuaciones vectoriales de curvas y se pidió una descripción geométrica o diagrama. En los dos ejemplos siguientes se dará una descripción geométrica de una curva y se pedirá determinar ecuaciones paramétricas para la misma.

La figura 4 muestra el segmento de recta PQ del ejemplo 5.

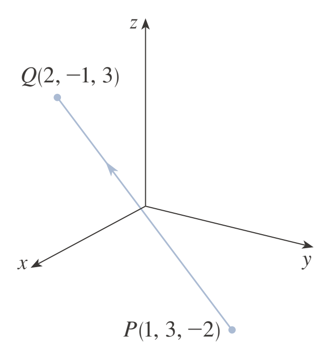


FIGURA 4

EJEMPLO 5 Determine una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para el segmento de recta que une al punto $P(1, 3, -2)$ con el punto $Q(2, -1, 3)$.

SOLUCIÓN En la sección 12.5 se determinó una ecuación vectorial para el segmento de recta que une la punta del vector $\mathbf{r}_0$ con la punta del vector $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Véase la ecuación 12.5.4) Aquí se toma $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2\rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3\rangle$ para obtener una ecuación vectorial del segmento de recta de P a Q:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 1, 3, -2\rangle + t\langle 2, -1, 3\rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

o

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t\rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$x = 1 + t \qquad y = 3 - 4t \qquad z = -2 + 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$ ■

EJEMPLO 6 Determine una función vectorial que represente la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 - 1$ y el plano $y + z = 2$.

SOLUCIÓN La figura 5 muestra cómo interesecan el plano y el cilindro, y la figura 6 la curva de intersección C, la cual es una elipse.

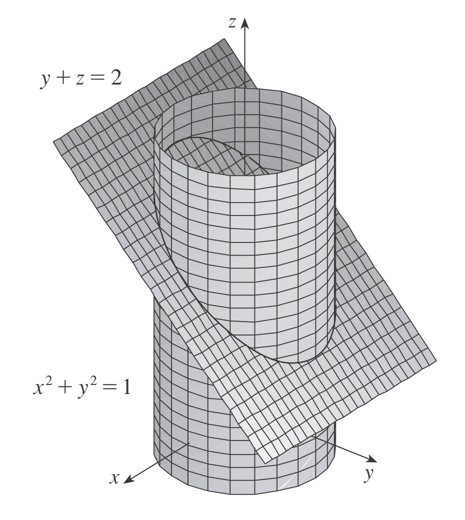


FIGURA 5

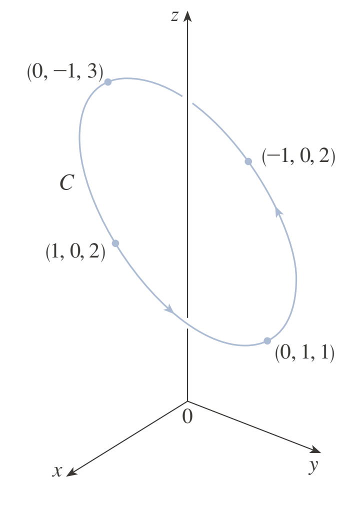


FIGURA 6

La proyección de C en el plano xy es el círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Así, por el ejemplo 10.1.2 se sabe que se puede escribir

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

De la ecuación del plano se tiene

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$$

Así, se puede escribir ecuaciones paramétricas para C como

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = 2 - \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

La ecuación vectorial correspondiente es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (2 - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Esta ecuación se llama *parametrización* de la curva C. Las flechas de la figura 6 indican la dirección en la que se traza C al incrementarse el parámetro t. ■

■ Uso de computadoras para trazar curvas en el espacio

Las curvas en el espacio son inherentemente más difíciles de trazar a mano que las curvas en un plano; para una acertada representación se debe usar tecnología. Por ejemplo, la figura 7 muestra una gráfica generada por computadora de la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = (4 + \operatorname{sen} 20t)\cos t \qquad y = (4 + \operatorname{sen} 20t)\operatorname{sen} t \qquad z = \cos 20t$$

Esta curva se llama **espiral toroidal** porque se sitúa en un toro. Otra curva interesante, el **nudo de trébol**, con ecuaciones

$$x = (2 + \cos 1.5t)\cos t \qquad y = (2 + \cos 1.5t)\operatorname{sen} t \qquad z = \operatorname{sen} 1.5t$$

se grafica en la figura 8. No sería fácil trazar a mano ninguna de estas curvas.

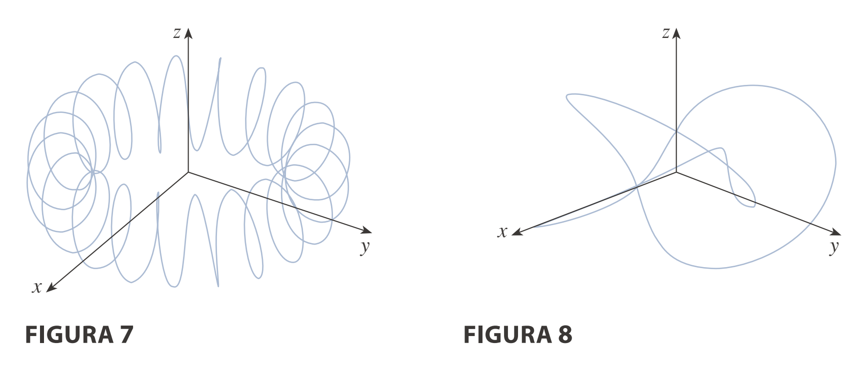


FIGURA 7

Una espiral toroidal

FIGURA 8

Un nudo de trébol

Aun cuando se usa una computadora para trazar una curva en el espacio, las ilusiones ópticas dificultan obtener una buena impresión de la apariencia verdadera de la curva. (Esto es especialmente cierto en la figura 8. Véase el ejercicio 52.) El ejemplo siguiente muestra cómo lidiar con este problema.

EJEMPLO 7 Use una computadora para trazar la curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Esta curva se llama **cúbica torcida** (también se conoce como cúbica alabeada).

SOLUCIÓN Se comienza usando la computadora para trazar la curva con ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z - t^3$ para $-2 \leqslant t \leqslant 2$. El resultado aparece en la figura 9(a), pero es difícil ver la verdadera naturaleza de la curva con base únicamente en esa gráfica. La mayoría de los programas de cómputo de graficación tridimensional

permiten al usuario encerrar una curva o superficie en una caja en lugar de exhibir los ejes de coordenadas. Cuando se examina la misma curva en una caja en la figura 9(b), se tiene una imagen mucho más clara de la curva. Se puede ver que sube de una de las esquinas inferiores de la caja a la esquina superior más cercana a la persona, y que se tuerce al subir.

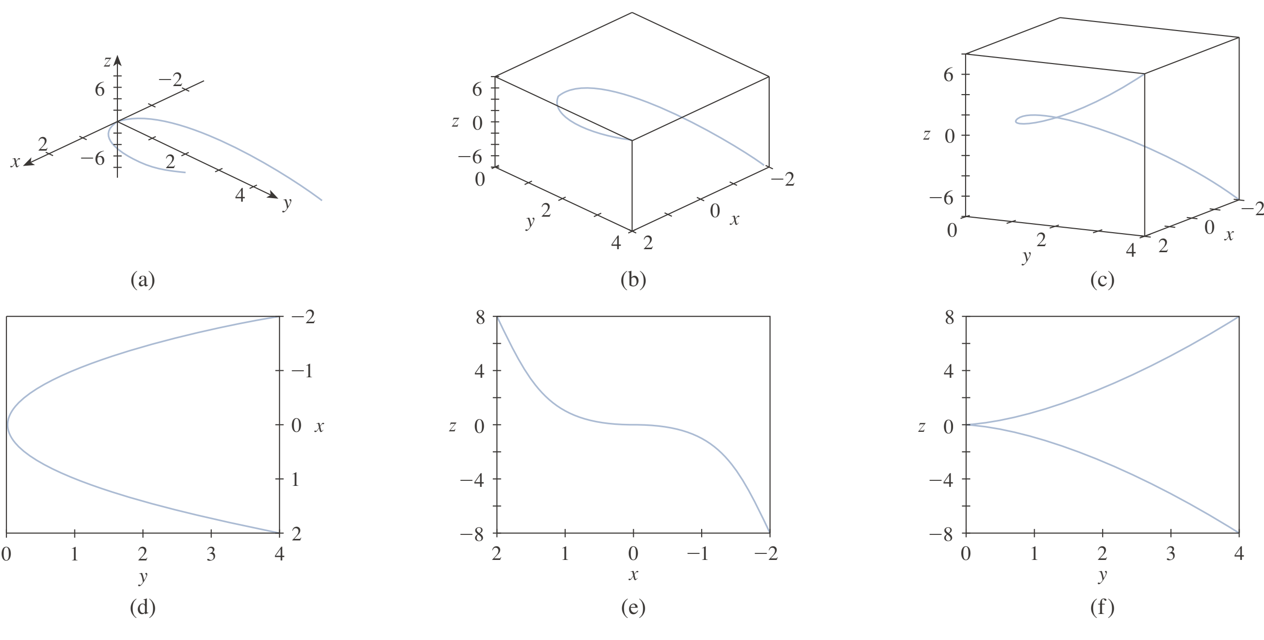


FIGURA 9

Vistas de la cúbica torcida

TEC En Visual 13.1B usted puede rotar la caja de la figura 9 para ver la curva desde cualquier punto de vista.

Se obtiene una idea todavía mejor de la curva cuando se ve desde diferentes perspectivas. La parte (c) muestra el resultado de rotar la caja para dar otro punto de vista. Las partes (d), (e) y (f) muestran las vistas que se obtiene cuando se examina directamente una de las caras de la caja. En particular, la parte (d) muestra la vista directa desde arriba de la caja. Esta es la proyección de la curva en el plano xy, es decir la parábola $y = x^2$. La parte (e) muestra la proyección en el plano xz, la curva cúbica $z = x^3$. Ahora es obvio por qué la curva dada se llama cúbica torcida. ■

Otro método para visualizar una curva en el espacio es dibujarla en una superficie. Por ejemplo, la cúbica torcida del ejemplo 7 se tiende en el cilindro parabólico $y = x^2$. (Elimine el parámetro de las dos primeras ecuaciones paramétricas, $x = t$ y $y = t^2$). La figura 10 muestra tanto el cilindro como la cúbica torcida, y se ve que la curva se mueve hacia arriba desde el origen a lo largo de la superficie del cilindro. También se utiliza este método en el ejemplo 4 para visualizar la hélice tendida en el cilindro circular (véase la figura 2).

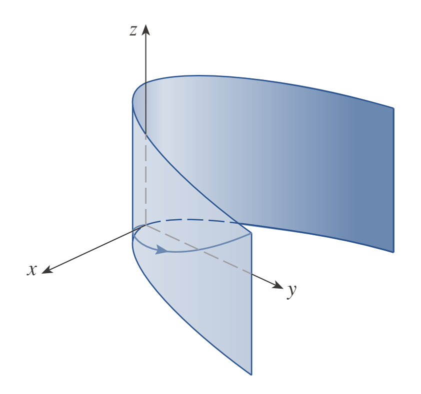


FIGURA 10

Un tercer método para visualizar la cúbica torcida es reparar en que también se tiende en el cilindro $z = x^3$. Así, puede verse como la curva de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$. (Véase la figura 11.)

TEC Visual 13.1C muestra cómo surgen las curvas como intersecciones de superficies.

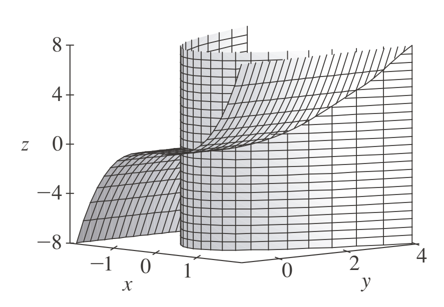
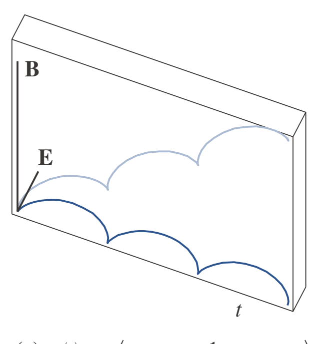


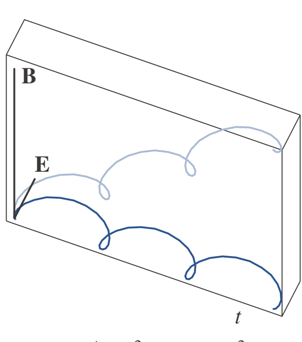
FIGURA 11

Algunos sistemas algebraicos por computadora brindan una imagen más clara de una curva en el espacio encerrándola en un tubo. Un diagrama así permite ver si una parte de una curva pasa al frente o por detrás de otra parte de la curva. Por ejemplo, la figura 13 muestra la curva de la figura 12(b) producida por el comando `tublepot` en Maple.

Se ha visto que una curva en el espacio interesante, la hélice, ocurre en el modelo del ADN. Otro ejemplo notable de una curva en espacio en la ciencia es la trayectoria de una partícula positivamente cargada en campos eléctrico y magnético ortogonalmente orientados **E** y **B**. Dependiendo de la velocidad inicial dada a la partícula en el origen, la trayectoria de la partícula es una curva en el espacio cuya proyección en el plano horizontal es el cicloide que se estudió en la sección 10.1 [figura 12(a)] o una curva cuya proyección es el trocoide que se investigó en el ejercicio 10.1.40 [figura 12(b)].



(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t \rangle$



(b) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2}\operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t \rangle$

FIGURA 12

Movimiento de una partícula cargada en campos eléctrico y magnético ortogonalmente orientados

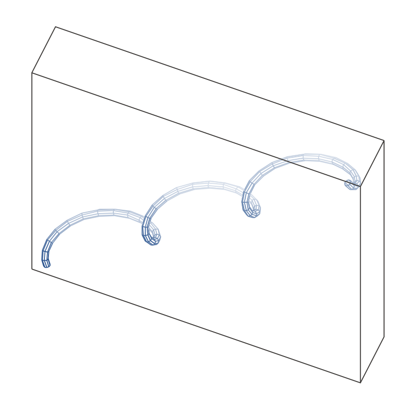


FIGURA 13

Para más detalles concernientes a la física implicada y la animación de las trayectorias de las partículas, véanse los siguientes sitios web:

- www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/
- www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=36

13.1 EJERCICIOS

1-2 Determine el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t+1), \dfrac{t}{\sqrt{9-t^2}}, 2^t \right\rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{t-2}\mathbf{k}$

3-6 Determine el límite.

3. $\lim\limits_{t \to 0} \left(e^{-3t}\,\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k} \right)$

4. $\lim\limits_{t \to 1} \left(\dfrac{t^2 - t}{t-1}\mathbf{i} + \sqrt{t+8}\,\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{sen} \pi t}{\ln t}\mathbf{k} \right)$

5. $\lim_{t\to\infty} \left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2}, \tan^{-1}t, \frac{1-e^{-2t}}{t} \right\rangle$

6. $\lim_{t\to\infty} \left\langle te^{-t}, \frac{t^3+t}{2t^3-1}, t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right\rangle$

7-14 Trace la curva con la ecuación vectorial dada. Indique con una flecha la dirección en la que se incrementa t.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t \rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 1, t \rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2 - t, 2t \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle 3, t, 2 - t^2 \rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\, \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^4 \mathbf{j} + t^6 \mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t\, \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

15-16 Trace las proyecciones de la curva en los tres planos de coordenadas. Use estas proyecciones para trazar la curva.

15. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \operatorname{sen} t, 2 \cos t \rangle$

16. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, t^2 \rangle$

17-20 Determine una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para el segmento de recta que une P con Q.

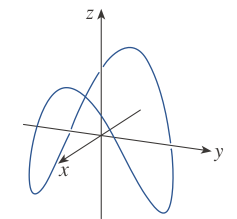
17. $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$

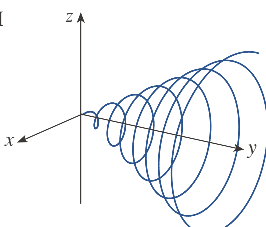
18. $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 1)$

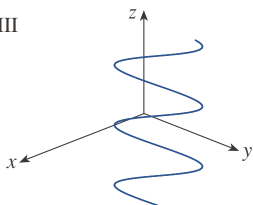
19. $P(0, -1, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$

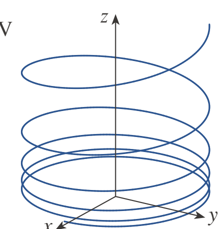
20. $P(a, b, c)$, $Q(u, v, w)$

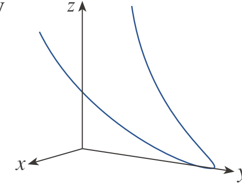
21-26 Asocie las ecuaciones paramétricas con las gráficas (rotuladas I-VI). Dé razones de sus decisiones.

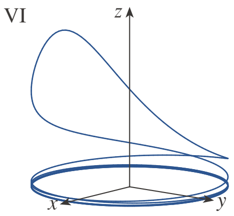
I


II


III


IV


V


VI


21. $x = t \cos t, \quad y = t, \quad z = t \operatorname{sen} t, \quad t \geqslant 0$

22. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 1/(1 + t^2)$

23. $x = t, \quad y = 1/(1 + t^2), \quad z = t^2$

24. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \cos 2t$

25. $x = \cos 8t, \quad y = \operatorname{sen} 8t, \quad z = e^{0.8t}, \quad t \geqslant 0$

26. $x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t, \quad z = t$

27. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = t \cos t$ $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ se sitúa en el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y use este hecho para trazar la curva.

28. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ es la curva de intersección de las superficies $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 1$. Use este hecho para trazar la curva.

29. Determine tres superficies diferentes que contengan la curva $\mathbf{r}(t) = 2t\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} + e^{2t}\, \mathbf{k}$.

30. Determine tres superficies diferentes que contengan la curva $\mathbf{r}(t) = t^2\, \mathbf{i} + \ln t\, \mathbf{j} + (1/t)\, \mathbf{k}$.

31. ¿En qué puntos la curva $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + (2t - t^2)\, \mathbf{k}$ interseca el paraboloide $z = x^2 + y^2$?

32. ¿En qué puntos la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ interseca la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

33-37 Use una computadora para graficar la curva con la ecuación vectorial dada. Cerciórese de elegir un dominio de parámetros y puntos de vista que revelen la verdadera naturaleza de la curva.

33. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t, \cos 2t \rangle$

34. $\mathbf{r}(t) = \langle te^t, e^{-t}, t \rangle$

35. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \operatorname{sen} 3t \cos t, \frac{1}{4}t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t \right\rangle$

36. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(8 \cos t) \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(8 \cos t) \operatorname{sen} t, \cos t \rangle$

37. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t \operatorname{sen} t, t \cos t \rangle$

38. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = \cos 4t$. Explique su forma graficando sus proyecciones en los tres planos de coordenadas.

39. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = (1 + \cos 16t) \cos t$$
$$y = (1 + \cos 16t) \operatorname{sen} t$$
$$z = 1 + \cos 16t$$

Explique la apariencia de la gráfica al mostrar que se ubica en un cono.

40. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0.25 \cos^2 10t}\, \cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0.25 \cos^2 10t}\, \operatorname{sen} t$$
$$z = 0.5 \cos 10t$$

Explique la apariencia de la gráfica al mostrar que se ubica en una esfera.

41. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ pasa por los puntos (1, 4, 0) y (9, −8, 28), pero no por el punto (4, 7, –6).

42-46 Determine una función vectorial que represente la curva de intersección de las dos superficies.

42. El cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y la superficie $z = xy$

43. El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1 + y$

44. El paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ y el cilindro parabólico $y = x^2$

45. El hiperboloide $z = x^2 - y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

46. El semielipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $y \geqslant 0$, y el cilindro $x^2 + z^2 = 1$

---

47. Intente trazar a mano la curva de intersección del cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ y el cilindro parabólico $z = x^2$. Luego determine ecuaciones paramétricas para esta curva y use estas ecuaciones y una computadora para trazar la curva.

48. Intente trazar a mano la curva de intersección del cilindro parabólico $y = x^2$ y la mitad superior del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Luego determine ecuaciones paramétricas para esta curva y use estas ecuaciones y una computadora para graficar la curva.

49. Si dos objetos viajan por el espacio a lo largo de dos curvas diferentes, a menudo es importante saber si chocarán. (¿Un misil impactará su blanco móvil? ¿Dos aviones chocarán?) Las curvas podrían intersecar, pero se necesita saber si los objetos estarán en la misma posición al mismo tiempo. Suponga que las trayectorias de las dos partículas están dadas por las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2\rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6\rangle$$

para $t \geqslant 0$. ¿Las partículas chocarán?

50. Dos partículas viajan a lo largo de las curvas en el espacio

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t\rangle$$

¿Las partículas chocarán? ¿Sus trayectorias intersecarán?

51. (a) Grafique la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = \tfrac{27}{26}\,\text{sen}\,8t - \tfrac{8}{39}\,\text{sen}\,18t$$
$$y = -\tfrac{27}{26}\cos 8t + \tfrac{8}{39}\cos 18t$$
$$z = \tfrac{144}{65}\,\text{sen}\,5t$$

(b) Demuestre que la curva se ubica en el hiperboloide de una hoja $144x^2 + 144y^2 - 25z^2 = 100$.

52. La vista del nudo de trébol mostrada en la figura 8 es exacta, pero no revela toda la historia. Use las ecuaciones paramétricas

$$x = (2 + \cos 1.5t)\cos t$$
$$y = (2 + \cos 1.5t)\,\text{sen}\,t$$
$$z = \text{sen}\,1.5t$$

para trazar a mano la curva vista desde arriba, con brechas que indiquen dónde pasa la curva sobre ella misma. Comience por demostrar que la proyección de la curva en el plano xy tiene coordenadas polares $r = 2 + \cos 1.5t$ y $\theta = t$, de manera que r varía entre 1 y 3. Después demuestre que z tiene valores máximo y mínimo cuando la proyección está a medio camino entre $r = 1$ y $r = 3$.

Al terminar su diagrama, use una computadora para trazar la curva con punto de vista directamente arriba y compárela con su diagrama. Use luego la computadora para trazar la curva desde otros puntos de vista. Podrá obtener una mejor impresión de la curva si traza un tubo con radio 0.2 alrededor de la curva. (Use el comando `tubeplot` en Maple o el comando `tubecurve` o `Tubecommand` en Mathematica.)

53. Suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales que fijan límites cuando $t \to a$ y sea c una constante. Compruebe las siguientes propiedades de los límites.

(a) $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t) + \lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t\to a} c\mathbf{u}(t) = c\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)$

(c) $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\cdot\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$

(d) $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\times\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$

54. Demuestre que $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < |t - a| < \delta \text{ entonces } |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

13.2 Derivadas e integrales de funciones vectoriales

Más adelante en este mismo capítulo se usarán funciones vectoriales para describir el movimiento de los planetas y otros objetos en el espacio. Aquí se preparará el camino desarrollando el cálculo de funciones vectoriales.

Derivadas

La derivada $\mathbf{r}'$ de una función vectorial $\mathbf{r}$ se define casi de la misma manera que las funciones con valores reales:

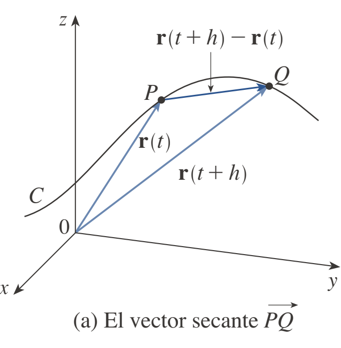
1
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

si este límite existe. La significación geométrica de esta definición aparece en la figura 1. Si los puntos P y Q tienen vectores de posición $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + h)$, entonces $\overrightarrow{PQ}$ representa el vector $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$, el cual puede considerarse un vector secante. Si $h > 0$, el múltiplo escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t))$ tiene la misma dirección que $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$. Cuando $h \to 0$, parece que este vector se aproxima a un vector que está en la recta tangente. Por esta razón, el vector $\mathbf{r}'(t)$ se llama **vector tangente** a la curva definida por $\mathbf{r}$ en el punto P, siempre y cuando $\mathbf{r}'(t)$ exista y $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. La **recta tangente** a C en P se define como la recta que pasa por P paralela al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$. También se tendrá ocasión de considerar el **vector tangente unitario**, el cual es

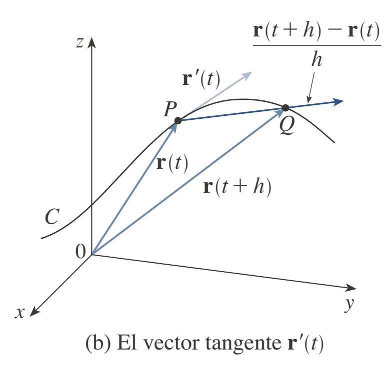
Nótese que cuando $0 < h < 1$, multiplicar el vector secante por $1/h$ *alarga* el vector, como se muestra en la figura 1(b).

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

TEC Visual 13.2 muestra una animación de la figura 1.



(a) El vector secante $\overrightarrow{PQ}$



(b) El vector tangente $\mathbf{r}'(t)$

FIGURA 1

El siguiente teorema da un método conveniente para calcular la derivada de una función vectorial $\mathbf{r}$: sencillamente se deriva cada componente de $\mathbf{r}$.

2 Teorema Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$, donde f, g, y h son funciones derivables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}$$

COMPROBACIÓN

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle$$ ■

EJEMPLO 1

(a) Determine la derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \text{sen}\,2t\,\mathbf{k}$.

(b) Determine el vector tangente unitario en el punto donde $t = 0$.

SOLUCIÓN

(a) De acuerdo con el teorema 2, se deriva cada componente de $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\,\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

(b) Como $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ y $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, el vector tangente unitario en el punto $(1, 0, 0)$ es

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{k}$$ ■

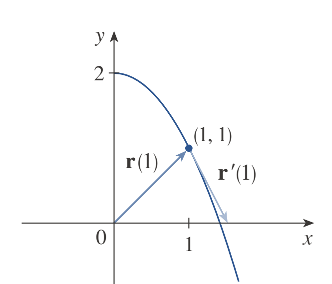


FIGURA 2

Nótese en la figura 2 que el vector tangente apunta en la dirección de t creciente. (Véase el ejercicio 58.)

EJEMPLO 2 Para la curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (2 - t)\,\mathbf{j}$, determine $\mathbf{r}'(t)$ y trace el vector de posición $\mathbf{r}(1)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(1)$.

SOLUCIÓN Se tiene

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

La curva es una curva en un plano y la eliminación del parámetro de las ecuaciones $x = \sqrt{t}$, $y = 2 - t$ da $y = 2 - x^2$, $x \geqslant 0$. En la figura 2 se traza el vector de posición $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ a partir del origen y el vector tangente $\mathbf{r}'(1)$ a partir del punto correspondiente $(1, 1)$. ■

EJEMPLO 3 Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la hélice con ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t \qquad y = \text{sen}\,t \qquad z = t$$

en el punto $(0, 1, \pi/2)$.

SOLUCIÓN La ecuación vectorial de la hélice es $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, \text{sen}\,t, t\rangle$, así que

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2\,\text{sen}\,t, \cos t, 1\rangle$$

El valor del parámetro correspondiente al punto $(0, 1, \pi/2)$ es $t = \pi/2$ y, así que el vector tangente ahí es $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1\rangle$. La recta tangente es la recta que pasa por $(0, 1, \pi/2)$ paralela al vector $\langle -2, 0, 1\rangle$, de modo que por las ecuaciones 12.5.2 sus ecuaciones paramétricas son

$$x = -2t \qquad y = 1 \qquad z = \frac{\pi}{2} + t$$ ■

La hélice y la recta tangente del ejemplo 3 aparecen en la figura 3.

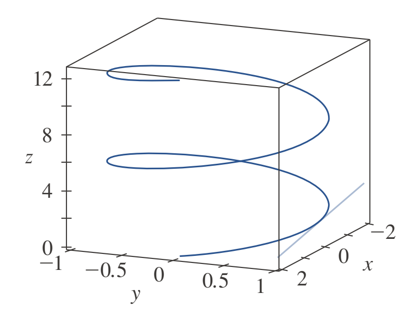


FIGURA 3

En la sección 13.4 se verá cómo $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ pueden interpretarse como los vectores de velocidad y aceleración de una partícula que se mueve en el espacio con un vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el momento t.

Igual que las funciones con valores reales, la **segunda derivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ es la derivada de $\mathbf{r}'$, es decir $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$. Por ejemplo, la segunda derivada de la función del ejemplo 3 es

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2 \cos t, -\text{sen } t, 0 \rangle$$

Reglas de derivación

El siguiente teorema demuestra que las fórmulas de derivación para funciones con valores reales tienen sus contrapartes para funciones con un vector como valor.

3 Teorema Suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales derivables, c un escalar y f una función con valores reales. Entonces

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

3. $\dfrac{d}{dt}[f(t)\,\mathbf{u}(t)] = f'(t)\,\mathbf{u}(t) + f(t)\,\mathbf{u}'(t)$

4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$

5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$ (regla de la cadena)

Este teorema puede comprobarse directamente de la definición 1 o usando el teorema 2 y las correspondientes fórmulas de derivación para funciones con valores reales. La comprobación de la fórmula 4 se da a continuación, las fórmulas restantes se dejan como ejercicios.

COMPROBACIÓN DE LA FÓRMULA 4 Sea

$$\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \qquad \mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t) \rangle$$

Entonces $$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)\,g_1(t) + f_2(t)\,g_2(t) + f_3(t)\,g_3(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)\,g_i(t)$$

así que la regla del producto ordinaria da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} f_i(t)\,g_i(t) = \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dt}[f_i(t)\,g_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{3}[f_i'(t)\,g_i(t) + f_i(t)\,g_i'(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{3} f_i'(t)\,g_i(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(t)\,g_i'(t) \\ &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Demuestre que si $|\mathbf{r}(t)| = c$ (una constante), entonces $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todas las t.

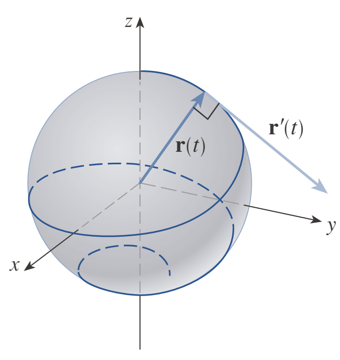


FIGURA 4

SOLUCIÓN Como

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

y c^2 es una constante, la fórmula 4 del teorema 3 da

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t)$$

Así, $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$, lo que indica que $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

En términos geométricos, este resultado indica que si una curva está en una esfera con centro en el origen, el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ siempre es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$. (Véase la figura 4.) ■

Integrales

La **integral definida** de una función vectorial continua $\mathbf{r}(t)$ puede definirse casi igual que las funciones con valores reales, salvo que la integral es un vector. Pero entonces se puede expresar la integral de $\mathbf{r}$ en términos de las integrales de sus funciones componentes f, g y h como sigue. (Se usa la notación del capítulo 5.)

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}(t_i^*)\,\Delta t$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\,\Delta t \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\,\Delta t \right) \mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\,\Delta t \right) \mathbf{k} \right]$$

y por tanto

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt \right) \mathbf{k}$$

Esto significa que se puede evaluar una integral de una función vectorial integrando cada función componente.

Se puede extender el teorema fundamental del cálculo a las funciones vectoriales continuas como sigue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

donde $\mathbf{R}$ es una antiderivada de $\mathbf{r}$, es decir $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Se usa la notación $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para integrales indefinidas (antiderivadas).

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, entonces

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt \right) \mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt \right) \mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt \right) \mathbf{k}$$

$$= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C}$ es una constante vectorial de integración y

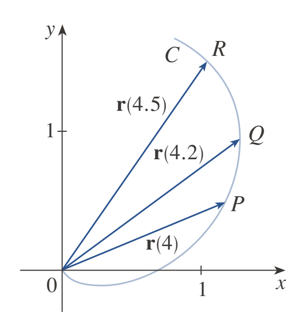
$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \Big[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} \Big]_0^{\pi/2} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\,\mathbf{k}$$ ■

13.2 EJERCICIOS

1. La figura muestra una curva C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.
   (a) Trace los vectores $\mathbf{r}(4.5) - \mathbf{r}(4)$ y $\mathbf{r}(4.2) - \mathbf{r}(4)$.
   (b) Trace los vectores

$$\frac{\mathbf{r}(4.5) - \mathbf{r}(4)}{0.5} \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{r}(4.2) - \mathbf{r}(4)}{0.2}$$

   (c) Escriba expresiones para $\mathbf{r}'(4)$ y el vector tangente unitario $\mathbf{T}(4)$.
   (d) Trace el vector $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Haga un diagrama grande de la curva descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, y trace los vectores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1.1)$ y $\mathbf{r}(1.1) - \mathbf{r}(1)$.
   (b) Trace el vector $\mathbf{r}'(1)$ a partir de $(1, 1)$ y compárelo con el vector

$$\frac{\mathbf{r}(1.1) - \mathbf{r}(1)}{0.1}$$

   Explique por qué estos vectores están tan cerca entre sí en longitud y dirección.

3-8
(a) Trace la curva en un plano con la ecuación vectorial dada.
(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$.
(c) Trace el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ para el valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1 \rangle, \quad t = -1$
4. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle, \quad t = 1$
5. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j}, \quad t = 0$
6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}, \quad t = 0$
7. $\mathbf{r}(t) = 4 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - 2\cos t\,\mathbf{j}, \quad t = 3\pi/4$
8. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + 1)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - 1)\,\mathbf{j}, \quad t = -\pi/3$

9-16 Determine la derivada de la función vectorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{t - 2}, 3, 1/t^2 \right\rangle$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, t - t^3, \ln t \rangle$
11. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \cos(t^2)\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{k}$
12. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{1 + t}\,\mathbf{i} + \dfrac{t}{1 + t}\,\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{1 + t}\,\mathbf{k}$
13. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t \cos t\,\mathbf{k}$
14. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2 at\,\mathbf{i} + te^{bt}\,\mathbf{j} + \cos^2 ct\,\mathbf{k}$
15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\,\mathbf{c}$
16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17-20 Determine el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ en el punto con el valor dado del parámetro t.

17. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2 - 2t, 1 + 3t, \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{2}t^2 \right\rangle, \quad t = 2$
18. $\mathbf{r}(t) = \langle \tan^{-1} t, 2e^{2t}, 8te^t \rangle, \quad t = 0$
19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$
20. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4 \rangle, \quad t = 1$

21. Si $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, determine $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ y $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.
22. Si $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$, determine $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ y $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23-26 Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva con las ecuaciones paramétricas dadas en el punto especificado.

23. $x = t^2 + 1, \quad y = 4\sqrt{t}, \quad z = e^{t^2 - t}; \quad (2, 4, 1)$
24. $x = \ln(t + 1), \quad y = t \cos 2t, \quad z = 2^t; \quad (0, 0, 1)$
25. $x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \operatorname{sen} t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$
26. $x = 1 + 2\sqrt{t}, \quad y = t^3 - t, \quad z = t^3 + t; \quad (3, 0, 2)$

27. Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a la curva de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 - 25$ y $y^2 + z^2 - 20$ en el punto $(3, 4, 2)$.
28. Determine el punto en la curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2 \operatorname{sen} t, e^t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, donde la recta tangente es paralela al plano $\sqrt{3}x + y = 1$.

SAC **29-31** Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva con las ecuaciones paramétricas dadas en el punto especificado. Ilustre en una gráfica tanto la curva como la recta tangente en una pantalla común.

29. $x = t, \ y = e^{-t}, \ z = 2t - t^2; \quad (0, 1, 0)$
30. $x = 2\cos t, \ y = 2 \operatorname{sen} t, \ z = 4\cos 2t; \quad \left(\sqrt{3}, 1, 2\right)$
31. $x = t\cos t, \ y = t, \ z = t \operatorname{sen} t; \quad (-\pi, \pi, 0)$

32. (a) Determine el punto de intersección de las rectas tangentes a la curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, 2 \operatorname{sen} \pi t, \cos \pi t \rangle$ en los puntos donde $t = 0$ y $t = 0.5$.
   (b) Ilustre en una gráfica la curva y ambas rectas tangentes.
33. Las curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) - \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t \rangle$ intersecan en el origen. Determine su ángulo de intersección al grado más cercano.

34. ¿En qué punto intersecan las curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$? Determine su ángulo de intersección al grado más cercano.

35-40 Evalúe la integral.

35. $\int_0^1 (6t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} - 8t^3\,\mathbf{k})\,dt$

36. $\int_1^4 (2t^{3/2}\,\mathbf{i} + (t+1)\sqrt{t}\,\mathbf{k})\,dt$

37. $\int_0^1 \left(\dfrac{1}{t+1}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2+1}\mathbf{j} + \dfrac{t}{t^2+1}\mathbf{k}\right) dt$

38. $\int_0^{\pi/4} (\sec t \tan t\,\mathbf{i} + t\cos 2t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 2t \cos 2t\,\mathbf{k})\,dt$

39. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

40. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

---

41. Determine $\mathbf{r}(t)$ si $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} - 8t\,\mathbf{j} + 8t^3\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(1) = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$.

42. Determine $\mathbf{r}(t)$ si $\mathbf{r}'(t) = 2\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + 3\cos 3t\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(\pi/6) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

43. Compruebe la fórmula 1 del teorema 3.

44. Compruebe la fórmula 3 del teorema 3.

45. Compruebe la fórmula 5 del teorema 3.

46. Compruebe la fórmula 6 del teorema 3.

47. Si $\mathbf{u}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$ use la fórmula 4 del teorema 3 para determinar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

48. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son las funciones vectoriales del ejercicio 47, use la fórmula 5 del teorema 3 para determinar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

49. Determine $f'(2)$, donde $f(t) = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{u}(2) = \langle 1, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{u}'(2) = \langle 3, 0, 4 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

50. Si $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son las funciones vectoriales del ejercicio 49, determine $\mathbf{r}'(2)$.

51. Si $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}\cos \omega t + \mathbf{b}\operatorname{sen} t\,\omega t$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores constantes, demuestre que $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) = \omega\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

52. Si $\mathbf{r}$ es la función vectorial del ejercicio 51, demuestre que $\mathbf{r}''(t) + \omega^2\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$.

53. Demuestre que si $\mathbf{r}$ es una función vectorial tal que $\mathbf{r}''$ existe, entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

54. Determine una expresión para $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

55. Si $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, demuestre que $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = \dfrac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

[*Sugerencia*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

56. Si una curva tiene la propiedad de que el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ siempre es perpendicular al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$, demuestre que la curva está en una esfera con centro en el origen.

57. Si $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, demuestre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

58. Demuestre que el vector tangente a una curva definida por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ apunta en la dirección de t creciente. [*Sugerencia*: Remítase a la figura 1 y considere los casos $h > 0$ y $h < 0$ por separado.]

13.3 Longitud de arco y curvatura

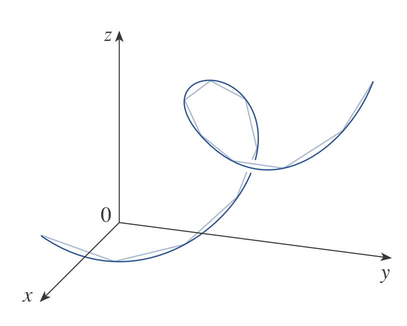


FIGURA 2

La longitud de una curva en el espacio es el límite de las longitudes de los polígonos inscritos.

Longitud de una curva

En la sección 10.2 se definió la longitud de una curva en un plano con ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, como el límite de longitudes de polígonos inscritos, y para el caso donde f' y g' son continuas, se arriba a la fórmula

1 $$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

La longitud de una curva en el espacio se define exactamente de la misma manera (véase la figura 1). Suponga que la curva tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, $a \leqslant t \leqslant b$ o, en términos equivalentes, las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, donde f', g' y h' son continuas. Si la curva es recorrida exactamente una vez cuando t se incrementa de a a b, es posible demostrar que su longitud es

2
$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Nótese que ambas fórmulas de longitud de arco (1) y (2) pueden ponerse en la forma más compacta

En la siguiente sección se verá que si r(t) es el vector de posición de un objeto en movimiento en el momento t, $\mathbf{r}'(t)$ es el vector de velocidad y $|\mathbf{r}'(t)|$ la rapidez. Así, la ecuación 3 indica que para calcular la distancia recorrida se integra la rapidez.

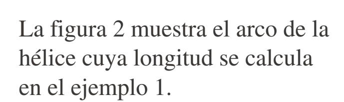
3
$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

porque para curvas en un plano $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

y para curvas en el espacio $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$



La figura 2 muestra el arco de la hélice cuya longitud se calcula en el ejemplo 1.

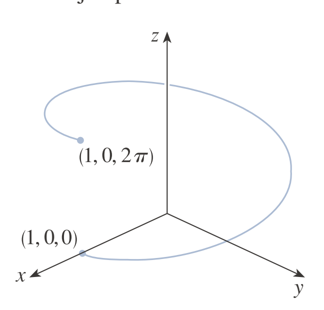


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Determine la longitud del arco de la hélice circular con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ del punto (1, 0, 0) al punto (1, 0, 2π).

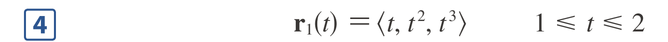
SOLUCIÓN Como $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, se tiene

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

El arco de (1, 0, 0) a (1, 0, 2π) es descrito por el intervalo paramétrico $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y por tanto de la fórmula 3 se obtiene

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi \qquad \blacksquare$$

Una curva C puede representarse con más de una función vectorial. Por ejemplo, la cúbica torcida



4
$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2$$

también podría representarse con la función

5
$$\mathbf{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \qquad 0 \leqslant u \leqslant \ln 2$$

donde la relación entre los parámetros t y u está dada por $t = e^u$. Se dice que las ecuaciones 4 y 5 son **parametrizaciones** de la curva C. Si se debería usar la ecuación 3 para calcular la longitud de C se obtendría la misma respuesta que usando las ecuaciones 4 y 5. En general, puede demostrarse que cuando se usa la ecuación 3 para calcular la longitud de arco, la respuesta es independiente de la parametrización utilizada.

La función longitud de arco

Suponga ahora que C es una curva dada por una función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

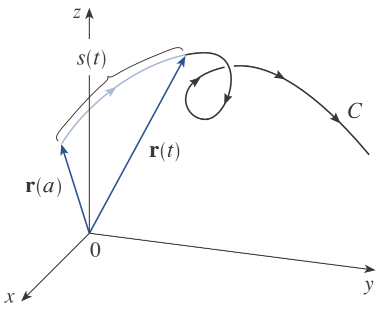


FIGURA 2

donde $\mathbf{r}'$ es continua y C es recorrida exactamente una vez al incrementarse t de a a b. Se define su **función longitud de arco** s con

6 $$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du$$

Así, $s(t)$ es la longitud de la parte de C entre $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$. (Véase la figura 3.) Si se derivan ambos miembros de la ecuación 6 usando la parte 1 del teorema fundamental del cálculo, se obtiene

7 $$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$

Suele ser útil **parametrizar una curva con respecto a la longitud de arco** porque la longitud de arco se desprende naturalmente de la forma de la curva y no depende de un sistema de coordenadas particular. Si una curva $\mathbf{r}(t)$ ya está dada en términos de un parámetro t y $s(t)$ es la función longitud de arco dada por la ecuación 6, se puede despejar t como función de s: $t = t(s)$. La curva puede reparametrizarse entonces en términos de s sustituyendo t: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$. Así, si $s = 3$ por ejemplo, $\mathbf{r}(t(3))$ es el vector de posición del punto 3 unidades de longitud a lo largo de la curva desde su punto de partida.

EJEMPLO 2 Reparametrice la hélice $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$ con respecto a la longitud de arco medida desde $(1, 0, 0)$ en la dirección de t creciente.

SOLUCIÓN El punto inicial $(1, 0, 0)$ corresponde al valor paramétrico $t = 0$. Del 1 se tiene

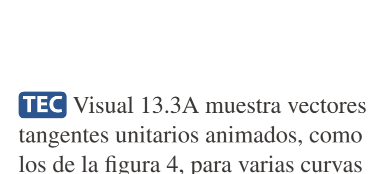
$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

así que $$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_0^t \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\, t$$

Por tanto $t = s/\sqrt{2}$ y la reparametrización requerida se obtiene sustituyendo t:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos\left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{j} + \left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{k}$$ ■

Curvatura


TEC Visual 13.3A muestra vectores tangentes unitarios animados, como los de la figura 4, para varias curvas en un plano y curvas en el espacio.

Una parametrización $\mathbf{r}(t)$ se llama **suave** en un intervalo I si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ en I. Una curva se llama **suave** si tiene una parametrización suave. Una curva suave no tiene esquinas agudas o cúspides; cuando el vector tangente gira, lo hace continuamente.

Si C es una curva suave definida por la función vectorial $\mathbf{r}$, recuerde que el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ está dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

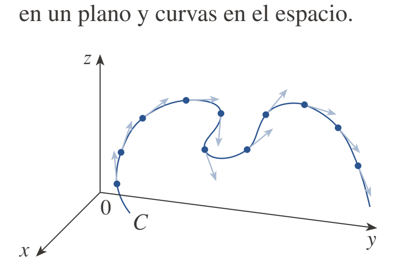


FIGURA 4

Vectores tangentes unitarios en puntos igualmente espaciados en C

e indica la dirección de la curva. En la figura 4 puede verse que $\mathbf{T}(t)$ cambia de dirección muy lentamente cuando C es casi recta, pero cambia de dirección más rápido cuando C se dobla o tuerce en forma más pronunciada.

La curvatura de C en un punto dado es una medida de lo rápido que la curva cambia de dirección en ese punto. Específicamente, se define como la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario con respecto a la longitud de arco. (Se usa la longitud de arco para que la curvatura sea independiente de la parametrización.) Como el vector tangente unitario tiene longitud constante, solo cambios en dirección contribuyen a la razón de cambio de $\mathbf{T}$.

8 Definición La **curvatura** de una curva es

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

donde **T** es el vector tangente unitario.

La curvatura es más fácil de calcular si se expresa en términos del parámetro t que en s, así que se usa la regla de la cadena (teorema 13.2.3, fórmula 6) para escribir

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \text{y} \qquad \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

Pero $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$ de la ecuación 7, de modo que

9
$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

EJEMPLO 3 Demuestre que la curvatura de un círculo de radio a es $1/a$.

SOLUCIÓN Se puede suponer que el círculo tiene su centro en el origen y entonces una parametrización es

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t \, \mathbf{j}$$

Por tanto $\qquad \mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + a \cos t \, \mathbf{j} \qquad$ y $\qquad |\mathbf{r}'(t)| = a$

así que
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + \cos t \, \mathbf{j}$$

y
$$\mathbf{T}'(t) = -\cos t \, \mathbf{i} - \operatorname{sen} t \, \mathbf{j}$$

Esto da $|\mathbf{T}'(t)| = 1$, de manera que usando la fórmula 9 se tiene

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$ ■

El resultado del ejemplo 3 muestra que círculos reducidos tienen una gran curvatura y que círculos grandes tienen una curvatura reducida, de acuerdo con la intuición. Se puede ver directamente de la definición de curvatura que la curvatura de una línea recta es siempre de 0, porque el vector tangente es constante.

Aunque la fórmula 9 puede usarse en todos los casos para calcular la curvatura, la fórmula dada por el teorema siguiente suele ser más fácil de aplicar.

10 Teorema La curvatura de la curva dada por la función vectorial **r** es

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$



COMPROBACIÓN Como $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ y $|\mathbf{r}'| = ds/dt$, se tiene

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$

así que la regla del producto (teorema 13.2.3, fórmula 3) da

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

Al usar el hecho de que $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = 0$ (véase el ejemplo 12.4.2) se tiene

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

Ahora $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todas las t, así que $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ son ortogonales por el ejemplo 13.2.4. En consecuencia, por el teorema 12.4.9,

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}||\mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}'|$$

Así
$$|\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

y
$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

■

EJEMPLO 4 Determine la curvatura de la cúbica torcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ en un punto general y en $(0, 0, 0)$.

SOLUCIÓN Primero se calculan los ingredientes requeridos:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

El teorema 10 da entonces

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

En el origen, donde $t = 0$, la curvatura es $\kappa(0) = 2$. ■

Para el caso especial de una curva en un plano con ecuación $y = f(x)$, se elige a x como el parámetro y se escribe $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$. Entonces $\mathbf{r}'(x) - \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}$. Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$, de esto se sigue que $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}$. También se tiene $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y por tanto, por el teorema 10,

11
$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

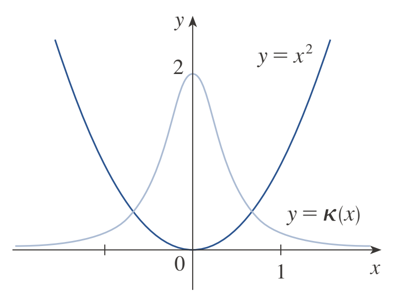


FIGURA 5

La parábola $y = x^2$ y su función curvatura

EJEMPLO 5 Determine la curvatura de la parábola $y = x^2$ en los puntos (0, 0), (1, 1) y (2, 4).

SOLUCIÓN Como $y' = 2x$ y $y'' = 2$, la fórmula 11 da

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

La curvatura en (0, 0) es $\kappa(0) = 2$. En (1, 1), es $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0.18$. En (2, 4) es $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0.03$. Se observa en la expresión para $\kappa(x)$ o en la gráfica de κ en la figura 5 que $\kappa(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \pm\infty$. Esto se corresponde con el hecho de que la parábola parece aplanarse cuando $x \longrightarrow \pm\infty$. ■

Los vectores normal y binormal

En un punto dado en una curva suave en el espacio $\mathbf{r}(t)$, hay muchos vectores que son ortogonales al vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$. Se destacará uno observando que, como $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todas las t, se tiene $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$ por el ejemplo 13.2.4, así que $\mathbf{T}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Adviértase que, por lo general, $\mathbf{T}'(t)$ no es en sí mismo un vector unitario. Pero en cualquier punto donde $\kappa \neq 0$ se puede definir el **vector normal unitario principal** $\mathbf{N}(t)$ (o simplemente **normal unitario**) como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

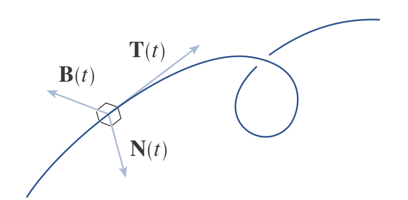


FIGURA 6

El vector normal unitario puede concebirse como indicación de la dirección en la que gira la curva en cada punto. El vector $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ se llama **vector binormal**. Es perpendicular tanto a $\mathbf{T}$ como a $\mathbf{N}$ y es también un vector unitario. (Véase la figura 6.)

La figura 7 ilustra el ejemplo 6 mostrando los vectores **T**, **N** y **B** en dos lugares en la hélice. En general, los vectores **T**, **N** y **B**, que parten de diversos puntos en una curva, forman un conjunto de vectores ortogonales llamado la estructura **TNB**, que se mueve a lo largo de la curva al variar t. Esta estructura **TNB** desempeña un importante papel en la rama de las matemáticas conocida como geometría diferencial y en sus aplicaciones al movimiento de naves espaciales.

EJEMPLO 6 Determine los vectores normal y binormal unitarios para la hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Primero se calculan los ingredientes necesarios para el vector normal unitario:

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}) \qquad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0\rangle$$

Esto demuestra que el vector normal en cualquier punto en la hélice es horizontal y apunta al eje z. El vector binormal es

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle$$ ■

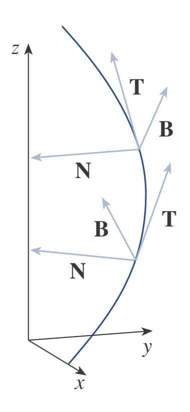


FIGURA 7

TEC Visual 13.3B muestra cómo la estructura **TNB** se mueve a lo largo de varias curvas.

El plano determinado por los vectores normal y binormal **N** y **B** en el punto P en una curva C se llama **plano normal** de C en P. Consta de todas las rectas ortogonales al vector tangente **T**. El plano determinado por los vectores **T** y **N** se llama **plano osculador** de C en P. Este nombre procede del latín *osculum*, que significa "beso". Es el plano que está más cerca de contener la parte de la curva próxima a P. (Para una curva en un plano, el plano osculador es simplemente el plano que contiene la curva.)

El círculo que se ubica en el plano osculador de C en P tiene la misma tangente que C en P, se ubica en el lado cóncavo de C (hacia el que apunta **N**) y tiene radio $\rho = 1/\kappa$ (la recíproca de la curvatura) se llama **círculo osculador** (o **círculo de curvatura**) de C en P. Es el círculo que describe mejor la forma en que se comporta C cerca de P; comparte la misma tangente, normal y curvatura de P.

EJEMPLO 7 Determine ecuaciones del plano normal y el plano osculador de la hélice del ejemplo 6 en el punto $P(0, 1, \pi/2)$.

La figura 8 muestra la hélice y el plano osculador del ejemplo 7.

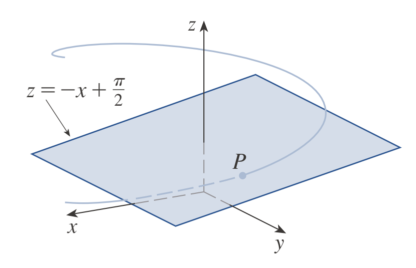


FIGURA 8

SOLUCIÓN El punto P corresponde a $t = \pi/2$ y el plano normal ahí tiene vector normal $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1\rangle$, así que una ecuación es

$$-1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad z = x + \frac{\pi}{2}$$

El plano osculador en P contiene los vectores **T** y **N**, así que su vector normal es $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$. Del ejemplo 6 se obtiene

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle \qquad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$$

Un vector normal más simple es $\langle 1, 0, 1\rangle$, de manera que una ecuación del plano osculador es

$$1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad z = -x + \frac{\pi}{2}$$ ■

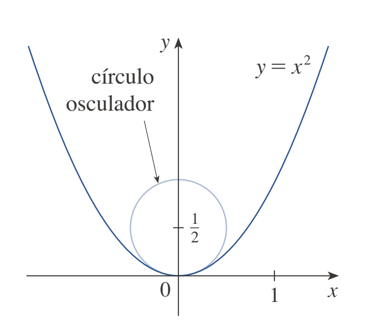


FIGURA 9

Nótese que el círculo y la parábola parecen doblarse en forma similar en el origen.

EJEMPLO 8 Determine y grafique el círculo osculador de la parábola $y = x^2$ en el origen.

SOLUCIÓN Con base en el ejemplo 5, la curvatura de la parábola en el origen es $\kappa(0) = 2$. Así, el radio del círculo osculador en el origen es $1/\kappa = \frac{1}{2}$ y su centro es $(0, \frac{1}{2})$. Su ecuación es entonces

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

Para la gráfica de la figura 9 se usa ecuaciones paramétricas de este círculo:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$$ ■

Aquí se resumen las fórmulas para los vectores tangente unitario, normal unitario y binormal y para la curvatura.

TEC Visual 13.3C muestra cómo cambia el círculo osculador cuando un punto se mueve a lo largo de una curva.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$



13.3 EJERCICIOS

1-6 Determine la longitud de la curva.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, \sqrt{5}\,t, 2\,\text{sen}\,t \rangle, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

2. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, 6t, 3t^2 \rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

4. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

6. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 9t\,\mathbf{j} + 4t^{3/2}\,\mathbf{k}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

7-9 Determine la longitud de la curva con cuatro decimales. (Use una calculadora para aproximar la integral.)

7. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3, t^4 \rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t, t^2 \rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t, 2t, \text{sen}\,2\pi t \rangle$, de $(1, 0, 0)$ a $(1, 4, 0)$

10. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas $x = \text{sen}\,t$, $y = \text{sen}\,2t$, $z = \text{sen}\,3t$. Determine la longitud total de esta curva con cuatro decimales.

11. Sea C la curva de intersección del cilindro parabólico $x^2 = 2y$ y la superficie $3z = xy$. Determine la longitud exacta de C del origen al punto $(6, 18, 36)$.

12. Determine con cuatro decimales la longitud de la curva de intersección del cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ y el plano $x + y + z = 2$.

13-14 (a) Halle la función longitud de arco para la curva medida desde el punto P en la dirección de t creciente y después reparametrice la curva con respecto a la longitud de arco a partir de P, y (b) determine el punto 4 unidades a lo largo de la curva (en la dirección de t creciente) desde P.

13. $\mathbf{r}(t) = (5 - t)\,\mathbf{i} + (4t - 3)\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}, \quad P(4, 1, 3)$

14. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + e^t\cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,e^t\,\mathbf{k}, \quad P(0, 1, \sqrt{2})$

15. Suponga que parte del punto $(0, 0, 3)$ y se mueve 5 unidades a lo largo de la curva $x = 3\,\text{sen}\,t$, $y = 4t$, $z = 3\cos t$ en la dirección positiva. ¿Dónde se encuentra ahora?

16. Reparametrice la curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\,\mathbf{j}$$

con respecto a la longitud de arco medida desde el punto $(1, 0)$ en la dirección de t creciente. Exprese la reparametrización en su forma más simple. ¿Qué puede concluir acerca de la curva?

17-20
(a) Determine los vectores tangente unitario y normal unitario $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.
(b) Use la fórmula 9 para determinar la curvatura.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3\cos t, 3\,\text{sen}\,t \rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \text{sen}\,t - t\cos t, \cos t + t\,\text{sen}\,t \rangle, \quad t > 0$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2}\,t, e^t, e^{-t} \rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \tfrac{1}{2}t^2, t^2 \rangle$

21-23 Use el teorema 10 para determinar la curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{6}\,t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 2t^3\,\mathbf{k}$

24. Halle la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\,t, t \rangle$ en el punto $(1, 0, 0)$.

25. Determine la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ en el punto $(1, 1, 1)$.

26. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen}\,t$, $z = \text{sen}\,5t$ y determine la curvatura en el punto $(1, 0, 0)$.

27-29 Use la fórmula 11 para determinar la curvatura.

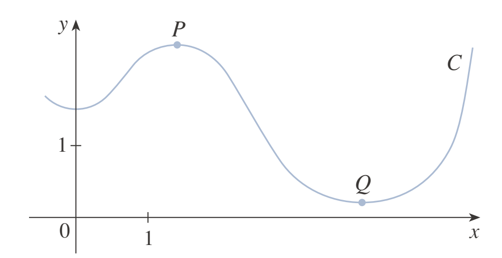
27. $y = x^3$ **28.** $y = \cos x$ **29.** $y = x \ln x$

30-31 ¿En qué punto la curva tiene máxima curvatura? ¿Qué sucede con la curvatura cuando $x \to \infty$?

30. $y = \ln x$ **31.** $y = e^x$

32. Determine una ecuación de una parábola con curvatura 4 en el origen.

33. (a) ¿La curvatura de la curva C mostrada en la figura es mayor en P o en Q? Explique su respuesta.
(b) Estime la curvatura en P y en Q trazando los círculos osculadores en esos puntos.



34-35 Use una calculadora graficadora o una computadora para graficar tanto la curva como su función curvatura $\kappa(x)$ en la misma pantalla. ¿La gráfica de κ es la que usted esperaría?

34. $y = x^4 - 2x^2$ **35.** $y = x^{-2}$

36-37 Trace la curva en el espacio y su función curvatura $\kappa(t)$. Comente cómo refleja la curvatura la forma de la curva.

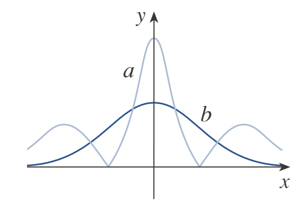
36. $\mathbf{r}(t) = \langle t - \text{sen}\, t, 1 - \cos t, 4\cos(t/2)\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 8\pi$

37. $\mathbf{r}(t) = \langle te^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t\rangle, \quad -5 \leqslant t \leqslant 5$

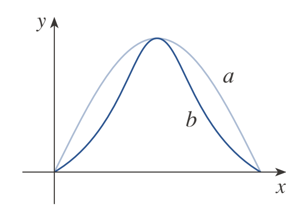
38-39 Se muestran dos gráficas, a y b. Una es una curva $y = f(x)$ y la otra la gráfica de su función curvatura $y = \kappa(x)$. Identifique cada curva y explique sus decisiones.



38.



39.



40. (a) Grafique la curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, 3t, \text{sen}\, 2t, \text{sen}\, 3t\rangle$. ¿En cuántos puntos en la curva parece que la curvatura tiene un máximo local o absoluto?
(b) Use un SAC para determinar y graficar la función curvatura. ¿Esta gráfica confirma su conclusión del inciso (a)?

41. La gráfica de $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2}\,\text{sen}\, t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t\rangle$ se muestra en la figura 13.1.12(b). ¿Dónde piensa usted que la curvatura es mayor? Use un SAC para determinar y graficar la función curvatura. ¿Para cuáles valores de t la curvatura es mayor?

42. Use el teorema 10 para demostrar que la curvatura de una curva paramétrica en un plano $x = f(t)$, $y = g(t)$ es

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a t.

43-45 Use la fórmula del ejercicio 42 para determinar la curvatura.

43. $x = t^2, \quad y = t^3$

44. $x = a\cos\omega t, \quad y = b\,\text{sen}\,\omega t$

45. $x = e^t\cos t, \quad y = e^t\,\text{sen}\, t$

46. Considere la curvatura en $x = 0$ para cada miembro de la familia de funciones $f(x) = e^{cx}$. ¿Para cuáles miembros $\kappa(0)$ es mayor?

47-48 Determine los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ en el punto dado.

47. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t\rangle, \quad (1, \frac{2}{3}, 1)$

48. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \text{sen}\, t, \ln\cos t\rangle, \quad (1, 0, 0)$

49-50 Determine ecuaciones del plano normal y el plano osculador de la curva en el punto dado.

49. $x = \text{sen}\, 2t, \; y = -\cos 2t, \; z = 4t; \quad (0, 1, 2\pi)$

50. $x = \ln t, \; y = 2t, \; z = t^2; \quad (0, 2, 1)$

51. Determine ecuaciones de los círculos osculadores de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ en los puntos (2, 0) y (0, 3). Use una calculadora graficadora o computadora para graficar la elipse y ambos círculos osculadores en la misma pantalla.

52. Determine ecuaciones de los círculos osculadores de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ en los puntos (0, 0) y $(1, \frac{1}{2})$. Grafique ambos círculos osculadores y la parábola en la misma pantalla.

53. ¿En qué punto en la curva $x = t^3$, $y = 3t$, $z = t^4$ el plano normal es paralelo al plano $6x + 6y - 8z = 1$?

54. ¿Hay un punto en la curva del ejercicio 53 donde el plano osculador sea paralelo al plano $x + y + z = 1$? [Nota: Necesitará un SAC para derivar, simplificar y calcular un producto cruz.]

55. Halle ecuaciones de los planos normal y osculador de la curva de intersección de los cilindros parabólicos $x = y^2$ y $z = x^2$ en el punto (1, 1, 1).

56. Demuestre que el plano osculador en cada punto en la curva $\mathbf{r}(t) = \langle t + 2, 1 - t, \frac{1}{2}t^2\rangle$ es el mismo plano. ¿Qué puede concluir acerca de la curva?

57. Demuestre que en cada punto en la curva

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\, t, e^t\rangle$$

el ángulo entre el vector tangente unitario y el eje z es el mismo. Luego demuestre que el mismo resultado es válido para los vectores normal unitario y binormal.

58. El *plano rectificante* de una curva en un punto es el plano que contiene los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{B}$ en ese punto. Determine el plano rectificante de la curva $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \tan t\,\mathbf{k}$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$.

59. Demuestre que la curvatura κ está relacionada con los vectores tangente y normal por la ecuación

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

60. Demuestre que la curvatura de una curva en un plano es $\kappa = |d\phi/ds|$, donde ϕ es el ángulo entre $\mathbf{T}$ e $\mathbf{i}$; es decir, ϕ es el ángulo de inclinación de la recta tangente. (Esto demuestra que la definición de curvatura es congruente con la definición de curvas en un plano dada en el ejercicio 10.2.69.)

61. (a) Demuestre que $d\mathbf{B}/ds$ es perpendicular a $\mathbf{B}$.
(b) Demuestre que $d\mathbf{B}/ds$ es perpendicular a $\mathbf{T}$.
(c) Deduzca de los incisos (a) y (b) que $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$ para algún número $\tau(s)$ llamado la **torsión** de la curva. (La torsión mide el grado de giro de una curva.)
(d) Demuestre que para una curva en un plano la torsión es $\tau(s) = 0$.

62. Las fórmulas siguientes, llamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, son de importancia fundamental en la geometría diferencial:

1. $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$
2. $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$
3. $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$

(La fórmula 1 procede del ejercicio 59 y la fórmula 3 del ejercicio 61). Use el hecho de que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ para deducir la fórmula 2 de las fórmulas 1 y 3.

63. Use las fórmulas de Frenet-Serret para comprobar cada una de las ecuaciones siguientes. (Las primas denotan derivadas con respecto a t. Comience como en la comprobación del teorema 10.)

(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$
(b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$
(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$
(d) $\tau = \dfrac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

64. Demuestre que la hélice circular $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt\rangle$, donde a y b son constantes positivas, tiene curvatura constante y torsión constante. [Use el resultado del ejercicio 63(d).]

65. Use la fórmula del ejercicio 63(d) para determinar la torsión de la curva $\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\rangle$.

66. Determine la curvatura y torsión de la curva $x = \operatorname{senh} t$, $y = \cosh t$, $z = t$ en el punto $(0, 1, 0)$.

67. La molécula del ADN tiene la forma de una hélice doble (véase la figura 3 de la página 850). El radio de cada hélice es de alrededor de 10 ángstroms ($1\ \text{Å} = 10^{-8}$ cm). Cada hélice se eleva alrededor de 34 Å durante cada vuelta completa, y hay unas 2.9×10^8 vueltas completas. Estime la longitud de cada hélice.

68. Considere el problema de diseñar un riel de ferrocarril para hacer una transición suave entre secciones de vías rectas. Rieles existentes a lo largo del eje x negativo deberán unirse armoniosamente con un riel a lo largo de la línea $y = 1$ para $x \geqslant 1$.
(a) Determine un polinomio $P = P(x)$ de grado 5 tal que la función F definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \leqslant 0 \\ P(x) & \text{Si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{Si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

sea continua y tenga pendiente continua y curvatura continua.
(b) Grafique F.

13.4 Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración

En esta sección se mostrará cómo las ideas de vectores tangente y normal y de curvatura pueden usarse en física para estudiar el movimiento de un objeto, incluidas su velocidad y aceleración, a lo largo de una curva en el espacio. En particular, se seguirán los pasos de Newton al usar estos métodos para derivar la primera ley del movimiento de los planetas de Kepler.

Suponga que una partícula se mueve en el espacio de tal forma que su vector de posición en el momento t es $\mathbf{r}(t)$. Nótese en la figura 1 que, para valores reducidos de h, el vector



1 $$\frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

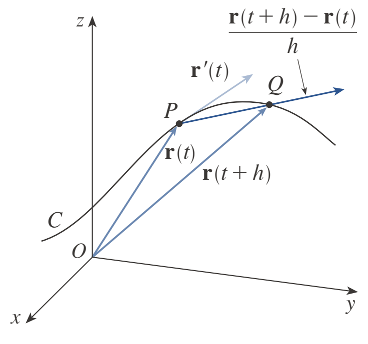


FIGURA 1

aproxima la dirección de la partícula que se mueve a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t)$. Su magnitud mide el tamaño del vector de desplazamiento por unidad de tiempo. El vector (1) da la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo de longitud h y su límite es el **vector velocidad** $\mathbf{v}(t)$ en el tiempo t:

2 $$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)$$

Así, el vector velocidad es también el vector tangente y apunta en la dirección de la recta tangente.

La **rapidez** de la partícula en el momento t es la magnitud del vector velocidad, es decir $|\mathbf{v}(t)|$. Esto es apropiado porque de (2) y de la ecuación 13.3.7 se deduce que

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{razón de cambio de la distancia respecto al tiempo}$$

Como en el caso del movimiento unidimensional, la **aceleración** de la partícula se define como la derivada de la velocidad:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

EJEMPLO 1 El vector de posición de un objeto que se mueve en un plano está dado por $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. Determine su velocidad, rapidez y aceleración cuando $t = 1$ e ilustre geométricamente.

SOLUCIÓN La velocidad y aceleración en el momento t son

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

y la rapidez es

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Cuando $t = 1$, se tiene

$$\mathbf{v}(1) = 3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a}(1) = 6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad |\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$$

Estos vectores velocidad y aceleración se muestran en la figura 2. ■

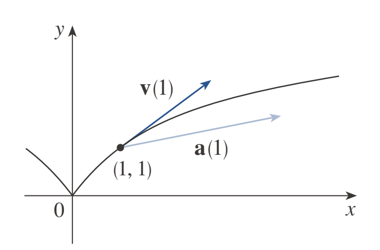


FIGURA 2

TEC Visual 13.4 muestra vectores velocidad y aceleración animados para objetos que se mueven a lo largo de varias curvas.

La figura 3 muestra la trayectoria de la partícula del ejemplo 2 con los vectores velocidad y aceleración cuando $t = 1$.

EJEMPLO 2 Determine la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con vector de posición $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (1 + t)e^t \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2 + t)e^t \rangle$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1 + t)^2 e^{2t}}$$ ■

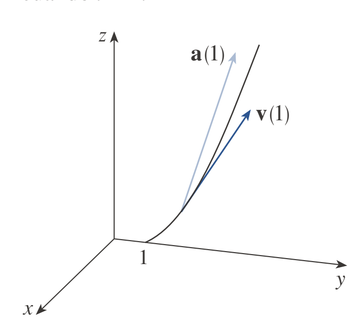
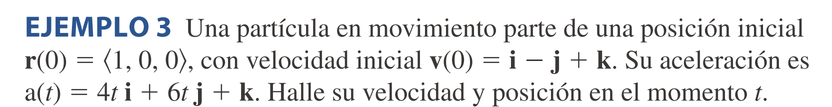


FIGURA 3

Las integrales vectoriales que se introdujeron en la sección 13.2 pueden usarse para encontrar vectores de posición cuando los vectores velocidad o aceleración son conocidos, como en el ejemplo siguiente.


EJEMPLO 3 Una partícula en movimiento parte de una posición inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$, con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Su aceleración es $\mathrm{a}(t) = 4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Halle su velocidad y posición en el momento t.

SOLUCIÓN Como $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$, se tiene

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$$

$$= 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

Para determinar el valor del vector constante $\mathbf{C}$ se usa el hecho de que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. La ecuación precedente da $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$, así que $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y

$$\mathbf{v}(t) = 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$= (2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}$$

La expresión para $\mathbf{r}(t)$ que se obtuvo en el ejemplo 3 se usó para trazar la trayectoria de la partícula en la figura 4 para $0 \leqslant t \leqslant 3$.

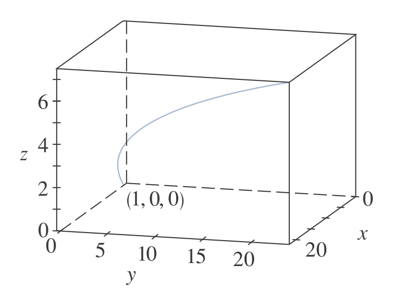


FIGURA 4

Como $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t)\, dt \\ &= \int [(2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}]\, dt \\ &= \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k} + \mathbf{D}\end{aligned}$$

Con $t = 0$, se descubre que $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$, así que la posición en el momento t está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k}$$ ■

En general, las integrales vectoriales permiten recuperar la velocidad cuando se conoce la aceleración y la posición cuando se conoce la velocidad:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(u)\, du \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(u)\, du$$

Si se conoce la fuerza que actúa sobre una partícula, la aceleración puede determinarse a partir de la **segunda ley del movimiento de Newton**. La versión vectorial de esta ley establece que si en cualquier momento t una fuerza $\mathbf{F}(t)$ actúa sobre un objeto de masa m y produce una aceleración $\mathbf{a}(t)$, entonces

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

EJEMPLO 4 Un objeto con masa m que se mueve en una trayectoria circular con rapidez angular constante ω tiene el vector de posición $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$. Determine la fuerza que actúa sobre el objeto y demuestre que se dirige al origen.

El objeto en movimiento con posición P tiene rapidez angular $\omega = d\theta/dt$, donde θ es el ángulo que se muestra en la figura 5.

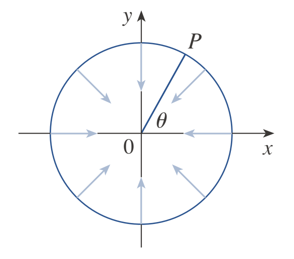


FIGURA 5

SOLUCIÓN Para determinar la fuerza, primero se debe conocer la aceleración:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{i} + a\omega \cos \omega t\, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2 \cos \omega t\, \mathbf{i} - a\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$$

Por tanto, la segunda ley de Newton da la fuerza como

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -m\omega^2(a \cos \omega t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j})$$

Nótese que $\mathbf{F}(t) = -m\omega^2\, \mathbf{r}(t)$. Esto demuestra que la fuerza actúa en la dirección opuesta al vector radio $\mathbf{r}(t)$ y que por tanto apunta al origen (véase la figura 5). A una fuerza así se le conoce como fuerza *centrípeta* (que busca el centro). ■

Movimiento de proyectiles

EJEMPLO 5 Un proyectil es disparado con un ángulo de elevación α y velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. (Véase la figura 6.) Suponiendo que la resistencia del viento es insignificante y que la única fuerza externa se debe a la gravedad, determine la función posición $\mathbf{r}(t)$ del proyectil. ¿Qué valor de α maximiza el rango (la distancia horizontal recorrida)?

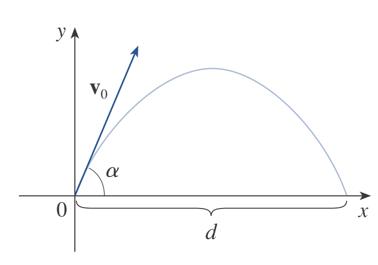


FIGURA 6

SOLUCIÓN Se establecen los ejes de tal manera que el proyectil parta del origen. Como la fuerza debida a la gravedad actúa hacia abajo, se tiene

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\, \mathbf{j}$$

donde $g = |\mathbf{a}| < 9.8$ m/s^2. Así

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$, se tiene

$$\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathrm{C}$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Por tanto

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

Integrando otra vez, se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$$

Pero $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, así que el vector de posición del proyectil está dado por

$$\mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0 \tag{3}$$

Se escribe $|\mathbf{v}_0| = v_0$ (la rapidez inicial del proyectil), entonces

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}$$

y la ecuación 3 se convierte en

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos\alpha)t\,\mathbf{i} + \left[(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son entonces

Si se elimina t de las ecuaciones 4, se verá que y es una función cuadrática de x. Así, la trayectoria del proyectil forma parte de una parábola.

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

La distancia horizontal d es el valor de x cuando $y = 0$. Si se establece $y = 0$, se obtiene $t = 0$ o $t = (2v_0 \operatorname{sen}\,\alpha)/g$. Este segundo valor de t da entonces

$$d = x = (v_0 \cos\alpha)\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2(2 \operatorname{sen}\alpha\, \cos\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Es evidente que d alcanza su valor máximo cuando sen $2\alpha = 1$, es decir $\alpha = 45°$. ■

EJEMPLO 6 Un proyectil es disparado con una rapidez de cañón de 150 m/s y un ángulo de elevación de 45° desde una posición de 10 m sobre la superficie. ¿Dónde impacta el proyectil la superficie y con qué rapidez?

SOLUCIÓN Si se coloca el origen en la superficie, la posición inicial del proyectil es (0, 10), así que se debe ajustar las ecuaciones 4 sumando 10 a la expresión para y. Con $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45°$ y $g = 9.8$ m/s^2, se tiene

$$x = 150 \cos(45°)t = 75\sqrt{2}\,t$$

$$y = 10 + 150 \operatorname{sen}(45°)t - \tfrac{1}{2}(9.8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}\,t - 4.9t^2$$

El impacto ocurre cuando $y = 0$, es decir $4.9t^2 - 75\sqrt{2}\,t - 10 = 0$. Al usar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación (y tomar solo el valor positivo de t), se obtiene

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11250 + 196}}{9.8} \approx 21.74$$

Entonces $x \approx 75\sqrt{2}\,(21.74) \approx 2306$, así que el proyectil impacta la superficie a una distancia de alrededor de 2306 m.

La velocidad del proyectil es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(75\sqrt{2} - 9.8t\right)\mathbf{j}$$

Así, su rapidez en el impacto es

$$|\mathbf{v}(21.74)| = \sqrt{\left(75\sqrt{2}\,\right)^2 + \left(75\sqrt{2} - 9.8 \cdot 21.74\right)^2} \approx 151 \text{ m/s}$$ ■

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Cuando se estudia el movimiento de una partícula, suele ser útil resolver la aceleración en dos componentes, uno en la dirección de la tangente y otro en la dirección de la normal. Si se escribe $v = |\mathbf{v}|$ para la rapidez de la partícula, entonces

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

así que $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$

Si se derivan ambos miembros de esta ecuación con respecto a t se obtiene

5 $$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$$

Si se usa la expresión para la curvatura dada por la ecuación 13.3.9 se tiene

6 $$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \quad \text{así que} \quad |\mathbf{T}'| = \kappa v$$

El vector normal unitario fue definido en la sección precedente como $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$, de modo que (6) da

$$\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = \kappa v \mathbf{N}$$

y la ecuación 5 se convierte en



$$\boxed{\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}}$$

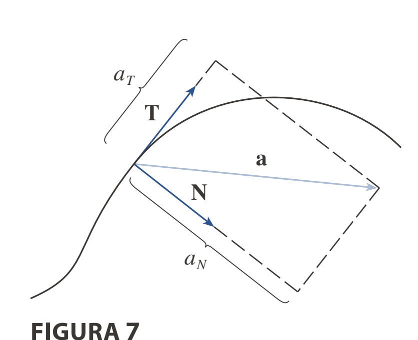


FIGURA 7

Al escribir a_T y a_N para los componentes tangencial y normal de la aceleración se tiene

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

donde



$$a_T = v' \qquad \text{y} \qquad a_N = \kappa v^2$$

Esta resolución se ilustra en la figura 7.

Se examinará qué indica la fórmula 7. Lo primero por notar es que el vector binormal **B** está ausente. Sin importar cómo se mueva un objeto en el espacio, su aceleración siempre reside en el plano de **T** y **N** (el plano osculador). (Recuérdese que **T** da la dirección del movimiento y **N** apunta en la dirección de giro de la curva.) Se advierte después que el componente tangencial de la aceleración es v', la razón de cambio de la rapidez, y que el componente normal de la aceleración es κv^2, la curvatura multiplicada por el cuadrado de la rapidez. Esto tiene sentido si se piensa en un pasajero en un automóvil; una vuelta pronunciada en una calle significa un valor grande de la curvatura κ, así que el componente de la aceleración perpendicular al movimiento es grande y el pasajero es arrojado contra la puerta del auto. Una rapidez alta al dar la vuelta tiene el mismo efecto; de hecho, si se duplica la rapidez, a_N aumenta en un factor de 4.

Aunque se tienen expresiones para los componentes tangencial y normal de la aceleración en las ecuaciones 8, es deseable tener expresiones que solo dependan de **r**, **r**′ y **r**″. Con este fin se toma el producto punto de $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ con **a** como dado por la ecuación 7:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} &= v\mathbf{T} \cdot (v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}) \\ &= vv'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \kappa v^3\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \\ &= vv' \qquad (\text{ya que } \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \text{ y } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0) \end{aligned}$$

Por tanto

9 $$a_T = v' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Usando la fórmula para la curvatura dada por el teorema 13.3.10, se tiene

10 $$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}|\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

EJEMPLO 7 Una partícula se mueve con una función posición $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$. Determine los componentes tangencial y normal de la aceleración.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= t^2\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r}'(t) &= 2t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r}''(t) &= 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k} \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{8t^2 + 9t^4} \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación 9 da el componente tangencial como

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

Dado que $$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t^2\,\mathbf{j}$$

la ecuación 10 da el componente normal como

$$a_N = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}\,t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$ ■

■ Leyes del movimiento de los planetas de Kepler

Ahora se describirá uno de los grandes logros del cálculo mostrando cómo el material de este capítulo puede usarse para comprobar las leyes del movimiento de los planetas de Kepler. Después de 20 años de estudiar las observaciones astronómicas del astrónomo danés Tycho Brahe, el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) formuló las tres leyes siguientes.

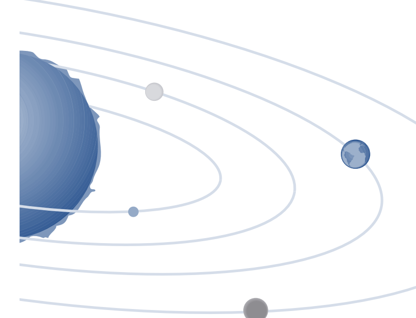
Leyes de Kepler

1. Un planeta gira alrededor del sol en una órbita elíptica con el sol en un foco.
2. La recta que une al sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

En su libro *Principia Mathematica* de 1687, Sir Isaac Newton fue capaz de demostrar que estas tres leyes son consecuencia de dos de sus propias leyes, la segunda ley del movimiento y la ley de la gravitación universal. En lo que se sigue comprobará la primera ley de Kepler. Las leyes restantes se dejan como ejercicios (con sugerencias).

Como la fuerza gravitacional del sol sobre un planeta es mucho mayor que las fuerzas ejercidas por otros cuerpos celestes, se puede ignorar sin riesgo todos los cuerpos en el universo excepto el sol y un planeta que gira alrededor de él. Se usa un sistema de coordenadas con el sol en el origen y se concede que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es el vector de posición del planeta. (En forma igualmente satisfactoria, $\mathbf{r}$ podría ser el vector de posición de la luna o un satélite que se mueve alrededor de la Tierra o un cometa que se mueve alrededor de una estrella.) El vector velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ y el vector aceleración es $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$. Se usan las siguientes leyes de Newton:





Segunda ley del movimiento: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

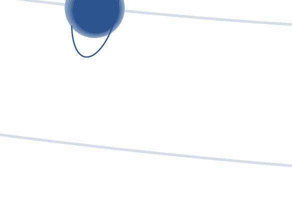
Ley de la gravitación: $$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza gravitacional sobre el planeta, m y M las masas del planeta y del sol, G la constante gravitacional, $r = |\mathbf{r}|$ y $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

Primero se demostrará que el planeta se mueve en un plano. Igualando las expresiones para $\mathbf{F}$ en las dos leyes de Newton, se determina que

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

así que $\mathbf{a}$ es paralela a $\mathbf{r}$. De esto se sigue que $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Se usa la fórmula 5 del teorema 13.2.3 para escribir



$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}'$$

$$= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Por tanto $$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

donde $\mathbf{h}$ es un vector constante. (Se podría suponer que $\mathbf{h} \neq 0$; es decir, que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos.) Esto significa que el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{h}$ para todos los valores de t, así que el planeta siempre se ubica en el plano que pasa por el origen perpendicular a $\mathbf{h}$. De este modo, la órbita del planeta es una curva en un plano.

Para comprobar la primera ley de Kepler se reescribe el vector $\mathbf{h}$ como sigue:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})'$$

$$= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u})$$

$$= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$



Entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \frac{-GM}{r^2}\mathbf{u} \times (r^2\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM\,\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

$$= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \qquad \text{(por el teorema 12.4.11, propiedad 6)}$$

Pero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$, y como $|\mathbf{u}(t)| = 1$, del ejemplo 13.2.4 se sigue que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$$

En consecuencia $$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

así que $$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación se obtiene

11 $$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}$$

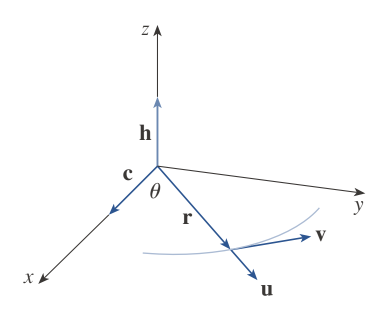


FIGURA 8

donde **c** es un vector constante.

En este punto es conveniente elegir los ejes de coordenadas de tal manera que el vector de base estándar **k** apunte en la dirección del vector **h**. Entonces, el planeta se mueve en el plano xy. Puesto que tanto $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$ como **u** son perpendiculares a **h**, la ecuación 11 indica que **c** se tiende en el plano xy. Esto significa que se puede elegir los ejes x y y de tal forma que el vector **i** se tienda en la dirección de **c**, como se muestra en la figura 8.

Si θ es el ángulo entre **c** y **r**, entonces $(\mathbf{r}, \theta)$ son las coordenadas polares del planeta. De la ecuación 11 se obtiene que

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot (GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}$$

$$= GMr\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}|\cos\theta = GMr + rc\cos\theta$$

donde $c = |\mathbf{c}|$. Entonces

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c\cos\theta} = \frac{1}{GM}\,\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e\cos\theta}$$

donde $e = c/(GM)$. Pero

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

donde $h = |\mathbf{h}|$. Así

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}$$

Al escribir $d = h^2/c$ se obtiene la ecuación

12 $$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Al comparar con el teorema 10.6.6, se ve que la ecuación 12 es la ecuación polar de una sección cónica con foco en el origen y excentricidad e. Se sabe que la órbita de un planeta es una curva cerrada y por tanto que la cónica debe ser una elipse.

Esto completa la derivación de la primera ley de Kepler. Se guiará en la derivación de la segunda y tercera leyes en el proyecto de aplicación de la página 880. Las comprobaciones de estas tres leyes muestran que los métodos de este capítulo brindan una herramienta eficaz para describir algunas de las leyes de la naturaleza.

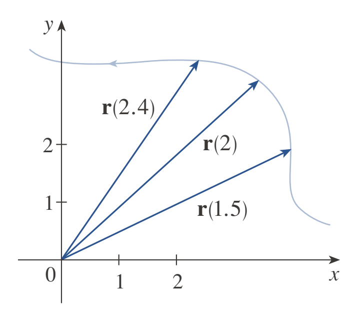


13.4 EJERCICIOS

1. La tabla da las coordenadas de una partícula que se mueve en el espacio a lo largo de una curva suave.
(a) Determine las velocidades promedio durante los intervalos de tiempo [0, 1], [0.5, 1], [1, 2] y [1, 1.5].
(b) Estime la velocidad y rapidez de la partícula en $t = 1$.

t	x	y	z
0	2.7	9.8	3.7
0.5	3.5	7.2	3.3
1.0	4.5	6.0	3.0
1.5	5.9	6.4	2.8
2.0	7.3	7.8	2.7

2. La figura muestra la trayectoria de una partícula que se mueve con un vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el momento t.
(a) Dibuje un vector que represente la velocidad promedio de la partícula en el intervalo de tiempo $2 \leqslant t \leqslant 2.4$.
(b) Dibuje un vector que represente la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $1.5 \leqslant t \leqslant 2$.
(c) Escriba una expresión para el vector velocidad $\mathbf{v}(2)$.
(d) Dibuje una aproximación al vector $\mathbf{v}(2)$ y estime la rapidez de la partícula en $t = 2$.



3-8 Determine la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función posición dada. Trace la trayectoria de la partícula y dibuje los vectores velocidad y aceleración para el valor especificado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \left\langle -\frac{1}{2}t^2, t \right\rangle, \quad t = 2$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 1/t^2 \rangle, \quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\, \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}, \quad t = \pi/3$

6. $\mathbf{r}(t) = \left\langle 2 - t, 4\sqrt{t} \right\rangle, \quad t = 1$

7. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 2\, \mathbf{k}, \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{k}, \quad t = 0$

9-14 Determine la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función posición dada.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1, t^3, t^2 - 1 \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 3t, 2 \operatorname{sen} t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\, t\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\, \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j} + \ln t\, \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k})$

14. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + t \cos t\, \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k}$

15-16 Determine los vectores velocidad y posición de una partícula con la aceleración dada y la velocidad y posición inicial dada.

15. $\mathbf{a}(t) = 2\, \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = 3\, \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

16. $\mathbf{a}(t) = \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + 6t\, \mathbf{k},$
$\mathbf{v}(0) = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - 4\, \mathbf{k}$

17-18
(a) Halle el vector de posición de una partícula con la aceleración dada y la velocidad y posición inicial especificada.
(b) Use una computadora para graficar la trayectoria de la partícula.

17. $\mathbf{a}(t) = 2t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \cos 2t\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18. $\mathbf{a}(t) = t\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. La función posición de una partícula está dada por $\mathbf{r}(t) - \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$. ¿En qué momento su rapidez alcanza un valor mínimo?

20. ¿Qué fuerza se requiere para que una partícula de masa m tenga la función posición $\mathbf{r}(t) = t^3\, \mathbf{i} + t^2\, \mathbf{j} + t^3\, \mathbf{k}$?

21. Una fuerza con magnitud 20 N actúa directamente hacia arriba del plano xy sobre un objeto con masa 4 kg. El objeto parte del origen con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Determine su función posición y su rapidez en el momento t.

22. Demuestre que si una partícula se mueve con una rapidez constante, los vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

23. Un proyectil es disparado con una rapidez inicial de 200 m/s y un ángulo de elevación de 60°. Determine (a) el rango del proyectil, (b) la altura máxima alcanzada y (c) la rapidez en el impacto.

24. Repita el ejercicio 23 si el proyectil es disparado desde una posición de 100 m sobre la superficie.

25. Una pelota es lanzada en un ángulo de 45° a la superficie. Si aterriza a una distancia de 90 m, ¿cuál fue su rapidez inicial?

26. Un proyectil es disparado de un tanque con rapidez inicial de 400 m/s. Determine dos ángulos de elevación que pueden usarse para impactar un blanco a una distancia de 3000 m.

27. Un arma se dispara con un ángulo de elevación de 30°. ¿Cuál es la rapidez de cañón si la altura máxima de la bala es de 500 m?

28. Un bateador golpea una pelota 3 pies sobre la superficie hacia la cerca del jardín central, la cual tiene 10 pies de altura y se encuentra a 400 pies de *home*. La pelota se separa del bate con una rapidez de 115 pies/s y un ángulo de 50° sobre la horizontal. ¿Es un jonrón? (En otras palabras, ¿la pelota cruza la cerca?)

29. Una ciudad medieval tiene la forma de un cuadrado y está protegida por murallas con una longitud de 500 m y una altura de 15 m. Usted es el comandante de un ejército agresor y lo más que puede acercarse a la muralla son 100 m. Su plan es prender fuego a la ciudad catapultando rocas incandescentes sobre la muralla (con una rapidez inicial de 80 m/s). ¿A qué rango de ángulos debe ordenar a sus hombres colocar la catapulta? (Suponga que la trayectoria de las rocas es perpendicular a la muralla.)

30. Demuestre que un proyectil llega a tres cuartos de su altura máxima en la mitad del tiempo necesario para alcanzar su altura máxima.

31. Una pelota es lanzada al aire en dirección al este desde el origen (en la dirección del eje x positivo). La velocidad inicial es $50\,\mathbf{i} + 80\,\mathbf{k}$, con rapidez medida en metros por segundo. El giro de la pelota resulta en una aceleración al sur de 4 m/s², de modo que el vector aceleración es $\mathbf{a} = -4\mathbf{j} - 32\mathbf{k}$. ¿Dónde aterrizará la pelota y con qué rapidez?

32. Una pelota con masa 0.8 kg es lanzada al aire con dirección al sur y una velocidad de 30 m/s en un ángulo de 30°. Un viento del oeste aplica una fuerza constante de 4 N sobre la pelota en dirección al este. ¿Dónde aterriza la pelota y con qué velocidad?

33. Agua que corre a lo largo de una porción recta de un río normalmente lo hace más rápido en medio, y la rapidez se reduce a casi cero en las orillas. Considere un trecho largo y recto de un río que corre al norte con orillas paralelas a 40 m de distancia entre sí. Si la rapidez máxima del agua es de 3 m/s, se puede usar una función cuadrática como un modelo básico para la razón de flujo del agua a x unidades de la orilla oeste: $f(x) = \frac{3}{400}x(40 - x)$.

(a) Un bote avanza a una rapidez constante de 5 m/s desde un punto A en la orilla oeste mientras mantiene una dirección perpendicular a la orilla. ¿A qué distancia río abajo en la orilla opuesta tocará tierra? Grafique la trayectoria del bote.

(b) Suponga que se quiere pilotar el bote a tierra en el punto B de la orilla este, directamente frente a A. Si se mantiene una rapidez constante de 5 m/s y una dirección constante, determine el ángulo en el que el bote debería orientarse. Luego grafique la trayectoria efectiva que sigue el bote. ¿La trayectoria parece realista?

34. Otro modelo razonable para la rapidez del agua del río del ejercicio 33 es una función seno: $f(x) = 3\ \mathrm{sen}(\pi x/40)$. Si un barquero quisiera cruzar el río de A a B con dirección constante y una rapidez constante de 5 m/s, determine el ángulo en el que el bote debería orientarse.

35. Una partícula tiene una función posición $\mathbf{r}(t)$. Si $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{c} \times \mathbf{r}(t)$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante, describa la trayectoria de la partícula.

36. (a) Si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, ¿qué podría decir usted sobre su vector aceleración?

(b) Si una partícula se mueve con una rapidez constante a lo largo de una curva, ¿qué podría decir usted sobre su vector aceleración?

37-40 Determine los componentes tangencial y normal del vector aceleración.

37. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}, \quad t \geqslant 0$

38. $\mathbf{r}(t) = 2t^2\,\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t\right)\mathbf{j}$

39. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

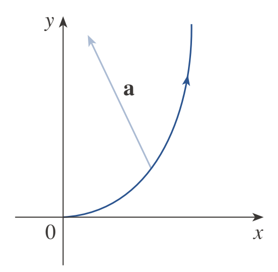
40. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2e^t\,\mathbf{j} + e^{2t}\,\mathbf{k}$

41-42 Determine los componentes tangencial y normal del vector aceleración en el punto dado.

41. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + (t^2 + 3t)\,\mathbf{j} + 4\sqrt{t}\,\mathbf{k}, \quad (0, 4, 4)$

42. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2}\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{t^3}\,\mathbf{k}, \quad (1, 1, 1)$

43. La magnitud del vector aceleración $\mathbf{a}$ es 10 cm/s². Use la figura para estimar los componentes tangencial y normal de $\mathbf{a}$.



44. Si una partícula con masa m se mueve con un vector de posición $\mathbf{r}(t)$, su cantidad de **movimiento angular** se define como $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ y su **momento de torsión** como $\boldsymbol{\tau}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$. Demuestre que $\mathbf{L}'(t) = \boldsymbol{\tau}(t)$. Deduzca que si $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0}$ para todas las t, entonces $\mathbf{L}(t)$ es constante. (Esta es la *ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular*.)

45. La función posición de una nave espacial es

$$\mathbf{r}(t) = (3 + t)\,\mathbf{i} + (2 + \ln t)\,\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathbf{k}$$

y las coordenadas de una estación espacial son (6, 4, 9). El capitán desea que la nave se deslice hasta la estación espacial. ¿En qué momento deberían apagarse los motores?

46. Un cohete que consume su combustible a bordo al moverse en el espacio tiene una velocidad $\mathbf{v}(t)$ y una masa $m(t)$ en el momento t. Si los gases escapan con una velocidad $\mathbf{v}_e$ en relación con el cohete, de la segunda ley del movimiento de Newton puede deducirse que

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e$$

(a) Demuestre que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) - \ln\dfrac{m(0)}{m(t)}\mathbf{v}_e$.

(b) Para que el cohete acelere en una línea recta desde su estado de reposo hasta dos veces la velocidad de sus gases de escape, ¿qué fracción de su masa inicial tendría que consumir como combustible?

PROYECTO DE APLICACIÓN LEYES DE KEPLER

Johannes Kepler enunció las siguientes tres leyes del movimiento de los planetas sobre la base de inmensas cantidades de datos acerca de las posiciones de los planetas en diversos momentos.

Leyes de Kepler

1. Un planeta gira alrededor del sol en una órbita elíptica con el sol en un foco.
2. La recta que une al sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Kepler formuló estas leyes porque se ajustaban a los datos astronómicos. No fue capaz de ver por qué eran ciertas o cómo se relacionaban entre sí. Pero Sir Isaac Newton, en su *Principia Mathematica* de 1687, mostró cómo deducir las tres leyes de Kepler de dos de sus propias leyes, la segunda ley del movimiento y la ley de la gravitación universal. En la sección 13.4 se comprueba la primera ley de Kepler usando el cálculo de funciones vectoriales. En este proyecto será guiado por las comprobaciones de la segunda y tercera leyes de Kepler y se explorarán algunas de sus consecuencias.

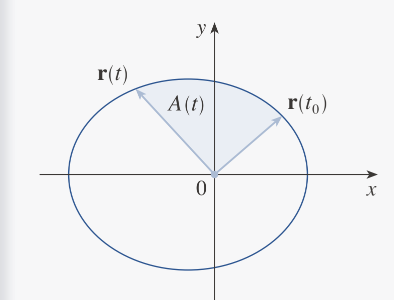
1. Siga los pasos que se indican a continuación para comprobar la segunda ley de Kepler. La notación es la misma que la de la comprobación de la primera ley en la sección 13.4. En particular, use coordenadas polares para que $\mathbf{r} = (r\cos\theta)\,\mathbf{i} + (r\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j}$.

(a) Demuestre que $\mathbf{h} = r^2 \dfrac{d\theta}{dt}\,\mathbf{k}$.

(b) Deduzca que $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = h$.

(c) Si $A = A(t)$ es el área recorrida por el vector radio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$, como en la figura, demuestre que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$





(d) Deduzca que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}h = \text{constante}$$

Esto indica que la razón en la que se recorre A es constante y comprueba la segunda ley de Kepler.

2. Sea T el período de un planeta alrededor del sol; es decir, T es el tiempo requerido para que recorra una vez su órbita elíptica. Suponga que las longitudes del eje mayor y menor de la elipse son $2a$ y $2b$.

(a) Use el inciso (d) del problema 1 para demostrar que $T = 2\pi ab/h$.

(b) Demuestre que $\dfrac{h^2}{GM} = ed = \dfrac{b^2}{a}$.

(c) Use los incisos (a) y (b) para demostrar que $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}a^3$.

Esto comprueba la tercera ley de Kepler. [Nótese que la constante de proporcionalidad $4\pi^2/(GM)$ es independiente del planeta.]

3. El período de la órbita de la Tierra es de aproximadamente 365.25 días. Use este hecho y la tercera ley de Kepler para encontrar la longitud del eje mayor de la órbita terrestre. Necesitará la masa del sol, $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg, y la constante gravitacional, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².

4. Es posible poner un satélite en órbita alrededor de la Tierra para que permanezca fijo sobre un lugar dado en el ecuador. Calcule la altitud necesaria para ese satélite. La masa de la Tierra es 5.98×10^{24} kg y su radio 6.37×10^{6} m. (Esta órbita se llama órbita geoestacionaria Clarke, en honor a Arthur C. Clarke, quien fue el primero en proponer esta idea, en 1945. El primer satélite de este tipo, Syncom II, se lanzó en julio de 1963.)

13 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. ¿Qué es una función vectorial? ¿Cómo se encuentra su derivada y su integral?

2. ¿Cuál es la relación entre funciones vectoriales y curvas en el espacio?

3. ¿Cómo se determina el vector tangente a una curva suave en un punto? ¿Cómo se determina la recta tangente? ¿El vector tangente unitario?

4. Si **u** y **v** son funciones vectoriales derivables, c un escalar y f una función con valores reales, escriba las reglas para derivar las siguientes funciones vectoriales.

(a) $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$ (b) $c\mathbf{u}(t)$ (c) $f(t)\,\mathbf{u}(t)$
(d) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ (e) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ (f) $\mathbf{u}(f(t))$

5. ¿Cómo se determina la longitud de una curva en el espacio dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$?

6. (a) ¿Cuál es la definición de curvatura?
(b) Escriba una fórmula para la curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$.
(c) Escriba una fórmula para la curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.
(d) Escriba una fórmula para la curvatura de una curva en un plano con ecuación $y = f(x)$.

7. (a) Escriba fórmulas para los vectores normal unitario y binormal de una curva suave en el espacio $\mathbf{r}(t)$.
(b) ¿Qué es el plano normal de una curva en un punto? ¿Qué es el plano osculador? ¿Qué es el círculo osculador?

8. (a) ¿Cómo se determina la velocidad, rapidez y aeleración de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio?
(b) Escriba la aceleración en términos de sus componentes tangencial y normal.

9. Enuncie las leyes de Kepler.

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. La curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + 2t^3\,\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$ es una recta.

2. La curva $\mathbf{r}(t) = \langle 0, t^2, 4t \rangle$ es una parábola.

3. La curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, 3 - t, 0 \rangle$ es una recta que pasa por el origen.

4. La derivada de una función vectorial se obtiene derivando cada función componente.

5. Si $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son funciones vectoriales derivables, entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

6. Si $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial derivable, entonces

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$

7. Si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario de una curva suave, la curvatura es $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|$.

8. El vector binomial es $\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t)$.

9. Suponga que f es dos veces continuamente derivable. En un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$, la curvatura es 0.

10. Si $\kappa(t) = 0$ para todas las t, la curva es una línea recta.

11. Si $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todas las t, $|\mathbf{r}'(t)|$ es una constante.

12. Si $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todas las t, $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todas las t.

13. El círculo osculador de una curva C en un punto tiene el mismo vector tangente, vector normal y curvatura que C en ese punto.

14. Diferentes parametrizaciones de la misma curva resultan en vectores tangentes idénticos en un punto dado en la curva.



EJERCICIOS

1. (a) Trace la curva con función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k} \qquad t \geqslant 0$$

(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$

2. Sea $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{2 - t}, (e^t - 1)/t, \ln(t + 1) \right\rangle$
(a) Determine el dominio de $\mathbf{r}$.
(b) Determine $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$.
(c) Determine $\mathbf{r}'(t)$.

3. Encuentre una función vectorial que represente la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y el plano $x + z = 5$.

4. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} 2t$, $z = 2 \operatorname{sen} 3t$ en el punto $\left(1, \sqrt{3}, 2\right)$. Grafique la curva y la recta tangente en una pantalla común.

5. Si $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\mathbf{k}$, evalúe $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt$.

6. Sea C la curva con ecuaciones $x = 2 - t^3$, $y = 2t - 1$, $z = \ln t$. Determine (a) el punto donde C interseca el plano xz, (b) ecuaciones paramétricas de la recta tangente en $(1, 1, 0)$ y (c) una ecuación del plano normal a C en $(1, 1, 0)$.

7. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar la longitud del arco de la curva con ecuaciones $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$ $0 \leqslant t \leqslant 3$.

8. Determine la longitud de la curva $\mathbf{r}(t) - \langle 2t^{3/2}, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

9. La hélice $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ interseca la curva $\mathbf{r}_2(t) = (1 + t)\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ en el punto $(1, 0, 0)$. Determine el ángulo de intersección de estas curvas.

10. Reparametrice la curva $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^t \cos t\,\mathbf{k}$ con respecto a la longitud de arco medida desde el punto $(1, 0, 1)$ en la dirección de t creciente.

11. Para la curva dada por $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen}^3 t, \cos 3\,t, \operatorname{sen}^2 t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/\,2$, determine
(a) el vector tangente unitario,
(b) el vector normal unitario,
(c) el vector binormal unitario y
(d) la curvatura.

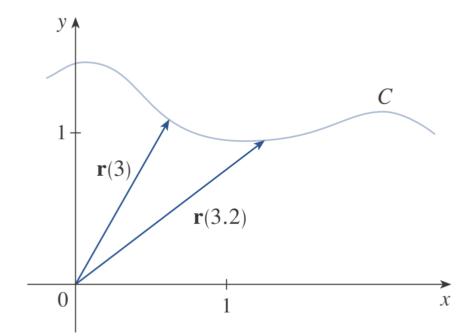
12. Halle la curvatura de la elipse $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ en los puntos $(3, 0)$ y $(0, 4)$.

13. Halle la curvatura de la curva $y = x^4$ en el punto $(1, 1)$.

14. Halle una ecuación del círculo osculador de la curva $y = x^4 - x^2$ en el origen. Grafique tanto la curva como su círculo osculador.

15. Determine una ecuación del plano osculador de la curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = t$, $z = \cos 2t$ en el punto $(0, \pi, 1)$.

16. La figura muestra la curva C trazada por una partícula con vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el momento t.
(a) Dibuje un vector que represente la velocidad promedio de la partícula en el intervalo de tiempo $3 \leqslant t \leqslant 3.2$.
(b) Escriba una expresión para la velocidad $\mathbf{v}(3)$.
(c) Escriba una expresión para el vector tangente unitario $\mathbf{T}(3)$ y dibújela.



17. Una partícula se mueve con función posición $\mathbf{r}(t) = t \ln t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$. Determine la velocidad, rapidez y aceleración de la partícula.

18. Determine la velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en movimiento con función posición $\mathbf{r}(t) = (2t^2 - 3)\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$. Trace la trayectoria de la partícula y dibuje los vectores de posición, velocidad y aceleración para $t = 1$.

19. Una partícula parte del origen con velocidad inicial $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Su aceleración es $\mathbf{a}(t) = 6t\,\mathbf{i} + 12t^2\,\mathbf{j} - 6t\,\mathbf{k}$. Determine su función posición.

20. Un atleta realiza un lanzamiento a un ángulo de 45° con la horizontal y una rapidez inicial de 13 m/s. Este se separa de su mano 2 m arriba de la superficie.
(a) ¿Dónde está el lanzamiento 2 segundos después?
(b) ¿Qué tan alto llegará el lanzamiento?
(c) ¿Dónde aterrizará el lanzamiento?

21. Un proyectil se lanza con una rapidez inicial de 40 m/s desde el piso de un túnel cuya altura es de 30 m. ¿Qué ángulo de elevación debería usarse para alcanzar el máximo rango horizontal posible del proyectil? ¿Cuál es el rango máximo?

22. Determine los componentes tangencial y normal del vector aceleración de una partícula con función posición

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$$

23. Un disco de radio 1 rota en dirección a contrarreloj a una rapidez angular constante de ω. Una partícula parte del centro del disco y se mueve hacia el extremo a lo largo de un radio fijo de tal manera que su posición en el momento t, $t \geqslant 0$, está dada por

$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{R}(t)$, donde

$$\mathbf{R}(t) = \cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$$

(a) Demuestre que la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula es

$$\mathbf{v} = \cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_d$$

donde $\mathbf{v}_d = \mathbf{R}'(t)$ es la velocidad de un punto en el extremo del disco.

(b) Demuestre que la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula es

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_d + t\,\mathbf{a}_d$$

donde $\mathbf{a}_d = \mathbf{R}''(t)$ es la aceleración de un punto en el extremo de disco. El término extra $2\mathbf{v}_d$ se llama *aceleración de Coriolis*; es resultado de la interacción de la rotación del disco y el movimiento de la partícula. Es posible obtener una demostración física de esta aceleración caminando hacia el extremo de un carrusel en movimiento.

(c) Determine la aceleración de Coriolis de una partícula que se mueve en un disco en rotación de acuerdo con la ecuación

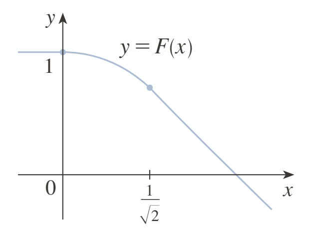
$$\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos \omega t\,\mathbf{i} + e^{-t}\operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$$

24. Al diseñar *curvas de transferencia* para unir secciones de rieles de ferrocarril rectos, es importante comprender que la aceleración del tren debe ser continua para que la fuerza reactiva ejercida por el tren sobre el riel también sea continua. A causa de las fórmulas para los componentes de la aceleración en la sección 13.4, este será el caso si la curvatura varía continuamente.

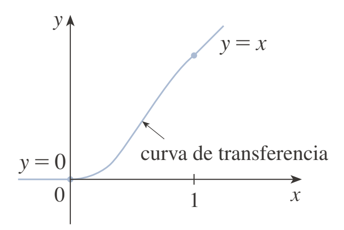
(a) Un candidato lógico para que una curva de transferencia una rieles existentes dado por $y = 1$ para $x \leqslant 0$ y $\sqrt{2} - x$ para $x \geqslant 1/\sqrt{2}$ podría ser la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $0 < x < 1/\sqrt{2}$, cuya gráfica es el arco de un círculo mostrado en la figura. Esto parece razonable a primera vista. Demuestre que la función

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 < x < 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - x & \text{si } x \geqslant 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

es continua y tiene pendiente continua, pero no curvatura continua. Así, f no es una curva de transferencia apropiada.



(b) Determine un polinomio de quinto grado que sirva como curva de transferencia entre los siguientes segmentos de recta: $y = 0$ para $x \leqslant 0$ y $y = x$ para $x \geqslant 1$. ¿Esto podría hacerse con un polinomio de cuarto grado? Use una calculadora graficadora o computadora para trazar la gráfica de la función "conectada" y compruebe que luzca como la de la figura.



Problemas adicionales

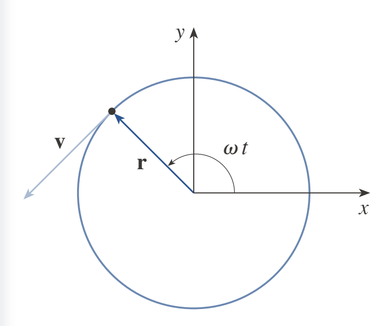


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. Una partícula P se mueve con rapidez angular constante ω alrededor de un círculo cuyo centro está en el origen y cuyo radio es R. Se dice que esta partícula está en *movimiento circular uniforme*. Suponga que el movimiento es a contrarreloj y que la partícula está en el punto $(R, 0)$ cuando $t = 0$. El vector de posición en el momento $t \geqslant 0$ es $\mathbf{r}(t) = R\cos\omega t\,\mathbf{i} + R\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$.

(a) Determine el vector velocidad $\mathbf{v}$ y demuestre que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = 0$. Concluya que $\mathbf{v}$ es tangente al círculo y apunta en la dirección del movimiento.

(b) Demuestre que la rapidez $|\mathbf{v}|$ de la partícula es la constante ωR. El *período* T de la partícula es el tiempo requerido para una revolución completa. Concluya que

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(c) Determine el vector aceleración $\mathbf{a}$. Demuestre que es proporcional a $\mathbf{r}$ y que apunta al origen. Una aceleración con esta propiedad se llama *aceleración centrípeta*. Demuestre que la magnitud del vector aceleración es $|\mathbf{a}| = R\omega^2$.

(d) Suponga que la partícula tiene masa m. Demuestre que la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ que se requiere para producir este movimiento, llamada *fuerza centrípeta*, es

$$|\mathbf{F}| = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{R}$$

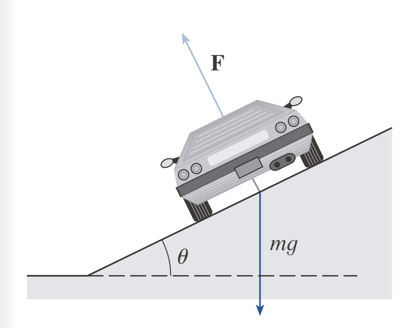


FIGURA PARA EL PROBLEMA 2

2. Una curva circular de radio R sobre una autopista está peraltada en un ángulo θ de manera que un automóvil puede recorrer la curva sin riesgo a derrapar cuando no hay fricción entre el pavimento y las llantas. La pérdida de fricción podría ocurrir, por ejemplo, si el pavimento estuviera cubierto por una capa fina de agua o hielo. La rapidez de régimen v_R de la curva es la rapidez máxima que un auto puede alcanzar sin derrapar. Suponga que un auto de masa m recorre la curva a la rapidez de régimen v_R. Dos fuerzas actúan sobre el vehículo: la fuerza vertical, mg, debida al peso del automóvil, y una fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por, y normal a, el camino (véase la figura).

El componente vertical de $\mathbf{F}$ balancea el peso del auto, de manera que $|\mathbf{F}|\cos\theta = mg$. El componente horizontal de $\mathbf{F}$ produce una fuerza centrípeta sobre el auto, así que, por la segunda ley de Newton y el inciso (d) del problema 1,

$$|\mathbf{F}|\,\text{sen}\,\theta = \frac{mv_R^2}{R}$$

(a) Demuestre que $v_R^2 = Rg\tan\theta$.

(b) Determine la rapidez de régimen de una curva circular con radio 120 m peraltada en un ángulo de 12°.

(c) Suponga que los ingenieros diseñadores desean mantener el peralte en 12°, pero quieren aumentar la rapidez de régimen en 50%. ¿Cuál debería ser el radio de la curva?

3. Un proyectil es disparado desde el origen con ángulo de elevación α y rapidez inicial v_0. Suponiendo que la resistencia del aire es insignificante y que la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la gravedad, g, en el ejemplo 13.4.5 se demostró que el vector de posición del proyectil es

$$\mathbf{r}(t) = (v_0\cos\alpha)t\,\mathbf{i} + \left[(v_0\,\text{sen}\,\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

También se demostró que la distancia horizontal máxima del proyectil se alcanza cuando $\alpha = 45°$ y que en este caso el rango es $R = v_0^2/g$.

(a) ¿En qué ángulo debería dispararse el proyectil para alcanzar su altura máxima y cuál es la altura máxima?

(b) Fije la rapidez inicial v_0 y considere la parábola $x^2 + 2Ry - R^2 = 0$, cuya gráfica aparece en la figura de la izquierda. Demuestre que el proyectil puede impactar cualquier blanco dentro de o en la frontera de la región delimitada por la parábola y el eje x, y que no puede impactar ningún blanco fuera de esta región.

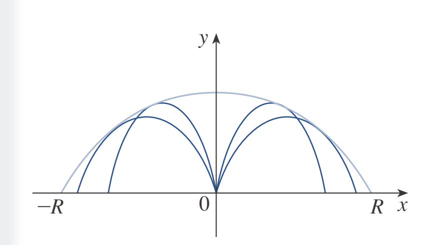


FIGURA PARA EL PROBLEMA 3

(c) Suponga que el arma es elevada a un ángulo de inclinación α a fin de apuntar a un objetivo suspendido a una altura h directamente sobre un punto D unidades bajo el rango (véase la figura inferior). El objetivo es liberado en el instante en que se dispara el arma. Demuestre que el proyectil siempre impacta el objetivo, sea cual fuere el valor de v_0, a condición de que el proyectil no impacte la superficie "antes" que D.

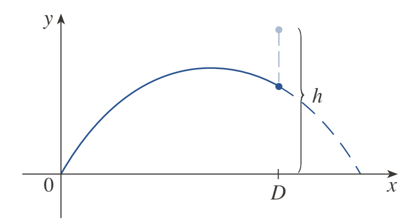
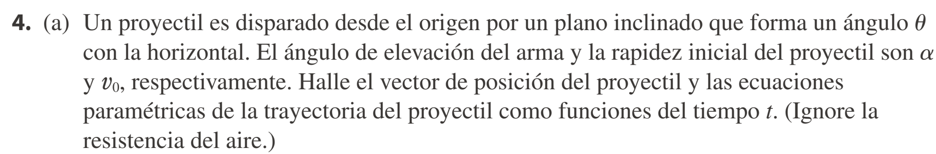


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4



4. (a) Un proyectil es disparado desde el origen por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El ángulo de elevación del arma y la rapidez inicial del proyectil son α y v_0, respectivamente. Halle el vector de posición del proyectil y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil como funciones del tiempo t. (Ignore la resistencia del aire.)

(b) Demuestre que el ángulo de elevación α que maximizará el rango de descenso es el ángulo a medio camino entre el plano y la vertical.

(c) Suponga que el proyectil es disparado hacia arriba en un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es θ. Demuestre que, a fin de maximizar el rango (de ascenso), el proyectil debería dispararse en la dirección a medio camino entre el plano y la vertical.

(d) En un trabajo presentado en 1686, Edmond Halley resumió las leyes de la gravedad y el movimiento de proyectiles y las aplicó a la artillería. Uno de los problemas que planteó implicaba disparar un proyectil para que impactara a un objetivo a una distancia R en lo alto de un plano inclinado. Demuestre que el ángulo en que el proyectil debería dispararse para impactar el objetivo usando el menor monto de energía es el mismo que en el inciso (c). (Use el hecho de que la energía necesaria para disparar el proyectil es proporcional al cuadrado de la rapidez inicial, de manera que minimizar la energía equivale a minimizar la rapidez inicial.)

FIGURA PARA EL PROBLEMA 5



5. Una pelota rueda desde una mesa con una rapidez de 0.5 m/s. La mesa es de 1.2 m de alto.

(a) Determine el punto en el que la pelota alcanza el suelo y determine su rapidez en el instante del impacto.

(b) Encuentre el ángulo θ entre la trayectoria de la pelota y la recta vertical que pasa por el punto de impacto (véase la figura).

(c) Suponga que la pelota rebota desde el suelo en el mismo ángulo con que lo alcanzó, pero pierde 20% de su rapidez debido a la energía absorbida por la pelota en el impacto. ¿Dónde alcanzará la pelota el suelo en el segundo golpe?

6. Halle la curvatura de la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta \qquad y = \int_0^t \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta$$

7. Si un proyectil se dispara con ángulo de elevación α y rapidez inicial v, entonces las ecuaciones paramétricas para esta trayectoria son

$$x = (v \cos \alpha)t \qquad y = (v \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

(Véase el ejemplo 13.4.5.) Se sabe que el rango (distancia horizontal recorrida) se maximiza cuando $\alpha = 45°$. ¿Qué valor de α maximiza la distancia total recorrida por el proyectil? (Enuncie su respuesta al grado más cercano.)

8. Un cable tiene radio r y longitud L y se enrolla en un carrete con radio R sin empalmar. ¿Cuál es la longitud más corta a lo largo del carrete cubierto por el cable?

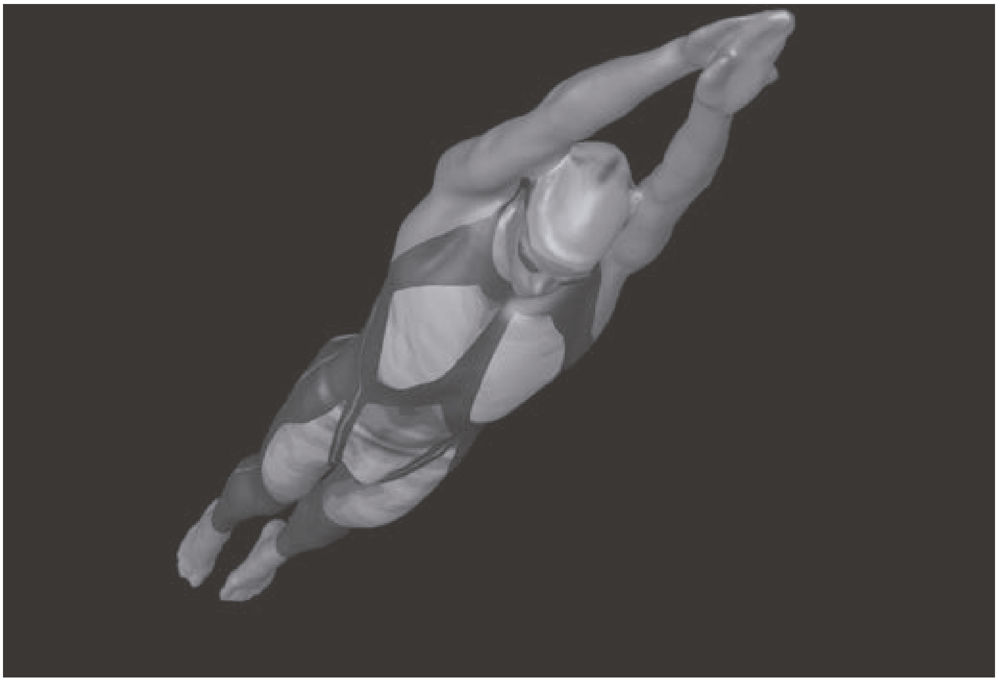
9. Demuestre que la curva con ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle a_1t^2 + b_1t + c_1, a_2t^2 + b_2t + c_2, a_3t^2 + b_3t + c_3\rangle$$

reside en un plano y determine una ecuación del plano.



14 Derivadas parciales



Cortesía de © Speedo y ANSYS, Inc.

En 2008 Speedo lanzó el LZR Racer, que al reducir la fricción en el agua, logró romper muchos récords de natación. En el proyecto de la página 936 se usarán derivadas parciales para explicar cómo una pequeña reducción de la fricción puede mejorar el desempeño.

HASTA ESTE CAPÍTULO SE HA ABORDADO el cálculo de las funciones de una variable. En el mundo real, las cantidades físicas dependen a menudo de dos o más variables. Este capítulo se enfocará en las funciones de diversas variables y se ampliarán las nociones básicas del cálculo diferencial a esas funciones.

14.1 Funciones de varias variables

En esta sección se estudiarán funciones de dos o más variables desde cuatro puntos de vista:

- verbalmente, mediante una descripción
- numéricamente con una tabla de valores
- algebraicamente mediante una fórmula explícita
- visualmente con una gráfica o curvas de nivel

Funciones de dos variables

La temperatura T en un punto en la superficie de la Tierra en cualquier momento dado depende de la longitud x y la latitud y del punto. T puede concebirse entonces como una función de dos variables, x y y, o una función del par (x, y). Se indica esta dependencia funcional escribiendo $T = f(x, y)$.

El volumen V de un cilindro circular depende de su radio r y su altura h. De hecho, se sabe que $V = \pi r^2 h$. Se dice que V es una función de r y h y se escribe $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definición Una **función f de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) en un conjunto D un número real único denotado por $f(x, y)$. El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que f adopta, es decir $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

A menudo se escribe $z = f(x, y)$ para explicitar el valor adoptado por f en el punto general (x, f). Las variables x y y son **variables independientes** y z es la **variable dependiente**. [Compare con la notación $y = f(x)$ para funciones de una sola variable.]

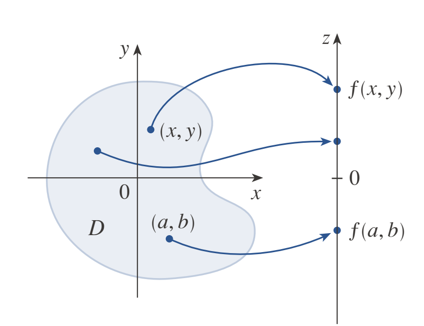
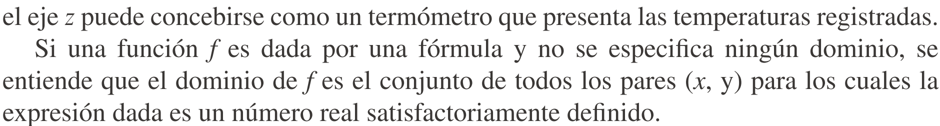


FIGURA 1

Una función de dos variables es sencillamente una función cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una manera de visualizar una función de este tipo es por medio de un diagrama con flechas (véase la figura 1), donde el dominio D es representado como un subconjunto del plano xy y el rango como un conjunto de números en una recta real, mostrada como eje z. Por ejemplo, si $f(x, y)$ representa la temperatura en un punto (x, y) en una placa metálica plana en forma de D, el eje z puede concebirse como un termómetro que presenta las temperaturas registradas.

Si una función f es dada por una fórmula y no se especifica ningún dominio, se entiende que el dominio de f es el conjunto de todos los pares (x, y) para los cuales la expresión dada es un número real satisfactoriamente definido.

EJEMPLO 1 Para cada una de las funciones siguientes, evalúe $f(3, 2)$; determine y trace el dominio.



(a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ (b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x$

SOLUCIÓN

(a) $f(3, 2) = \dfrac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

La expresión para f tiene sentido si el denominador no es 0 y la cantidad bajo el signo de raíz cuadrada es no negativa. Así, el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0,\ x \neq 1\}$$

La desigualdad $x + y + 1 \geqslant 0$, o $y \geqslant -x - 1$ describe los puntos que se encuentran en o

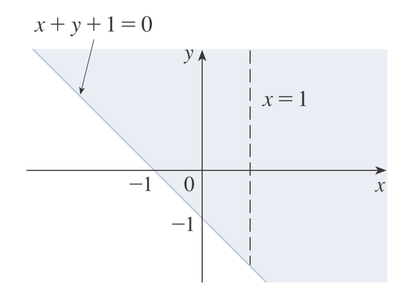


FIGURA 2
Dominio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

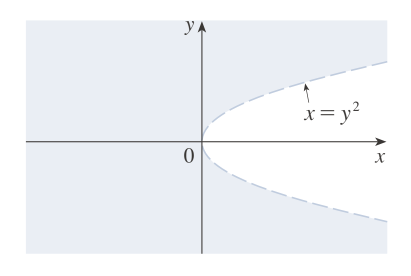


FIGURA 3
Dominio de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

El índice de viento-frío
El índice de viento-frío mide cómo se siente el frío cuando hay viento, basándose en un modelo que calcula la rapidez con que un rostro humano pierde calor. El modelo se desarrolló mediante pruebas clínicas en las que voluntarios se expusieron a varias temperaturas y a velocidades del viento en un túnel aerodinámico refrigerado.

sobre la recta $y = -x - 1$, mientras que $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ deben excluirse del dominio. (Véase la figura 2.)

(b)
$$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Como $\ln(y^2 - x)$ se define solo cuando $y^2 - x > 0$, es decir $x < y^2$, el dominio de f es $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Este es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola $x = y^2$. (Véase la figura 3.) ■

No todas las funciones pueden representarse con fórmulas explícitas. La función en el ejemplo siguiente se describe verbalmente y mediante estimaciones numéricas de sus valores.

EJEMPLO 2 En regiones con clima severo en invierno, el *índice de viento-frío* suele usarse para describir la aparente severidad del frío. Este índice W es una temperatura subjetiva que depende de la temperatura real T y la velocidad del viento v. Así, W es una función de T y v, y se puede escribir $W = f(T, v)$. La tabla 1 registra valores de W compilados por el US National Weather Service y el Meteorological Service of Canada.

Tabla 1 Índice de viento-frío como función de temperatura del aire y velocidad del viento

Velocidad del aire (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por ejemplo, la tabla muestra que si la temperatura es de –5 °C y la velocidad del viento de 50 km/h, subjetivamente se sentirá frío y una temperatura cercana a –15 °C sin viento. Así,

$$f(-5, 50) = -15$$ ■

EJEMPLO 3 En 1928 Charles Cobb y Paul Douglas publicaron un estudio en el que expusieron el crecimiento de la economía estadounidense durante el período 1899-1922. Consideraron una visión simplificada de la economía en la que la producción es determinada por la cantidad de mano de obra implicada y la cantidad de capital invertido. Aunque también muchos factores afectan el desempeño económico, este modelo resultó notablemente atinado. La función que esos autores usaron para establecer la producción fue de la forma

1
$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

donde P es la producción total (el valor monetario de todos los bienes producidos en un año), L la cantidad de mano de obra (el número total de horas-hombre trabajadas en



Tabla 2

Año	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

un año) y K la cantidad de capital invertido (el valor monetario de toda la maquinaria, equipo y edificios involucrados). En la sección 14.3 se mostrará cómo la forma de la ecuación 1 se desprende de ciertos supuestos económicos.

Cobb y Douglas usaron datos económicos publicados por el gobierno para obtener la tabla 2. Tomaron el año 1899 como línea base y a P, L y K se les asignó el valor de 100 para ese año. Los valores para los demás años se expresaron como porcentajes de las cifras de 1899.

Cobb y Douglas usaron el método de mínimos cuadrados para ajustar los datos de la tabla 2 a la función

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25} \quad (2)$$

(Véase el ejercicio 81 para más detalles.)

Si se usa el modelo dado por la función de la ecuación 2 para calcular la producción de los años 1910 y 1920, se obtienen los valores

$$P(147, 208) = 1.01(147)^{0.75}(208)^{0.25} \approx 161.9$$

$$P(194, 407) = 1.01(194)^{0.75}(407)^{0.25} \approx 235.8$$

los cuales están muy cerca de los valores reales, 159 y 231.

La función de producción (1) se ha usado subsecuentemente en muchos campos, desde empresas particulares hasta la economía global, y se le conoce como **función de producción de Cobb-Douglas**. Su dominio es $\{(L, K) \mid L \geqslant 0, K \geqslant 0\}$ porque L y K representan mano de obra y capital y por tanto nunca son negativas. ■

EJEMPLO 4 Determine el dominio y el rango de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN El dominio de g es

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

el cual es un disco con centro (0, 0) y radio 3. (Véase la figura 4.) El rango de g es

$$\left\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ (x, y) \in D\right\}$$

Como z es una raíz cuadrada positiva, $z \geqslant 0$. Asimismo, como $9 - x^2 - y^2 \leqslant 9$, se tiene

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

Así, el rango es

$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$ ■

Gráficas

Otra manera de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica.

Definición Si f es una función de dos variables con dominio D, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x, y)$ y (x, y) esté en D.

Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S con ecuación $z = f(x, y)$. Se puede visualizar la gráfica S de f como tendida directamente arriba o abajo de su dominio D en el plano xy (véase la figura 5).

FIGURA 5

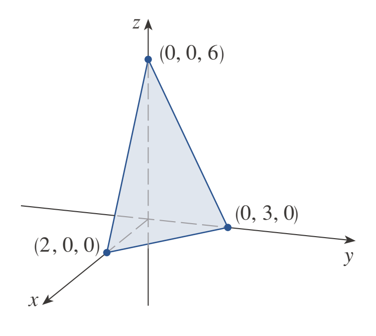


FIGURA 6

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUCIÓN La gráfica de f tiene la ecuación $z = 6 - 3x - 2y$, o $3x + 2y + z = 6$, que representa un plano. Para graficar el plano se determinan primero las intersecciones. Si $y = z = 0$, en la ecuación se obtiene $x = 2$ como la intersección en x. De igual forma, la intersección en y es 3 y la intersección en z es 6. Esto ayuda a trazar la porción de la gráfica que reside en el primer octante de la figura 6. ■

La función del ejemplo 5 es un caso especial de la función

$$f(x, y) = ax + by + c$$

la cual se llama **función lineal**. La gráfica de esa función tiene la ecuación

$$z = ax + by + c \qquad \text{o} \qquad ax + by - z + c = 0$$

que es un plano. Así como las funciones lineales de una variable son importantes en el cálculo de una variable, se verá que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel central en el cálculo de múltiples variables.

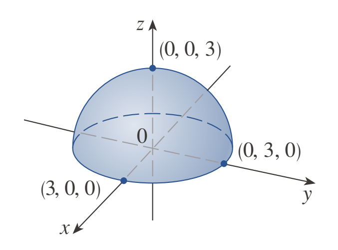


FIGURA 7
Gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN La gráfica tiene la ecuación $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Eleve al cuadrado ambos miembros de esta ecuación para obtener $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, o $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, la cual se reconoce como una ecuación de la esfera con centro en el origen y radio 3. Pero como $z \geqslant 0$, la gráfica de g es solo la mitad superior de esta esfera (véase la figura 7). ■

NOTA Una esfera entera no puede representarse con una sola función de x y y. Como se vio en el ejemplo 6, el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ es representado por la función $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. El hemisferio inferior está representado por la función $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

EJEMPLO 7 Use una computadora para dibujar la gráfica de la función de producción de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

SOLUCIÓN La figura 8 muestra la gráfica de P para valores de la mano de obra L y el capital K, que se ubican entre 0 y 300. La computadora ha dibujado la superficie diagramando trazas verticales. De estas trazas se deduce que el valor de la producción P aumenta cuando L o K aumenta, como se preveía.

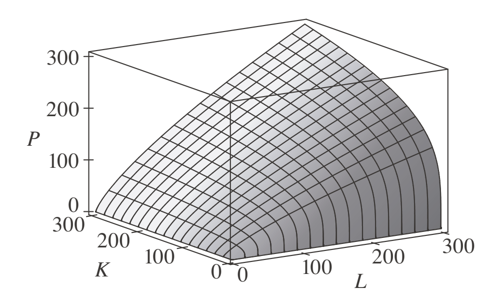


FIGURA 8 ■

EJEMPLO 8 Determine el dominio y el rango y trace la gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Nótese que $h(x, y)$ se define para todos los posibles pares ordenados de números reales (x, y), así que el dominio es $\mathbb{R}^2$, la totalidad del plano xy. El rango de h es el conjunto $(0, \infty)$ de todos los números reales no negativos. [Nótese también que $x^2 \geqslant 0$ y $y^2 \geqslant 0$, así que $h(x, y) \geqslant 0$ para todas las x y y.] La gráfica de h tiene la ecuación



$z = 4x^2 + y^2$, que es el paraboloide elíptico que se trazó en el ejemplo 12.6.4. Las trazas horizontales son elipses y las verticales parábolas (véase la figura 9).

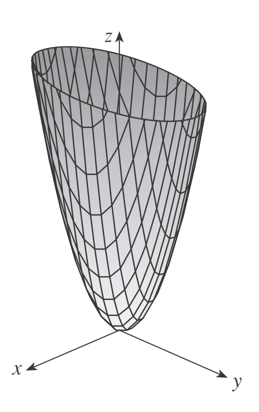
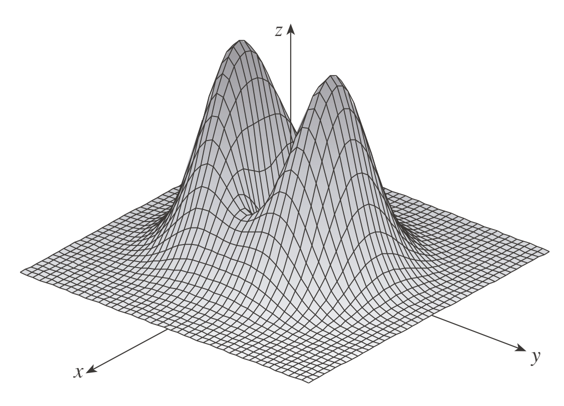


FIGURA 9
Gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

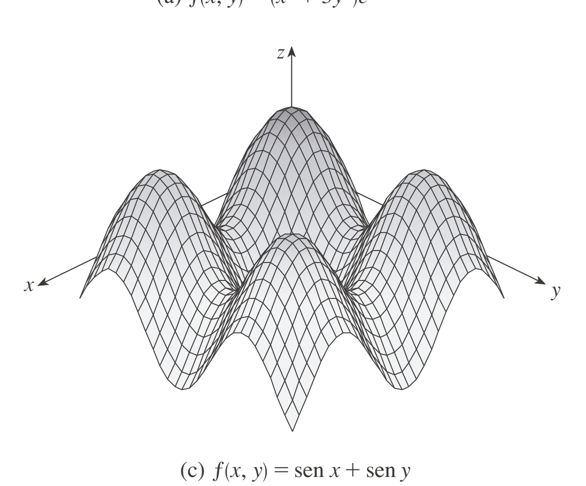
Es fácil conseguir programas de cómputo para graficar funciones de dos variables. En la mayoría de estos, las trazas en los planos verticales $x = k$ y $y = k$ se dibujan para valores igualmente espaciados de k y partes de la gráfica son omitidas usando la eliminación de líneas ocultas.

La figura 10 muestra gráficas generadas por computadora de varias funciones. Observe la imagen completa de una función cuando puede rotarse y mostrar diferentes perspectivas.

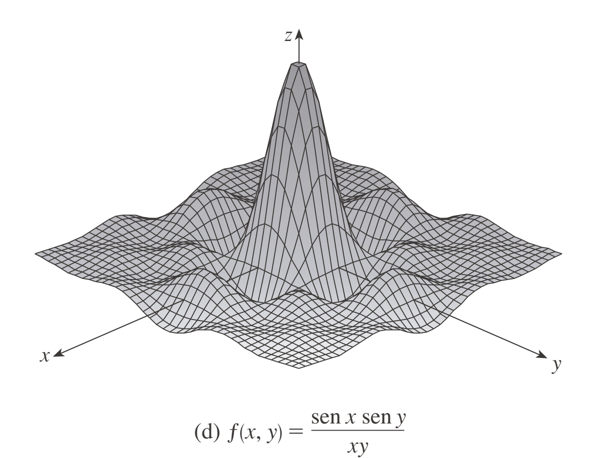


(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(c) $f(x, y) = \text{sen}\, x + \text{sen}\, y$



(d) $f(x, y) = \dfrac{\text{sen}\, x \,\text{sen}\, y}{xy}$

FIGURA 10

En las partes (a) y (b) la gráfica de f es muy plana y está cerca del plano xy, excepto cerca del origen; esto se debe a que $e^{-x^2-y^2}$ es muy reducida cuando x o y tienen valores grandes.

Curvas de nivel

Hasta aquí dispone de dos métodos para visualizar funciones: diagramas con flechas y gráficas. Un tercer método, tomado de los cartógrafos, es un mapa de contorno en el que puntos de elevación constante se unen para formar *curvas de contorno* o *curvas de nivel*.

Definición Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas con ecuaciones $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en los que f adopta un valor k dado. En otras palabras, muestra dónde la gráfica de f tiene altura k.

En la figura 11 se observa la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel $f(x, y) = k$ son las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano xy. Si se dibujan las curvas de nivel de una función para visualizarlas en la altura indicada, es posible crearse una imagen de la gráfica. La superficie es pronunciada donde las curvas de nivel se juntan y es más plana donde están separadas.

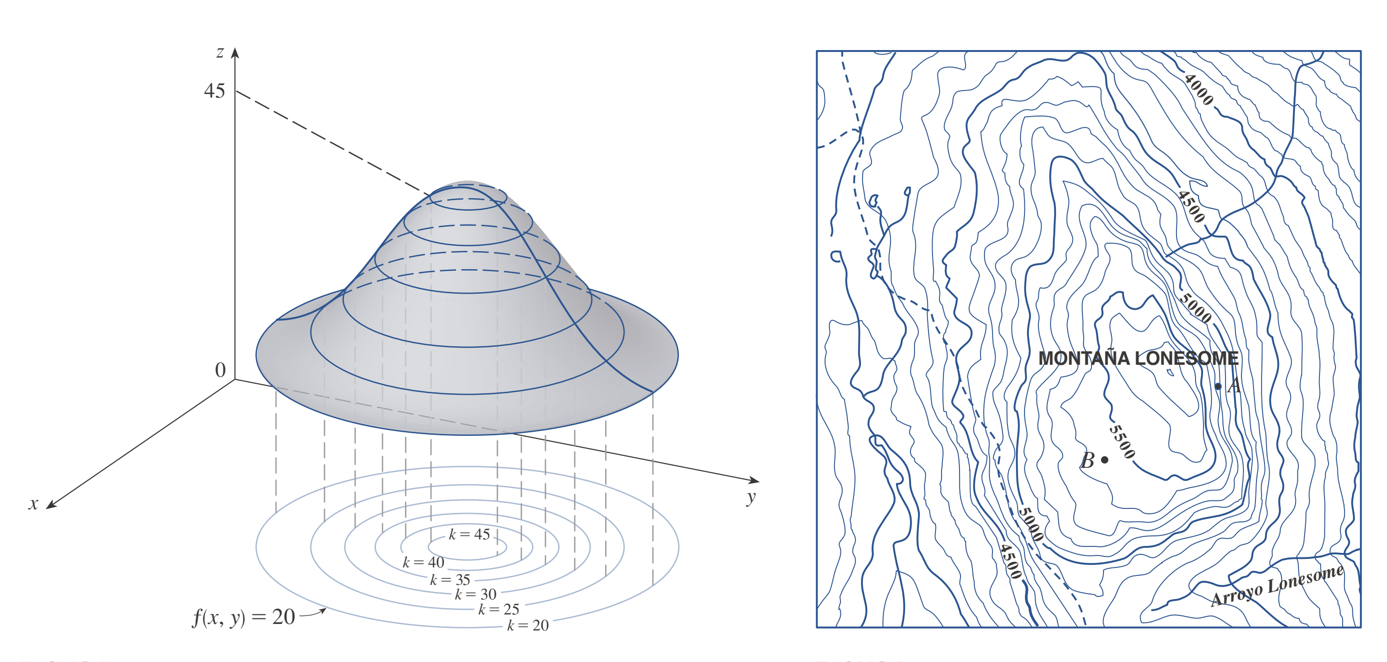


FIGURA 11

FIGURA 12

TEC Visual 14.1A anima la figura 11 mostrando las curvas de nivel correspondientes a las gráficas de funciones.

Un ejemplo común de curvas de nivel se observa en mapas topográficos de regiones montañosas, como el mapa de la figura 12. Las curvas de nivel son curvas de elevación constante sobre el nivel del mar. Si se recorre una de esas líneas de contorno, no se asciende ni desciende. Otro ejemplo común es la función temperatura que se presentó al principio de esta sección. En este caso, las curvas de nivel se llaman **isotermas** y unen

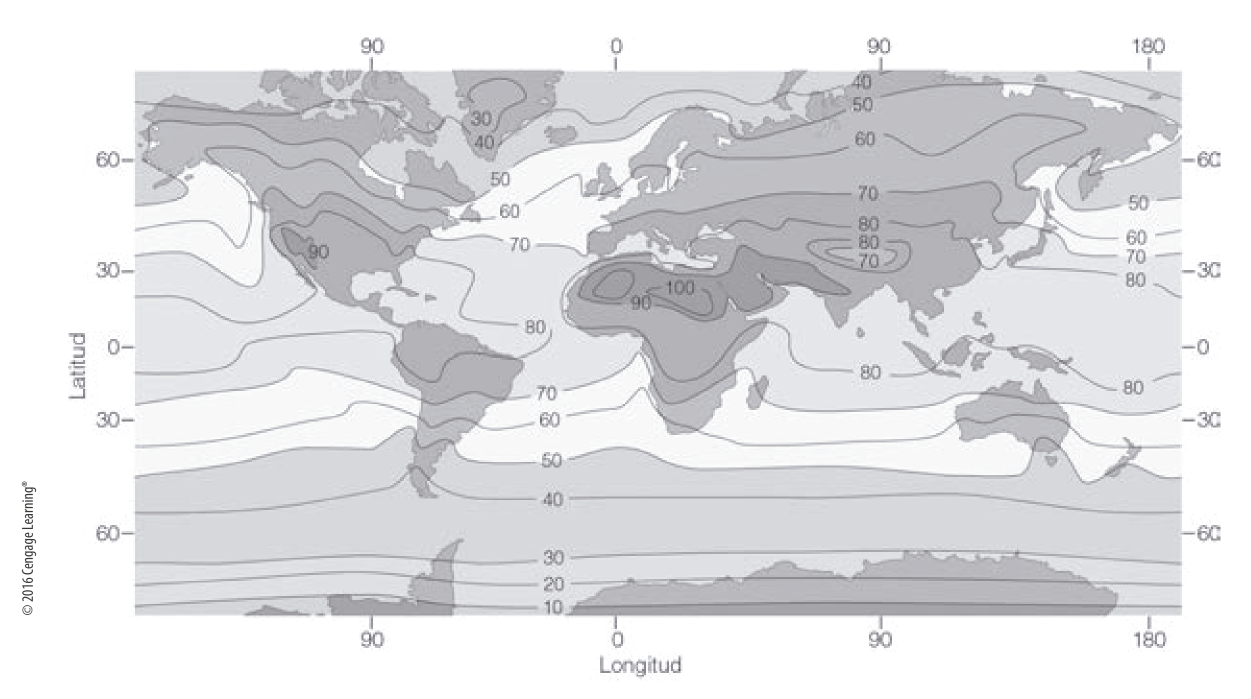


FIGURA 13 Temperatura promedio del aire cerca del nivel del mar en julio (°F)

90° 80° 70° 60° 50° 40° 30° 20° 10° 0° 10° 20° 30° 40° 50°

ACOTACIONES

Precipitación (cm/año)

Menos de 25	50 a 100	200 a 250
25 a 50	100 a 200	Más de 250

FIGURA 14
Precipitación

lugares con la misma temperatura. La figura 13 es un mapa de climas del mundo con las temperaturas promedio en julio. Las isotermas son las curvas que separan las bandas de distinto tono.

En mapas de climas de presión atmosférica, como función de la longitud y la latitud, las curvas de nivel se llaman **isobaras** y unen lugares con la misma presión. (Véase el ejercicio 34.) Los vientos superficiales tienden a fluir desde áreas de alta presión a lo largo de las isobaras hacia áreas de baja presión, y son más fuertes donde las isobaras están más estrechamente ceñidas entre sí.

En el mapa de contorno de la precipitación mundial (véase la figura 14), las curvas de nivel no están rotuladas, pero distinguen las regiones con distintas tonalidades de gris y la cantidad de precipitación se indica en las acotaciones.

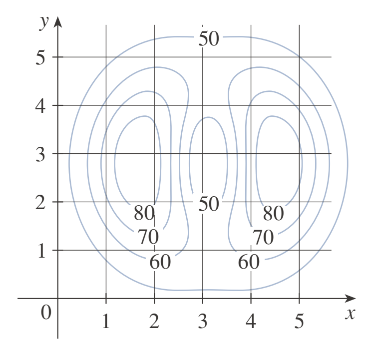


FIGURA 15

EJEMPLO 9 En la figura 15 se muestra un mapa de contorno para una función f. Estime los valores de $f(1, 3)$ y $f(4, 5)$.

SOLUCIÓN El punto (1, 3) se ubica en parte entre las curvas de nivel con valores de z de 70 y 80. Se estima que

$$f(1, 3) \approx 73$$

De igual manera, se estima que $\quad f(4, 5) \approx 56$ ■



EJEMPLO 10 Trace las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para los valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$6 - 3x - 2y = k \qquad \text{o} \qquad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Esta es una familia de rectas con pendiente $-\frac{3}{2}$. Las cuatro curvas de nivel particulares con $k = -6, 0, 6$ y 12 son $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$, y $3x + 2y + 6 = 0$. Y están trazadas en la figura 16. Las curvas de nivel son rectas paralelas igualmente espaciadas porque la gráfica de f es un plano (véase la figura 6).

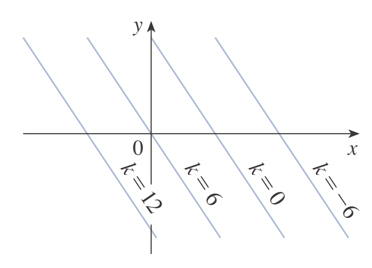


FIGURA 16
Mapa de contorno de
$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

■

EJEMPLO 11 Trace las curvas de nivel de la función

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Esta es una familia de círculos concéntricos con centro (0, 0) y radio $\sqrt{9 - k^2}$. Los casos $k = 0, 1, 2, 3$ se muestran en la figura 17. Intente visualizar estas curvas de nivel

elevándolas para formar una superficie y compárelas con la gráfica de g (hemisferio) de la figura 7. (Véase TEC Visual 14.1A.)

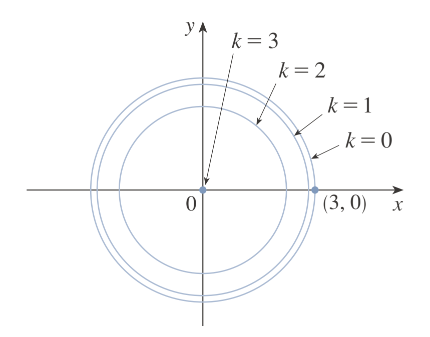


FIGURA 17
Mapa de contorno de
$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

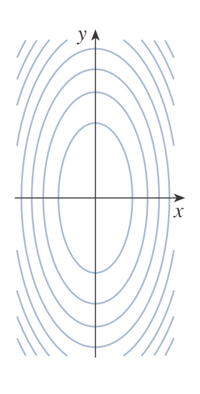
EJEMPLO 12 Trace algunas curvas de nivel de la función $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

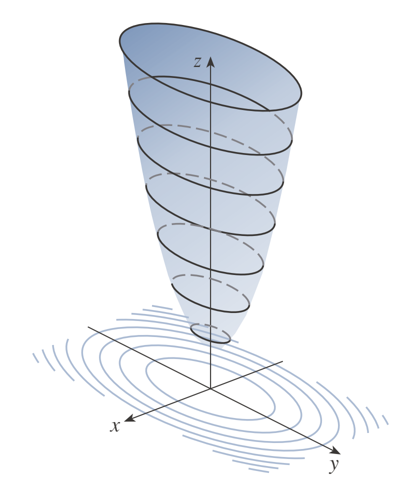
$$4x^2 + y^2 + 1 = k \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

lo que, para $k > 1$, describe una familia de elipses con semiejes $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$ y $\sqrt{k-1}$. La figura 18(a) muestra un mapa de contorno de h dibujado en computadora. La figura 18(b) muestra estas curvas de nivel elevadas para componer la gráfica de h (un paraboloide elíptico), donde se convierten en trazas horizontales. Se ve en la figura 18 cómo la gráfica de h se forma a partir de las curvas de nivel.

TEC Visual 14.1B demuestra la relación entre superficies y sus mapas de contorno.



(a) Mapa de contorno



(b) Las trazas horizontales son curvas de nivel elevadas

FIGURA 18
La gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ se forma elevando las curvas de nivel.

EJEMPLO 13 Trace curvas de nivel para la función de producción de Cobb-Douglas del ejemplo 3.

SOLUCIÓN En la figura 19 se usa una computadora para dibujar un diagrama de contorno para la función de producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

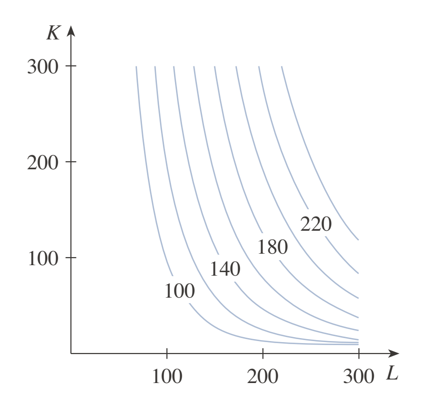
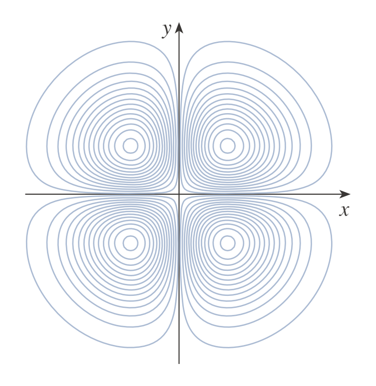


FIGURA 19

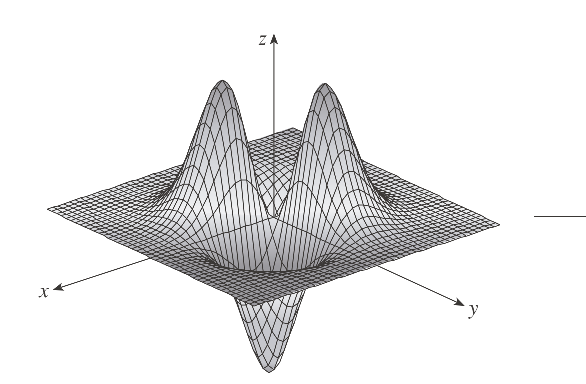
Las curvas de nivel se han rotulado con el valor de la producción P. Por ejemplo, la curva de nivel señalada como 140 muestra todos los valores de la mano de obra L y la inversión de capital K que resultan en una producción de $P = 140$. Se ve que, para un valor fijo de P, cuando L aumenta, K disminuye y viceversa. ■

Para algunos propósitos, un mapa de contorno es más útil que una gráfica, como en el ejemplo 13. (Compare la figura 19 con la figura 8.) Y también para estimar valores de funciones, como en el ejemplo 9.

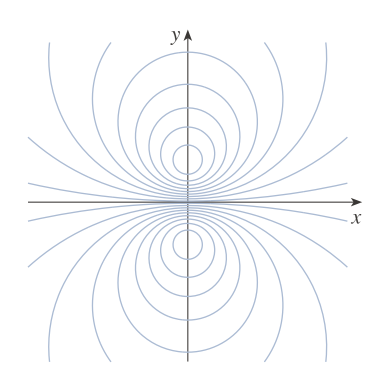
La figura 20 muestra algunas curvas de nivel generadas por computadora y sus correspondientes gráficas. Nótese que las curvas de nivel de la parte (c) se apilan cerca del origen debido a que la gráfica en la parte (d) es más pronunciada al acercarse a ese punto.



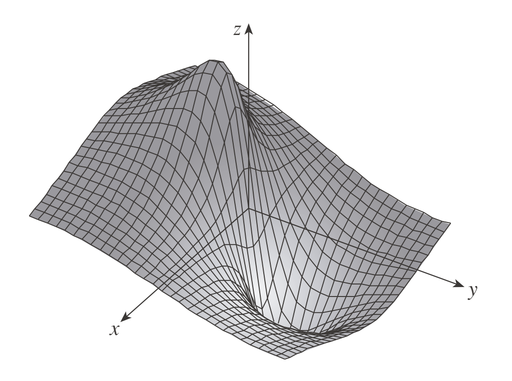

(a) Curvas de nivel de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Dos vistas de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(c) Curvas de nivel de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



(d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

FIGURA 20

Funciones de tres o más variables

Una **función de tres variables**, f, es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ un número real único denotado por $f(x, y, z)$. Por ejemplo, la temperatura T en un punto de la superficie terrestre depende de la longitud x y la latitud y del punto y del momento t, así que se puede escribir $T = f(x, y, t)$.

EJEMPLO 14 Determine el dominio de f si

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUCIÓN La expresión para $f(x, y, z)$ está definida mientras $z - y > 0$, así que el dominio de f es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Este es un **semiespacio** que consta de todos los puntos que se ubican arriba del plano $z = y$. ■

Una función f de tres variables es difícil de visualizar porque su gráfica tendría que representarse en un espacio tetradimensional. Sin embargo, se hará una idea de f examinando sus **superficies de nivel**, las cuales son las superficies con ecuaciones $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante. Si el punto (x, y, z) se mueve a lo largo de una superficie de nivel, el valor de $f(x, y, z)$ se mantiene fijo.

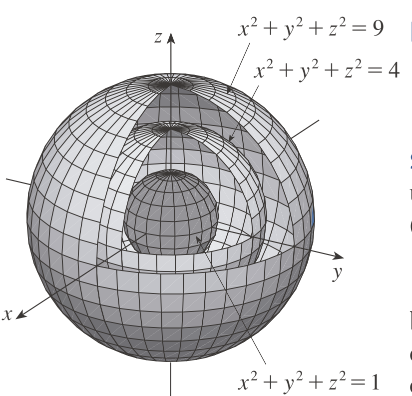


FIGURA 21

EJEMPLO 15 Determine las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUCIÓN Las superficies de nivel son $x^2 + y^2 + z^2 = k$, donde $k \geqslant 0$. Estas forman una familia de esferas concéntricas con radio $\sqrt{k}$. (Véase la figura 21.) Así, cuando (x, y, z) varía en cualquier esfera con centro O, el valor de $f(x, y, z)$ se mantiene fijo. ■

Las funciones pueden tener cualquier número de variables. Una **función de *n* variables** es una regla que asigna un número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a una n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales. Se denota con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas esas n-adas. Por ejemplo, si una compañía usa n ingredientes diferentes para hacer un producto alimenticio, c_i es el costo por unidad del i-ésimo ingrediente y x_i son las unidades usadas del ingrediente i-ésimo, de modo que el costo total C de los ingredientes es una función de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\boxed{3} \qquad C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

La función f es una función con valores reales cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A veces se usará la notación vectorial para escribir tales funciones en forma más compacta: si $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, a menudo se escribe $f(\mathbf{x})$ en lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Con esta notación se puede reescribir la función definida en la ecuación 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$ y $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota el producto punto de los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$ en V_n.

En vista de la correspondencia inyectiva entre los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y sus vectores de posición $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ en V_n, se tienen tres maneras de considerar una función f definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como una función de n variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. Como una función de una variable puntual $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
3. Como una función de una variable vectorial $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

Verá que estos tres puntos de vista son igualmente útiles.

14.1 EJERCICIOS

1. En el ejemplo 2 se consideró la función $W = f(T, v)$, donde W es el índice de viento-frío; T, la temperatura real y v, la velocidad del viento. En la tabla 1 de la página 889 se ofrece una representación numérica.
(a) ¿Cuál es el valor de $f(-15, 40)$? ¿Cuál es su significado?
(b) Explique el significado de la pregunta "¿Para qué valor de v es $f(-20, v) = -30$?" Después responda la pregunta.
(c) Explique el significado de la pregunta "¿Para qué valor de T es $f(T, 20) = -49$?" Después responda la pregunta.
(d) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(-5, v)$? Describa el comportamiento de esta función.
(e) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(T, 50)$? Describa el comportamiento de esta función.

2. El *índice I de temperatura-humedad*, o *humidex*, es la temperatura del aire percibida cuando la temperatura real es T y la humedad relativa es h, de modo que se puede escribir $I = f(T, h)$. La tabla de valores de I siguiente es un fragmento de una tabla compilada por Environment Canada.

Tabla 3 Temperatura aparente como una función de la temperatura y la humedad

Humedad relativa (%) — Temperatura real (°C)

T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

(a) ¿Cuál es el valor de $f(35, 60)$? ¿Cuál es su significado?
(b) ¿Para qué valor de h es $f(30, h) = 36$?
(c) ¿Para qué valor de T es $f(T, 40) = 42$?
(d) ¿Cuáles son los significados de las funciones $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare el comportamiento de estas dos funciones de h.

3. Un fabricante ha planeado su función de producción anual P (el valor monetario de su producción entera en millones de dólares) como una función de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.47L^{0.65}K^{0.35}$$

donde L es el número de horas de trabajo (en miles) y K el capital invertido (en millones de dólares). Determine $P(120, 20)$ e interprétela.

4. Verifique la función de producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

explicada en el ejemplo 3 que la producción se duplicará si se duplica tanto la cantidad de mano de obra como la cantidad de capital. Determine si esto también se aplica a la función de producción general

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

5. Un modelo para el área de un cuerpo humano está dado por la función

$$S = f(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$$

donde w es el peso (en libras), h la altura (en pulgadas) y S se mide en pies cuadrados.
(a) Encuentre $f(160, 70)$ e interprétela.
(b) ¿Cuál es el área de su propio cuerpo?

6. El índice de viento-frío W expuesto en el ejemplo 2 ha sido modelado para la función siguiente:

$$W(T, v) = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

Compruebe cuánto coincide este modelo con los valores de la tabla 1 para algunos valores de T y v.

7. La altura de las olas h en mar abierto depende de la velocidad v del viento y el tiempo t durante el cual el viento ha soplado a esa velocidad. Valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en metros en la tabla 4.
(a) ¿Cuál es el valor de $f(80, 15)$? ¿Cuál es su significado?
(b) ¿Cuál es el significado de la función $h = f(60, t)$? Describa el comportamiento de esta función.
(c) ¿Cuál es el significado de la función $h = f(v, 30)$? Describa el comportamiento de esta función.

Tabla 4

Duración (horas) — Velocidad del viento (km/h)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
30	1.2	1.3	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6
40	1.5	2.2	2.4	2.5	2.7	2.8	2.8
60	2.8	4.0	4.9	5.2	5.5	5.8	5.9
80	4.3	6.4	7.7	8.6	9.5	10.1	10.2
100	5.8	8.9	11.0	12.2	13.8	14.7	15.3
120	7.4	11.3	14.4	16.6	19.0	20.5	21.1

8. Una compañía fabrica cajas de cartón de tres tamaños: chica, mediana y grande con un costo de \$2.50,

\$4.00 y \$4.50, respectivamente. Los costos fijos son de \$8 000.
(a) Exprese el costo de fabricar x cajas chicas, y cajas medianas y z cajas grandes como una función de tres variables: $C = f(x, y, z)$.
(b) Determine $f(3\,000, 5\,000, 4\,000)$ e interprétela.
(c) ¿Cuál es el dominio de f?

9. Sea $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.
(a) Evalúe $g(2, -1)$.
(b) Determine el dominio de g.
(c) Determine el rango de g.

10. Sea $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.
(a) Evalúe $F(3, 1)$.
(b) Determine y trace el dominio de F.
(c) Determine el rango de F.

11. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.
(a) Evalúe $f(1, 1, 1)$.
(b) Determine y describa el dominio de f.

12. Sea $g(x, y, z) = x^3y^2z\sqrt{10 - x - y - z}$.
(a) Evalúe $g(1, 2, 3)$.
(b) Determine y describa el dominio de g.

13-22 Determine y trace el dominio de la función.

13. $f(x, y) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{y - 1}$

14. $f(x, y) = \sqrt[4]{x - 3y}$

15. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

16. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

17. $g(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

18. $g(x, y) = \dfrac{\ln(2 - x)}{1 - x^2 - y^2}$

19. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x + y)$

21. $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2} + \sqrt{1 - z^2}$

22. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

23-31 Trace la gráfica de la función.

23. $f(x, y) = y$

24. $f(x, y) = x^2$

25. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26. $f(x, y) = \cos y$

27. $f(x, y) = \operatorname{sen} x$

28. $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

29. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 1$

30. $f(x, y) = e^{-y}$

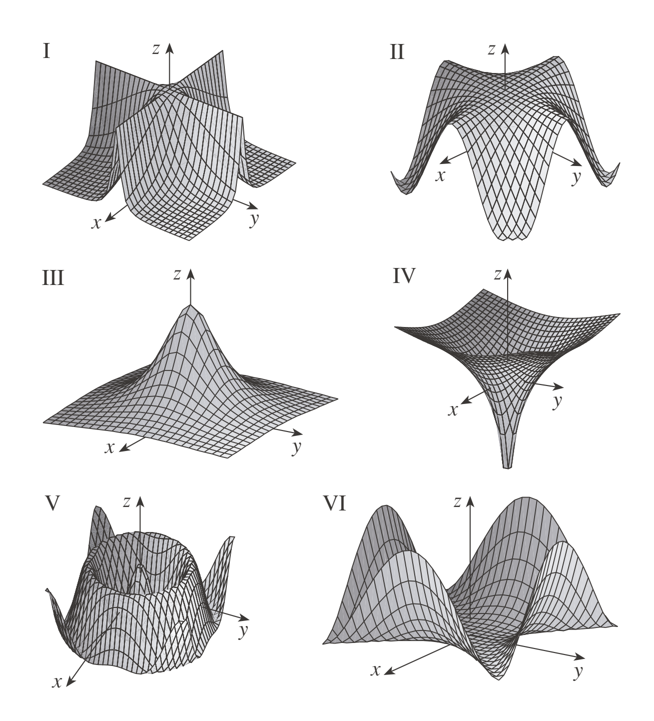
31. $f(x, y) = y^2 + 1$

32. Asocie la función con la gráfica que le corresponde. Argumente sus decisiones.

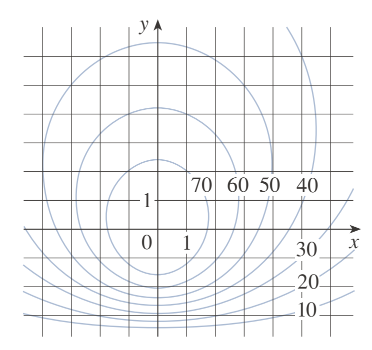
(a) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ (b) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2y^2}$

(c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ (d) $f(x, y) = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$

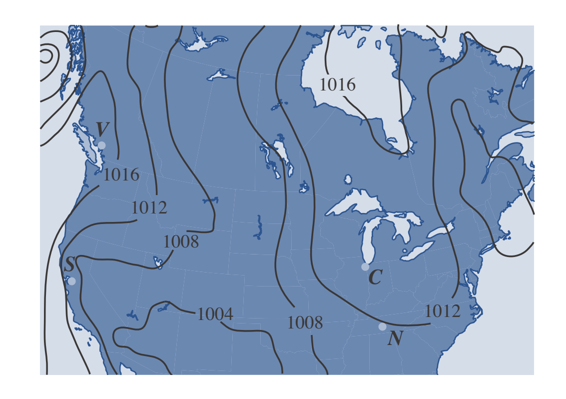
(e) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$ (f) $f(x, y) = \cos(xy)$



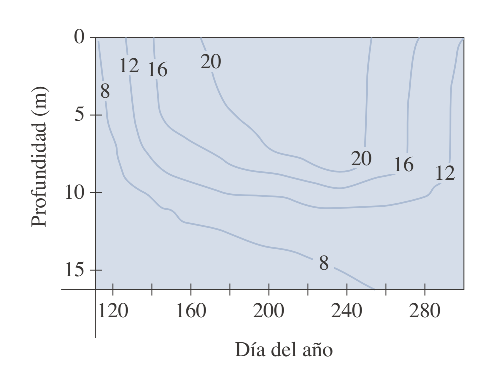
33. A continuación se muestra el mapa de contorno para una función f. Úselo para estimar los valores de $f(-3, 3)$ y $f(3, -2)$. Explique la forma de la gráfica.



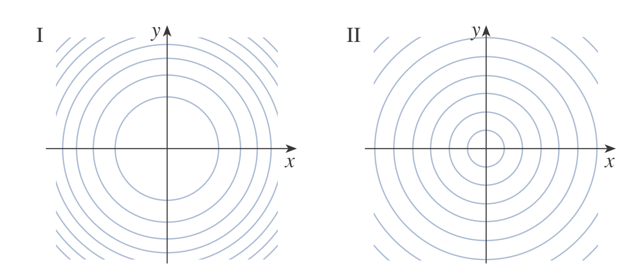
34. En las curvas de nivel, llamadas isobaras, representadas en el mapa de contorno de presión atmosférica en América del Norte del 12 de agosto de 2008, la presión se señala en milibaras (mb).
(a) Estime la presión en C (Chicago), N (Nashville), S (San Francisco) y V (Vancouver).
(b) ¿En cuál de esos lugares los vientos fueron más fuertes?



35. Las curvas de nivel (isotermas) para la temperatura habitual del agua (en °C) en Long Lake, Minnesota, representan una función de la profundidad y el momento del año. Estime la temperatura del lago el 9 de junio (día 160) a una profundidad de 10 m y el 29 de junio (día 180) a una profundidad de 5 m.

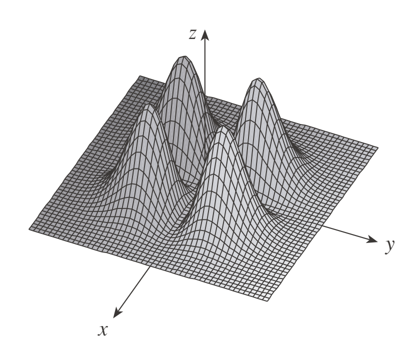


36. Observe los dos mapas de contorno. Uno es para una función f cuya gráfica es un cono. El otro es para una función g cuya gráfica es un paraboloide. ¿Cuál corresponde a cada función y por qué?



37. Localice los puntos A y B en el mapa de la Montaña Lonesome (figura 12). ¿Cómo describiría el terreno que se forma cerca de A? ¿Cerca de B?

38. Haga un diagrama de un mapa de contorno para la función que se representa en la gráfica siguiente.



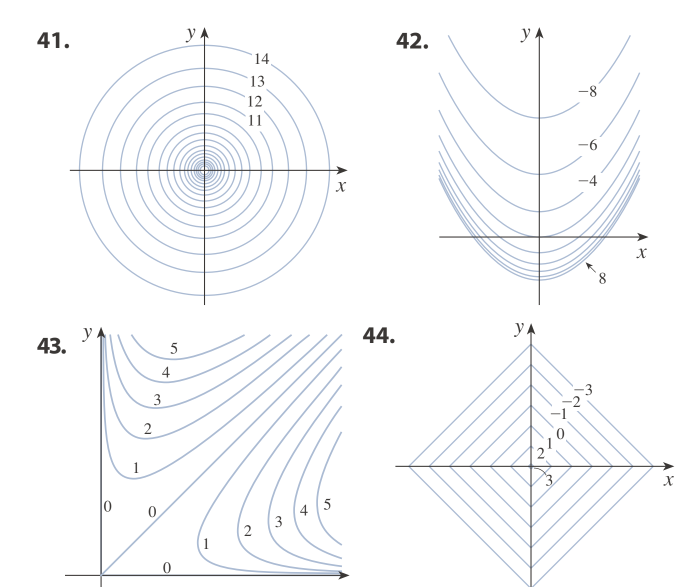
39. El *índice de masa corporal* (IMC) de una persona se calcula con

$$B(m, h) = \frac{m}{h^2}$$

donde m es la masa de la persona en kilogramos y h la altura en metros. Dibuje las curvas de nivel $B(m, h) = 18.5$, $B(m, h) = 25$, $B(m, h) = 30$, $B(m, h) = 40$. Una pauta es que una persona tiene bajo peso si su IMC es menor que 18.5; se encuentra en un estado óptimo si su IMC está entre 18.5 y 25; tiene sobrepeso si su IMC está entre 25 y 30, y es obesa si su IMC excede de 30. Sombree la región correspondiente al IMC óptimo. ¿Si una persona pesa 62 kg y mide 152 cm pertenece a esta categoría?

40. La fórmula para el cálculo del índice de masa corporal se localiza en el ejercicio 39. Dibuje la curva de nivel de esta función para una persona que mide 2 metros de altura y 80 kg de peso. Determine el peso y la altura de otras dos personas con esa misma curva de nivel.

41-44 Use el mapa de contorno de una función para hacer un diagrama de la gráfica de f.



45-52 Dibuje un mapa de contorno de la función que muestre varias curvas de nivel.

45. $f(x, y) = x^2 - y^2$

46. $f(x, y) = xy$

47. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

48. $f(x, y) = x^3 - y$

49. $f(x, y) = ye^x$

50. $f(x, y) = y - \arctan x$

51. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

52. $f(x, y) = y \sec x$

53-54 Trace un mapa de contorno y una gráfica de la función y compárelos.

53. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

54. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

55. Una placa metálica delgada, localizada en el plano xy, tiene temperatura $T(x,y)$ en el punto (x, y). Trace algunas curvas de nivel (isotermas) si la función temperatura está dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$



56. Si $V(x, y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x, y) en el plano xy, las curvas de nivel de V se llaman *curvas equipotenciales*, porque en todos los puntos sobre una de esas curvas el potencial eléctrico es el mismo. Trace algunas curvas equipotenciales si $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, donde c es una constante positiva.

57-60 Grafique la función siguiente usando varios dominios y distintas perspectivas. Imprima la que considere tiene mejor visibilidad. Si con su software puede crear curvas de nivel, trace algunas líneas de contorno de la misma función y compárelas con la gráfica.

57. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (silla de mono)

58. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (silla de perro)

59. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/3}(\text{sen}(x^2) + \cos(y^2))$

60. $f(x, y) = \cos x \cos y$

61-66 Asocie la función (a) con su gráfica (figuras A a la F) y (b) con su mapa de contorno (dibujos I-VI). Explique sus decisiones.

61. $z = \text{sen}(xy)$

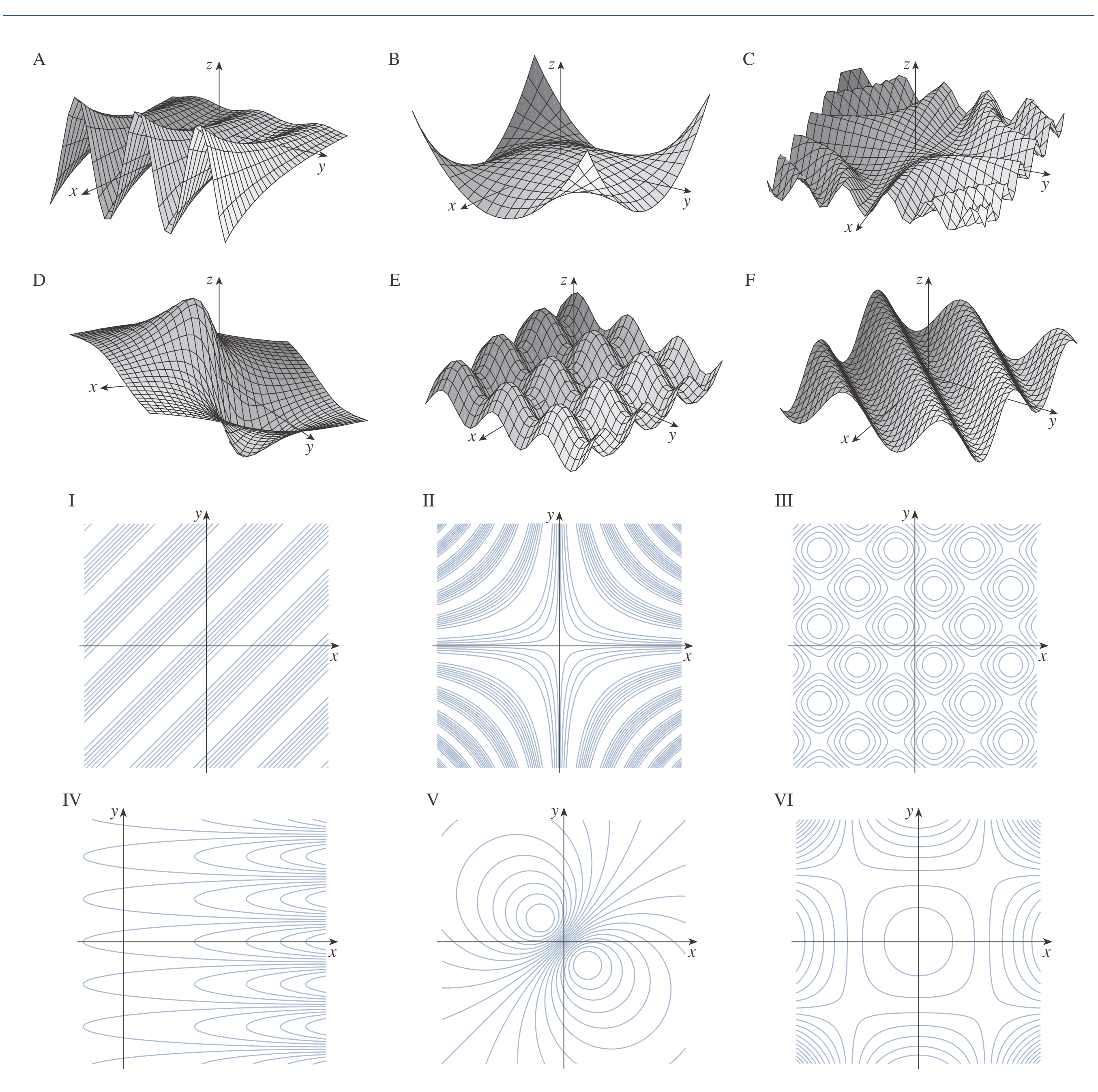
62. $z = e^x \cos y$

63. $z = \text{sen}(x - y)$

64. $z = \text{sen}\, x - \text{sen}\, y$

65. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

66. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$



67-70 Describa las superficies de nivel de cada función.

67. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

68. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

69. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

70. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

71-72 Describa cómo la gráfica de g se obtiene de la gráfica de f.

71. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$
(b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$
(d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

72. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$
(b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

73-74 Grafique una función en computadora usando varios dominios y perspectivas. Imprima la que ofrezca una mejor visibilidad de los "picos y valles". ¿Puede afirmarse que la función tiene un valor máximo? ¿Puede identificar puntos en la gráfica que fuera posible considerar "puntos máximos locales"? ¿Y "puntos mínimos locales"?

73. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

74. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

75-76 Grafique la función usando varios dominios y perspectivas. Comente el comportamiento de la función para situaciones límite. ¿Qué sucede cuando tanto x como y se incrementan indefinidamente? ¿Qué sucede cuando (x, y) se aproxima al origen?

75. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ **76.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

---

77. Investigue la familia de funciones $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. ¿Cómo depende de c la forma de la gráfica?

78. Use una computadora para investigar la familia de superficies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

¿Cómo varía la forma de la gráfica con los números a y b?

79. Use una computadora para investigar cuál es la familia de superficies de $z = x^2 + y^2 + cxy$. En particular, determine los valores de transición de c para los que la superficie cambia de un tipo de superficie cuadrática a otro.

80. Grafique las funciones.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

y $$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En general, si g es una función de una variable, ¿cómo se obtiene la gráfica de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

de la gráfica de g?

81. (a) Demuestre con logaritmos que la función general de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ puede expresarse como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

(b) Si se concede que $x = \ln(L/K)$ y $y = \ln(P/K)$, la ecuación del inciso (a) se convierte en la ecuación lineal $y = \alpha x + \ln b$. Use la tabla 2 del ejemplo 3 para hacer una tabla de valores de $\ln(L/K)$ y $\ln(P/K)$ para los años 1899-1922. Use una calculadora graficadora o computadora para determinar la línea de regresión de mínimos cuadrados que pasa por los puntos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduzca que la función de producción de Cobb-Douglas es $P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

14.2 Límites y continuidad

Compare el comportamiento de las funciones

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

cuando x y y se aproximan a 0 [y por tanto el punto (x, y) se aproxima al origen].



Las tablas 1 y 2 muestran valores de $f(x, y)$ y $g(x, y)$ con tres decimales para los puntos (x, y) cerca del origen. (Nótese que ninguna función está definida en el origen.)

Tabla 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

Tabla 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Parece que cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$, los valores de $f(x, y)$ se aproximan a 1, mientras que los valores de $g(x, y)$ no se acercan a ningún número. Estas suposiciones basadas en la evidencia numérica son correctas, y se escribe que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{no existen}$$

En general, se usa la notación

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

para indicar que los valores de $f(x, y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y) se aproxima al punto (a, b) a lo largo de cualquier trayectoria que permanezca en el dominio de f. En otras palabras, se puede hacer que los valores de $f(x, y)$ se acerquen a los de L tanto como se quiera tomando el punto (x, y) lo suficientemente cerca del punto (a, b), pero no igual a (a, b). A continuación se ofrece una definición más precisa.

1 Definición Sea f una función de dos variables cuyo dominio D incluye puntos arbitrariamente cerca de (a, b). Se dice entonces que el **límite de (x, y) cuando (x, y) se aproxima a (a, b)** es L y se escribe

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad (x, y) \in D \quad \text{y} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Otras notaciones para el límite de la definición 1 son

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = L \qquad \text{y} \qquad f(x, y) \to L \ \text{cuando} \ (x, y) \to (a, b)$$

Nótese que $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L, y que $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ es la distancia entre el punto (x, y) y el punto (a, b). Así, la definición 1 indica que la distancia entre $f(x, y)$ y L puede reducirse arbitrariamente volviendo la distancia de (x, y) a (a, b) lo suficientemente pequeña (pero diferente de 0). La figura 1

ilustra la definición 1 por medio de un diagrama con flechas. Si cualquier intervalo reducido $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ se da alrededor de L, se puede determinar un disco D_δ con centro (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que f mande todos los puntos en D_δ [con la posible excepción de (a, b)] en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

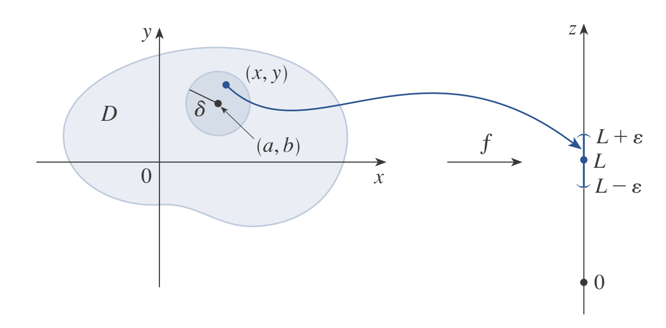


FIGURA 1

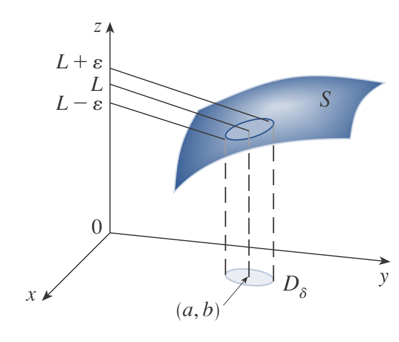


FIGURA 2

Otra ilustración de la definición 1 se da en la figura 2, donde la superficie S es la gráfica de f. Si se da $\varepsilon > 0$, se puede determinar $\delta > 0$ tal que si (x, y) se restringe a residir en el disco D_δ y $(x, y) \neq (a, b)$, entonces la parte correspondiente de S resida entre los planos horizontales $z = L - \varepsilon$ y $z = L + \varepsilon$.

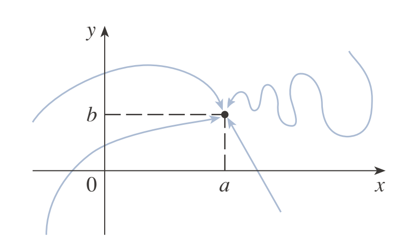


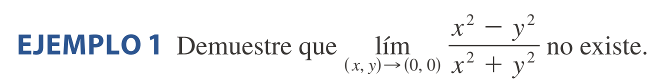
FIGURA 3

Para funciones de una variable, cuando se permite que x se aproxime a a, solo hay dos posibles direcciones de aproximación, desde la izquierda o desde la derecha. Recuerde del capítulo 2 que si $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

Para funciones de dos variables no es tan sencillo, porque (x, y) puede aproximarse a (a, b) desde un número infinito de direcciones en cualquier trayectoria (véase la figura 3) mientras (x, y) permanezca en el dominio de f.

La definición 1 indica que la distancia entre $f(x, y)$ y L puede reducirse de manera arbitraria volviendo la distancia de (x, y) a (a, b) lo suficientemente pequeña (pero diferente de 0). Esta definición solo se refiere a la *distancia* entre (x, y) y (a, b), no a la dirección de la aproximación. Por tanto, si el límite existe, $f(x, y)$ debe aproximarse al mismo límite sin importar cómo se aproxime (x, y) a (a, b). Así, si se puede determinar dos diferentes trayectorias de aproximación a lo largo de las cuales la función $f(x, y)$ tiene diferentes límites, entonces se concluye que $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ no existe.

> Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1 y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ a lo largo de una trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ no existe.

EJEMPLO 1 Demuestre que  $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primero aproxime $(0, 0)$ a lo largo del eje x. Entonces $y = 0$ da $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todas las $x \neq 0$, de manera que

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ a lo largo del eje } x$$

Ahora aproxime a lo largo del eje y poniendo $x = 0$. Entonces $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para todas las $y \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ a lo largo del eje } y$$

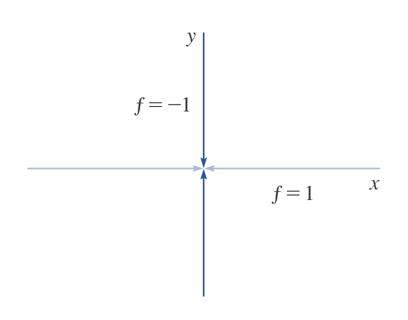


FIGURA 4

(Véase la figura 4.) Como f tiene dos diferentes límites a lo largo de dos rectas diferentes, el límite dado no existe. (Esto confirma la conjetura hecha con base en la evidencia numérica al principio de esta sección.) ■

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, ¿existe el $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Si $y = 0$, entonces $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Por tanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \quad \text{a lo largo del eje } x$$

Si $x = 0$, entonces $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, así que

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ a lo largo del eje } y$$

Aunque se han obtenido límites idénticos a lo largo de los ejes, eso no demuestra que el límite dado sea de 0. Aproxime ahora (0, 0) a lo largo de otra recta, por decir $y = x$. Para todas las $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ y a lo largo de $y - x$

(Véase la figura 5.) Como se han obtenido límites diferentes a lo largo de trayectorias diferentes, el límite dado no existe. ■

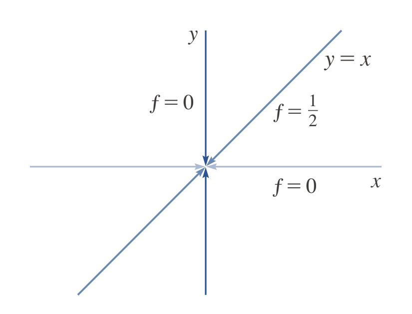


FIGURA 5

En la figura 6 se explica con más claridad el ejemplo 2. La cresta que se forma arriba de la recta $y = x$ se corresponde con el hecho de que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos los puntos (x, y) en esa recta, excepto en el origen.

TEC En Visual 14.2, una recta giratoria sobre la superficie de la figura 6 muestra límites diferentes en el origen desde direcciones distintas.

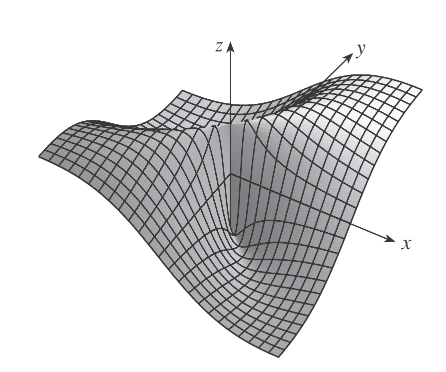


FIGURA 6
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, ¿existe $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Con la solución del ejemplo 2 en mente, intente ahorrar tiempo permitiendo que $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier recta que pasa por el origen. Si la recta no es el eje y, entonces $y = mx$, donde m es la pendiente, y

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

$$\text{Así} \qquad f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ a lo largo de } y = mx$$

Se obtiene el mismo resultado que $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la recta $x = 0$. Así, f tiene el mismo valor límite a lo largo de todas las rectas que pasan por el origen. Sin

La figura 7 muestra la gráfica de la función del ejemplo 3. Nótese la cresta arriba de la parábola $x = y^2$.

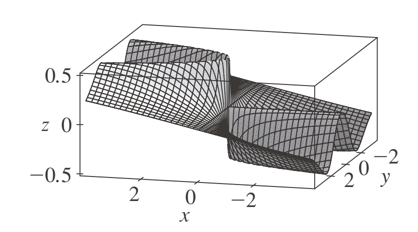


FIGURA 7

embargo, eso no demuestra que el límite dado sea de 0, porque si ahora se permite que $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la parábola $x = y^2$, se tiene

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

de manera $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de $x = y^2$

Como trayectorias distintas conducen a valores límite diferentes, el límite dado no existe. ■

Considere ahora los límites que *sí* existen. Igual que en el caso de las funciones de una variable, el cálculo de límites para funciones de dos variables puede simplificarse mucho mejor usando propiedades de los límites. Las leyes de los límites que se enlistaron en la sección 2.3 pueden prolongarse a las funciones de dos variables: el límite de una suma es la suma de los límites, el límite de un producto es el producto de los límites y así sucesivamente. En particular, las ecuaciones siguientes son verdaderas.

2 $$\lim_{(x, y)\to(a, b)} x = a \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} y = b \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} c = c$$

El teorema de compresión también es válido.

EJEMPLO 4 Determine si existe $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, se podría demostrar que el límite a lo largo de cualquier recta que pasa por el origen es 0. Esto no prueba que el límite dado sea de 0, pero los límites a lo largo de las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ también resultan ser de 0, de manera que empiece a sospechar que ese límite sí existe y es igual a 0.

Sea $\varepsilon > 0$. Se quiere encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

es decir que si $\quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad$ entonces $\quad \dfrac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$

Pero $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ ya que $y^2 \geqslant 0$, de modo que $x^2/(x^2 + y^2) \leqslant 1$ y por tanto

3 $$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leqslant 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Así, si elige $\delta = \varepsilon/3$ y considera $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

De ahí que, por la definición 1,

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$ ■

Otra manera de resolver el ejemplo 4 es usar el teorema de compresión en vez de la definición 1. De (2) se sigue que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} 3|y| = 0$$

así que la primera desigualdad en (3) indica que el límite dado es 0.

■ Continuidad

Recuerde que evaluar límites de funciones *continuas* de una variable es fácil. Eso puede hacerse mediante sustitución directa, porque la propiedad definitoria de una función conti-



nua es $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Las funciones continuas de dos variables también se definen mediante la propiedad de sustitución directa.

4 Definición Una función f de dos variables se llama **continua en** (a, b) si

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Se dice que f es **continua en** D si f es continua en cada punto (a, b) en D.

El significado intuitivo de la continuidad es que si el punto (x, y) cambia un poco, el valor de $f(x, y)$ cambia también solo un poco. Esto significa que una superficie con la gráfica de una función continua no tiene agujeros ni quiebres.

Usando las propiedades de los límites se puede observar que las sumas, diferencias, productos y cocientes de las funciones continuas son continuos en sus dominios. Use este hecho para ejemplificar funciones continuas.

Una **función polinomial de dos variables** (o polinomio para abreviar) es una suma de términos de la forma $cx^m y^n$, donde c es una constante y m y n son enteros no negativos. Una **función racional** es una razón de polinomios. Por ejemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

es un polinomio, mientras que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

es una función racional.

Los límites en (2) indican que las funciones $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$, y $h(x, y) = c$ son continuas. Como cualquier polinomio puede basarse en funciones simples f, g y h por multiplicación y adición, se sabe que *todos los polinomios son continuos* en $\mathbb{R}^2$. De igual manera, toda función racional es continua en su dominio, porque es un cociente de funciones continuas.

EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUCIÓN Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ es un polinomio, es continuo en todas partes, así que se puede determinar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$ ■

EJEMPLO 6 ¿Dónde es continua la función $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$?

SOLUCIÓN La función f es discontinua en $(0, 0)$ porque no está definida ahí. Como f es una función racional, es continua en su dominio, el cual es el conjunto $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$. ■

EJEMPLO 7 Sea

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Aquí g se define en (0, 0), pero g sigue siendo discontinua ahí porque $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} g(x, y)$ no existe (véase el ejemplo 1). ■

La figura 8 muestra la gráfica de la función continua del ejemplo 8.

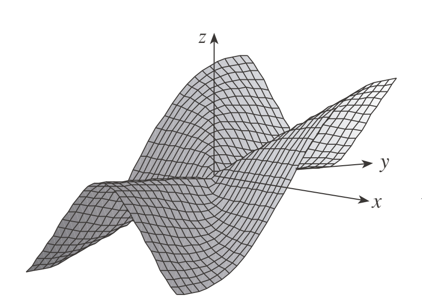


FIGURA 8

EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se sabe que f es continua para $(x, y) \neq (0, 0)$, ya que ahí es igual a una función racional. Asimismo, del ejemplo 4 se tiene

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Por tanto, f es continua en (0, 0), y en consecuencia es continua en $\mathbb{R}^2$. ■

Al igual que en las funciones de una variable, la composición es otra manera de combinar dos funciones continuas para obtener una tercera. De hecho, puede demostrarse que si f es una función continua de dos variables y g es una función continua de una variable definida en el rango de f, la función compuesta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es también una función continua.

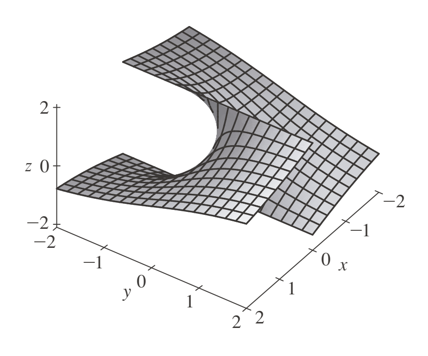


FIGURA 9
La función $h(x, y) = \arctan(y/x)$ es discontinua en $x = 0$.

EJEMPLO 9 ¿Dónde es continua la función $h(x, y) = \arctan(y/x)$?

SOLUCIÓN La función $f(x, y) = y/x$ es una función racional, y por tanto continua excepto en la recta $x = 0$. La función $g(t) = \arctan t$ es continua en todas partes. Así, la función compuesta

$$g(f(x, y)) = \arctan(y/x) = h(x, y)$$

es continua excepto en $x = 0$. La gráfica de la figura 9 muestra la interrupción en la gráfica de h arriba del eje y. ■

Funciones de tres o más variables

Todo lo realizado en esta sección puede aplicarse a funciones de tres o más variables. La notación

$$\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

significa que los valores de $f(x, y, z)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y, z) se aproxima al punto (a, b, c) a lo largo de cualquier trayectoria en el dominio de f. Como la distancia entre dos puntos (x, y, z) y (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ está dada por $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, se puede escribir una definición precisa como la siguiente: para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } (x, y, z) \text{ está en el dominio de } f \text{ y } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta$$

$$\text{entonces } |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

La función f es **continua** en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$



Por ejemplo, la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

es una función racional de tres variables y, por tanto, es continua en cualquier punto en $\mathbb{R}^3$ excepto donde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En otras palabras, es discontinua en la esfera con centro en el origen y radio 1.

Si se usa la notación vectorial que se presentó al final de la sección 14.1, pueden escribirse las definiciones de un límite para funciones de dos o tres variables en una forma compacta, como se muestra a continuación.

5 Teorema Si f se define en un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad \mathbf{x} \in D \quad \text{y} \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Obsérvese que si $n = 1$, entonces $\mathbf{x} = x$ y $\mathbf{a} = a$, y (5) es solo la definición de un límite para funciones de una variable. Para el caso $n = 2$, se tiene $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b\rangle$ y $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de manera que (5) se convierte en la definición 1. Si $n = 3$, entonces $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c\rangle$ y (5) se convierte en la definición de un límite de una función de tres variables. En cada caso, la definición de continuidad puede escribirse así

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 EJERCICIOS

1. Suponga que $\lim_{(x, y)\to(3, 1)} f(x, y) = 6$. ¿Qué puede decir sobre el valor de $f(3, 1)$? ¿Y si f fuera continua?

2. Explique por qué cada función es continua o discontinua.
(a) La temperatura ambiente como una función de la longitud, la latitud y el tiempo
(b) La elevación (altura sobre el nivel del mar) como una función de la longitud, la latitud y el tiempo
(c) El costo de un viaje en taxi como una función de la distancia recorrida y el tiempo

3-4 Use una tabla de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) cerca del origen para hacer una conjetura sobre el valor del límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Luego explique por qué su suposición es correcta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$

4. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5-22 Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.

5. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(3, 2)} (x^2y^3 - 4y^2)$

6. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(2, -1)} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$

7. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(\pi, \pi/2)} y \operatorname{sen}(x - y)$

8. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(3, 2)} e^{\sqrt{2x-y}}$

9. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$

10. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$

12. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

13. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

14. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$

15. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy^2 \cos y}{x^2 + y^4}$

16. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy^4}{x^4 + y^4}$

17. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$

18. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

19. $\displaystyle\lim_{(x, y, z)\to(\pi, 0, 1/3)} e^{y^2}\tan(xz)$

20. $\displaystyle\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \frac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

21. $\displaystyle\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

22. $\displaystyle\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

23-24 Elabore una gráfica en computadora de la función para explicar por qué el límite no existe.

23. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$ **24.** $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25-26 Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ y el conjunto de puntos en el que h es continua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t, \quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27-28 Grafique la función y observe dónde es discontinua. Use después la fórmula para explicar lo que observó.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$ **28.** $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29-38 Determine el conjunto de puntos en el que la función es continua.

29. $F(x, y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$ **30.** $F(x, y) = \cos\sqrt{1 + x - y}$

31. $F(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$ **32.** $H(x, y) = \dfrac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$

33. $G(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

34. $G(x, y) = \ln(1 + x - y)$

35. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

36. $G(x, y) = \tan^{-1}\big((x + y)^{-2}\big)$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39-41 Use coordenadas polares para encontrar el límite. [Si (r, θ) son coordenadas polares del punto (x, y), con $r \geqslant 0$, advierta que $r \to 0^+$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. Al comienzo de esta sección se consideró la función

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

y se supuso, con base en la evidencia numérica, que $f(x, y) \to 1$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Emplee coordenadas polares para confirmar el valor del límite. Después grafique la función.

43. Grafique y valore la continuidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

44. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \quad \text{o} \quad y \geqslant x^4 \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Demuestre que $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier trayectoria que pasa por $(0, 0)$ de la forma $y = mx^a$ con $0 < a < 4$.

(b) Independientemente del inciso (a), demuestre que f es discontinua en $(0, 0)$.

(c) Demuestre que f es discontinua en dos curvas enteras.

45. Demuestre que la función f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ es continua en $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia:* considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Si $\mathbf{c} \in V_n$, demuestre que la función f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

14.3 Derivadas parciales

En un día caluroso, la humedad extrema hace creer que la temperatura es más alta de lo que realmente es, mientras que en un día muy seco se percibe que la temperatura es inferior a lo que indica el termómetro. El Meteorological Service of Canada inventó el *humidex* o índice de temperatura-humedad para describir los efectos combinados de la temperatura y la humedad. El humidex I es la temperatura del aire percibida cuando la temperatura real es

T y la humedad relativa es H. Así, I es una función de T y H y se puede escribir $I = f(T, H)$. La tabla de valores de I que se muestra a continuación es un fragmento de una tabla compilada por el Meteorological Service.

Tabla 1 Índice de calor I como una función de la temperatura y la humedad

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°C)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Si se considera en la columna destacada de esta tabla, que corresponde a la humedad relativa de $H = 60\%$, el humidex como una función de la variable T para un valor fijo de H. Escriba $g(T) = f(T, 60)$. Entonces, $g(T)$ describe cómo aumenta el índice de calor I cuando la temperatura real T aumenta en un momento en que la humedad relativa es de 60%. La derivada de g cuando $T = 30$ °C es la razón de cambio de I con respecto a T cuando $T = 30$ °C:

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Es posible aproximar $g'(30)$ usando los valores de la tabla 1 y tomando $h = 2$ y – 2:

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1.5$$

Al promediar estos valores se puede decir que la derivada $g'(30)$ es de aproximadamente 1.75. Esto significa que cuando la temperatura real es de 30 °C y la humedad relativa es de 60%, ¡la temperatura aparente (humidex) aumenta alrededor de 1.75 °C por cada grado que aumenta la temperatura real!

Analice ahora la fila destacada de la tabla 1, que corresponde a una temperatura fija de $T = 30$ °C. Los números de esta fila son valores de la función $G(H) = f(30, H)$, que describe cómo aumenta el humidex cuando aumenta la humedad relativa H en un momento en que la temperatura real es de $T = 30$ °C. La derivada de esta función cuando $H = 60\%$ es la razón de cambio de I con respecto a H cuando $H = 60\%$:

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60 + h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60 + h) - f(30, 60)}{h}$$

Si se toma $h = 5$ y -5, aproxime $G'(60)$ usando los valores tabulares:

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0.4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0.2$$

Al promediar estos valores se obtiene la estimación $G'(60) \approx 0.3$. Esto indica que cuando la temperatura es de 30 °C y la humedad relativa es de 60%, el humidex aumenta alrededor de 0.3 °C por cada punto porcentual en que aumenta la humedad relativa.

En general, si f es una función de dos variables x y y, suponga que *per se* permite que solo x varíe mientras se mantiene fija a y, por ejemplo $y = b$, donde b es una constante. En realidad se está considerando una función de una variable x, a saber $g(x) = f(x, b)$. Si g tiene una derivada en a, se llama **derivada parcial de f con respecto a x en (a, b)** y se denota con $f_x(a, b)$. Así,

1 $$f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{donde} \qquad g(x) = f(x, b)$$

Por la definición de una derivada, se tiene

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

de manera que la ecuación 1 se convierte en

2 $$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

De igual forma, **la derivada parcial de f con respecto a y en (a, b)**, denotada por $f_y(a, b)$, se obtiene manteniendo fija a x ($x = a$) y determinando la derivada ordinaria en b de la función $G(y) = f(a, y)$:

3 $$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Con esta notación para las derivadas parciales se puede escribir las razones de cambio del índice de calor I con respecto a la temperatura real T y la humedad relativa H cuando $T = 96$ °F y $H = 70\%$ como sigue:

$$f_T(96, 70) \approx 3.75 \qquad f_H(96, 70) \approx 0.9$$

Si ahora concede que el punto (a, b) varía en las ecuaciones 2 y 3, f_x y f_y se convierten en funciones de dos variables.

4 Si f es una función de dos variables, sus **derivadas parciales** son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Hay muchas notaciones alternativas para derivadas parciales. Por ejemplo, en lugar de f_x se puede escribir f_1 o $D_1 f$ para indicar derivación con respecto a la *primera* variable, o $\partial f/\partial x$. Pero aquí $\partial f/\partial x$ no puede interpretarse como una razón de diferenciales.

Notaciones para derivadas parciales Si $z = f(x, y)$, se escribe

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcular derivadas parciales, todo lo que se tiene que hacer es recordar de la ecuación 1 que la derivada parcial con respecto a x es sencillamente la derivada *ordinaria* de la función g de una variable que se obtiene manteniendo fija y. Así se tiene la regla siguiente.

Regla para determinar derivadas parciales de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, considere a y como una constante y derive $f(x, y)$ con respecto a x.

2. Para determinar f_y, considere a x como una constante y derive $f(x, y)$ con respecto a y.

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.

SOLUCIÓN Manteniendo constante a y y derivando con respecto a x, se obtiene

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

de manera que

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Manteniendo constante a x y derivando con respecto a y, se obtiene

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

■

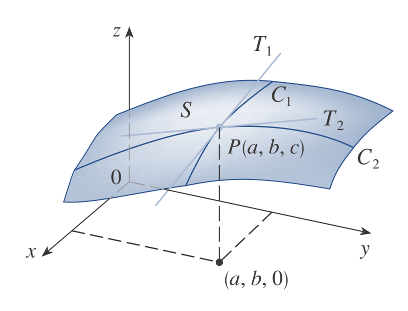


FIGURA 1
Las derivadas parciales de f en (a, b) son las pendientes de las tangentes a C_1 y C_2.

Interpretaciones de las derivadas parciales

Para dar una interpretación geométrica de las derivadas parciales, recuerde que la ecuación $z = f(x, y)$ representa una superficie S (la gráfica de f). Si $f(a,b) = c$, entonces el punto $P(a, b, c)$ está en S. Fijando $y = b$, restrinja su atención a la curva C_1 en la que el plano vertical $y = b$ interseca S. (En otras palabras, C_1 es la traza de S en el plano $y = b$.) De igual manera, el plano vertical $x = a$ interseca S en una curva C_2. Ambas curvas C_1 y C_2 pasan por el punto P. (Véase la figura 1.)

Nótese que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x, b)$, así que la pendiente de su tangente T_1 en P es $g'(a) = f_x(a, b)$. La curva C_2 es la gráfica de la función $G(y) = f(a, y)$, de manera que la pendiente de su tangente T_2 en P es $G'(b) = f_y(a, b)$.

Así, las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ pueden interpretarse geométricamente como las pendientes de las rectas tangentes en $P(a, b, c)$ a las trazas C_1 y C_2 en los planos $y = b$ y $x = a$.

Como se vio en el caso de la función del índice de calor, las derivadas parciales también pueden interpretarse como *razones de cambio*. Si $z = f(x, y)$, entonces $\partial z/\partial x$ representa la razón de cambio de z con respecto a x cuando y es fija. De igual manera, $\partial z/\partial y$ representa la razón de cambio de z con respecto a y cuando x es fija.

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, encuentre $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$ e interprete estos números como pendientes.

SOLUCIÓN Tiene

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$

$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

La gráfica de f es el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano vertical $y = 1$ la interseca en la parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Al igual que en el análisis precedente, se llama C_1 en la figura 2.) La pendiente de la recta tangente a esta parábola en el punto $(1, 1, 1)$ es $f_x(1, 1) = -2$. De igual forma, la curva C_2 en la que el plano $x = 1$ interseca el paraboloide es la parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$ y la pendiente de la recta tangente en $(1, 1, 1)$ es $f_y(1, 1) = -4$. (Véase la figura 3.)

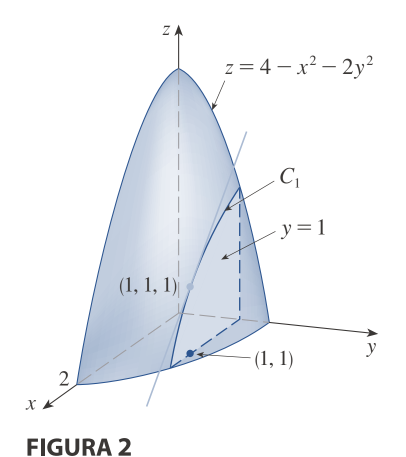


FIGURA 2

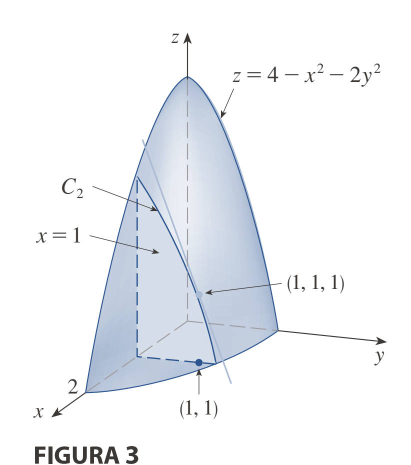


FIGURA 3 ■

La figura 4 es una contraparte dibujada en computadora de la figura 2. La parte (a) muestra el plano $y = 1$ que interseca la superficie para formar la curva C_1 y la parte (b) muestra C_1 y T_1. [Se han usado las ecuaciones vectoriales $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ para C_1 y $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ para T_1.] De igual modo, la figura 5 corresponde a la figura 3.

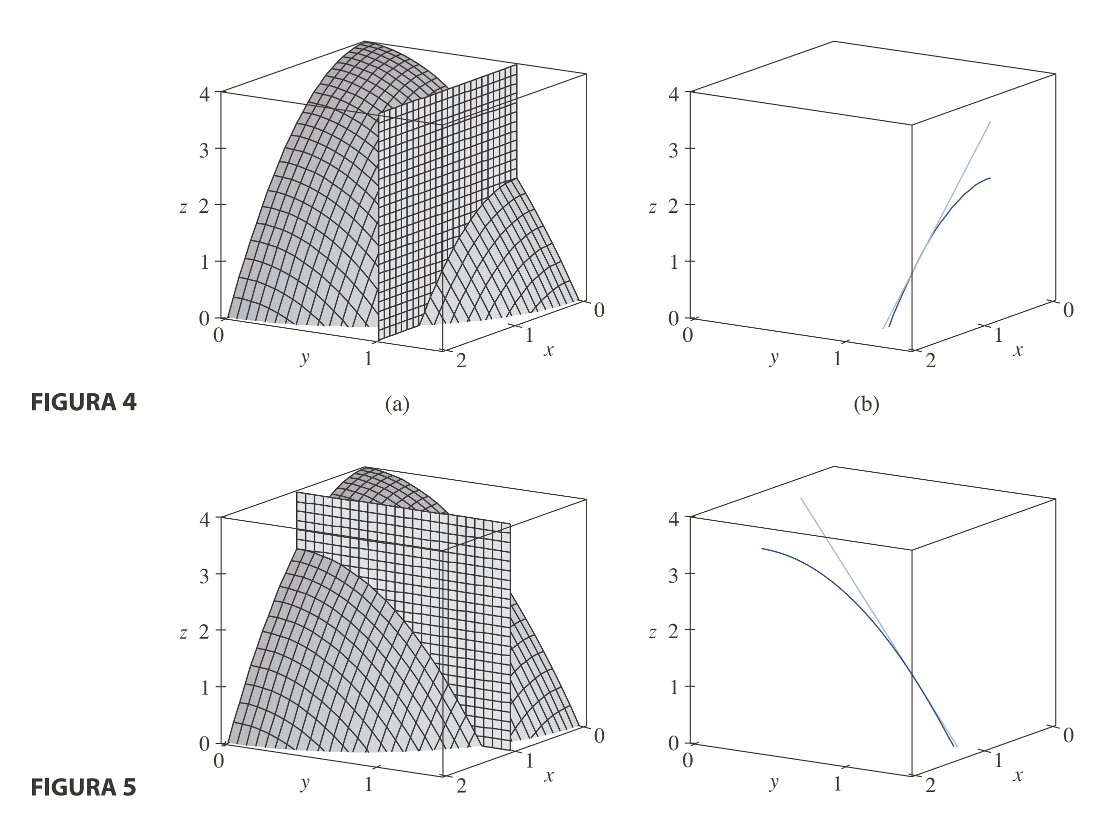


FIGURA 4

FIGURA 5

EJEMPLO 3 En el ejercicio 14.1.39 se definió el índice de masa corporal de una persona como

$$B(m, h) = \frac{m}{h^2}$$

Calcule las derivadas parciales de B para un joven con $m = 64$ kg y $h = 1.68$ m e interprételas.

SOLUCIÓN Considerando a h como una constante, vea que la derivada parcial con respecto a m es

$$\frac{\partial B}{\partial m}(m, h) = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{m}{h^2}\right) = \frac{1}{h^2}$$

así que
$$\frac{\partial B}{\partial m}(64, 1.68) = \frac{1}{(1.68)^2} \approx 0.35 \text{ (kg/m}^2\text{)/kg}$$

Este es el índice al que aumenta el IMC de este hombre con respecto a su peso cuando pesa 64 kg y su altura es de 1.68 m. Así, si su peso aumenta en una cantidad reducida, un kilogramo por ejemplo, y su altura se mantiene sin cambios, su IMC aumentará alrededor de 0.35.

Considere ahora a m como constante. La derivada parcial con respecto a h es

$$\frac{\partial B}{\partial h}(m, h) = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{m}{h^2}\right) = m\left(-\frac{2}{h^3}\right) = -\frac{2m}{h^3}$$

así que
$$\frac{\partial B}{\partial h}(64, 1.68) = -\frac{2 \cdot 64}{(1.68)^3} \approx -27\ (\text{kg/m}^2)/\text{m}$$

Este es el índice al que aumenta el IMC de este hombre con respecto a su altura cuando pesa 64 kg y su altura es de 1.68 m. Así, si este hombre sigue creciendo y su peso se mantiene sin cambios mientras su altura se incrementa en una cantidad reducida, por decir 1 cm, su IMC *decrecerá* alrededor de 27(0.01) = 0.27. ■

EJEMPLO 4 Si $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUCIÓN Usando la regla de la cadena para funciones de una variable, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}$$ ■

Algunos programas de computación pueden trazar superficies definidas por ecuaciones implícitas en tres variables. La figura 6 muestra un diagrama de ese tipo de la superficie definida por la ecuación del ejemplo 5.



FIGURA 6

EJEMPLO 5 Determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si z es implícitamente definida como una función de x y y por la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

SOLUCIÓN Para determinar $\partial z/\partial x$, se deriva implícitamente con respecto a x, teniendo el cuidado de tratar a y como constante:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si se despeja $\partial z/\partial x$ en esta ecuación se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

De igual forma, la derivación implícita con respecto a y da

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$ ■

Funciones de más de dos variables

Las derivadas parciales también pueden definirse para funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables x, y y z, su derivada parcial con respecto a x se define como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

y se determina considerando a y y a z como constantes y derivando $f(x, y, z)$ con respecto a x. Si $w = f(x, y, z)$, entonces $f_x = \partial w/\partial x$ puede interpretarse como la razón de cambio



de w con respecto a x cuando y y z se mantienen fijas. Pero no se puede interpretar esto geométricamente, porque la gráfica de f reside en el espacio tetradimensional.

En general, si u es una función de n variables, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, su derivada parcial con respecto a la variable de i-ésima x_i, es

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

y también se escribe

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

EJEMPLO 6 Determine f_x, f_y, y f_z si $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

SOLUCIÓN Manteniendo constantes a y y z y derivando con respecto a x se tiene

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

De igual manera, $\quad f_y = xe^{xy} \ln z \quad$ y $\quad f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$ ■

Derivadas de orden superior

Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales f_x y f_y también son funciones de dos variables, así que se pueden considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, y $(f_y)_y$, llamadas **segundas derivadas parciales** de f. Si $z = f(x, y)$, se usa la notación siguiente:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Así, la notación f_{xy} (o $\partial^2 f/\partial y\, \partial x$) significa que primero se deriva con respecto a x y después con respecto a y, mientras que al calcular f_{yx} el orden se invierte.

EJEMPLO 7 Determine las segundas derivadas parciales de

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 se encontró que

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2 y^2 - 4y$$

Por tanto,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y^2 - 4y) = 6x^2 y - 4$$ ■

La figura 7 muestra la gráfica de la función f del ejemplo 7 y las gráficas de sus derivadas parciales de primer y segundo orden para $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Nótese que estas gráficas son congruentes con nuestras interpretaciones de f_x y f_y como pendientes de las rectas tangentes a las trazas de la gráfica de f. Por ejemplo, la gráfica de f decrece si se parte de $(0, -2)$ y se mueve en la dirección de x positiva. Esto se refleja en los valores negativos de f_x. Usted debería comparar las gráficas de f_{yx} y f_{yy} con la gráfica de f_y para ver las relaciones.

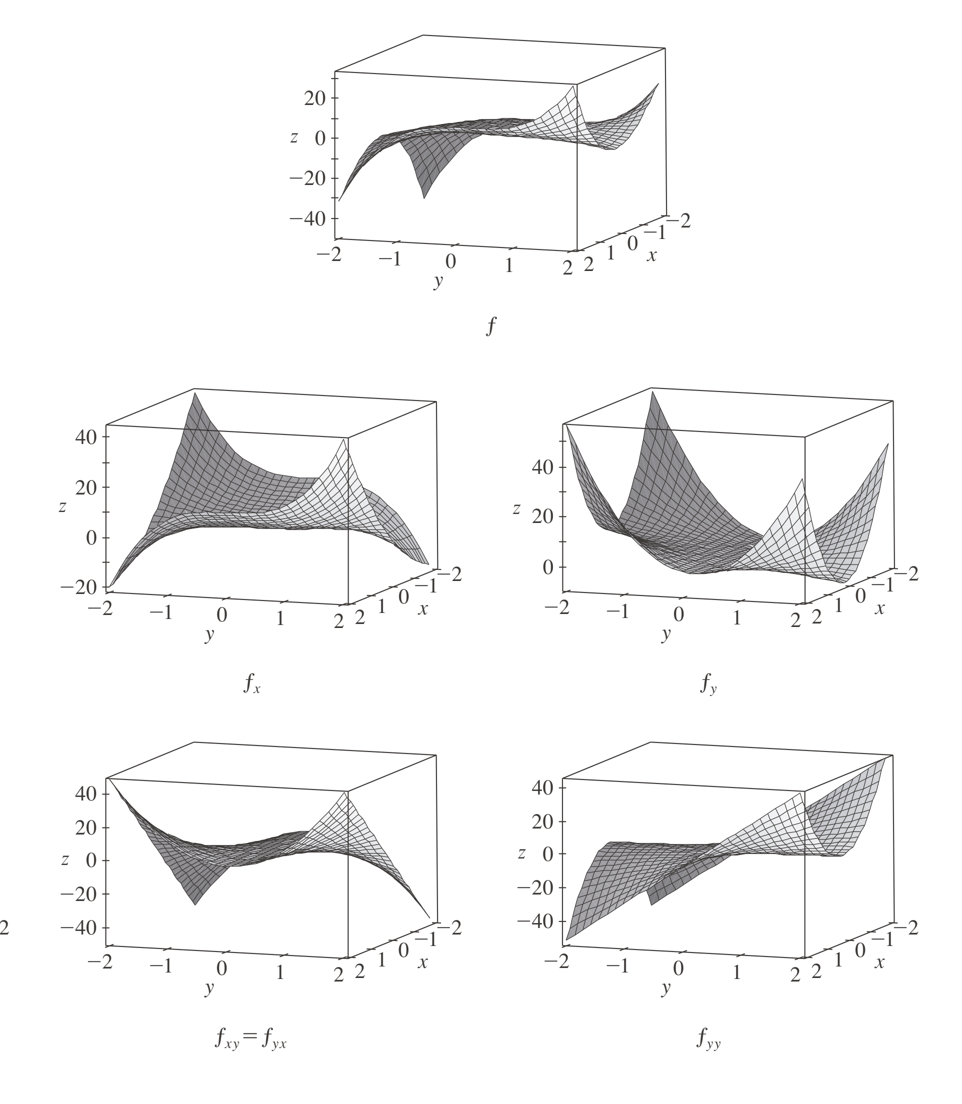


FIGURA 7

Obsérvese que $f_{xy} = f_{yx}$ en el ejemplo 7. Esto no es mera coincidencia. Resulta que las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales para la mayoría de las funciones que se encuentran en la práctica. El teorema siguiente, descubierto por el matemático francés Alexis Clairaut (1713-1765), establece condiciones bajo las cuales puede afirmarse que $f_{xy} = f_{yx}$. La comprobación se encuentra en el apéndice F.

Clairaut
Alexis Clairaut fue un niño prodigio en matemáticas: leyó el libro de texto de cálculo de L´Hôpital cuando tenía diez años y presentó un trabajo sobre geometría a la Academia Francesa de Ciencias cuando tenía 13. A los 18 publicó Recherches sur les courbes à double courbure, el primer tratado sistemático de geometría analítica tridimensional, el cual incluía el cálculo de curvas en el espacio.

Teorema de Clairaut Suponga que f es definida en un disco D que contiene el punto (a, b). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son ambas continuas en D, entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Derivadas parciales de orden 3 o superior también pueden definirse. Por ejemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

y usando el teorema de Clairaut puede demostrarse que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ si estas funciones son continuas.

EJEMPLO 8 Calcule f_{xxyz} si $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(3x + yz)$.

SOLUCIÓN

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$

$$f_{xx} = -9\operatorname{sen}(3x + yz)$$

$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$

$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\operatorname{sen}(3x + yz)$$

■

Ecuaciones diferenciales parciales

Las derivadas parciales ocurren en *ecuaciones diferenciales parciales* que expresan ciertas leyes físicas. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama **ecuación de Laplace**, en honor a Pierre Laplace (1749-1827). Las soluciones de esta ecuación se llaman **funciones armónicas**; desempeñan un papel en problemas de conducción de calor, circulación de fluidos y potencial eléctrico.

EJEMPLO 9 Demuestre que la función $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ es una solución de la ecuación de Laplace.

SOLUCIÓN Primero se calculan las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

$$u_x = e^x \operatorname{sen} y \qquad u_y = e^x \cos y$$

$$u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y \qquad u_{yy} = -e^x \operatorname{sen} y$$

De esta manera,
$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$$

Por tanto, u satisface la ecuación de Laplace. ■

La **ecuación de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

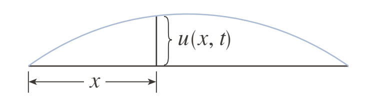


FIGURA 8

describe el movimiento en forma de onda, por ejemplo, una ola marina, una onda sonora, una onda luminosa o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante. Es decir, si $u(x, t)$ representa el desplazamiento de una cuerda vibrante de violín en el momento t y a una distancia x de un extremo de la cuerda (como en la figura 8), entonces $u(x, t)$ satisface la ecuación de onda. Aquí la constante a depende de la densidad de la cuerda y la tensión en ella.

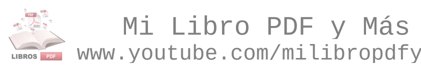
EJEMPLO 10 Verifique que la función $u(x, t) = \operatorname{sen}(x - at)$ satisface la ecuación de onda.

SOLUCIÓN

$$u_x = \cos(x - at) \qquad u_t = -a\cos(x - at)$$

$$u_{xx} = -\operatorname{sen}(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2 \operatorname{sen}(x - at) = a^2 u_{xx}$$

Así, u satisface la ecuación de onda. ■



Las ecuaciones diferenciales parciales que implican funciones de tres variables también son muy importantes en las ciencias y la ingeniería. La ecuación tridimensional de Laplace es

5
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

y uno de los campos en los que ocurre es el de la geofísica. Si $u(x, y, z)$ representa la fuerza de campo magnético en la posición (x, y, z), satisface la ecuación 5. La fuerza del campo magnético indica la distribución de minerales ricos en hierro y refleja diferentes tipos de rocas y la ubicación de fallas. La figura 9 muestra un mapa del contorno del campo magnético de la Tierra registrado con un magnetómetro desde una aeronave que volaba a 200 m sobre la superficie. Este mapa de contorno ha sido mejorado con codificación de color de las regiones entre las curvas de nivel.

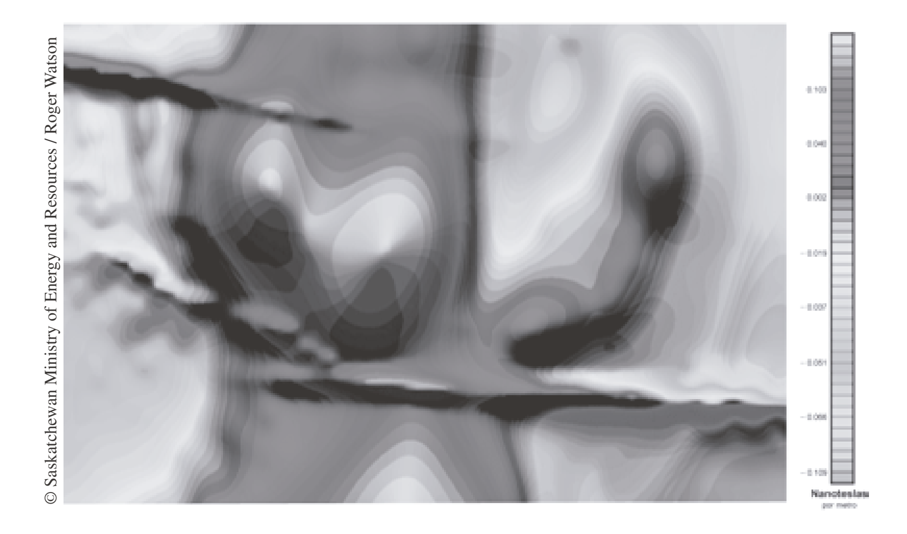


FIGURA 9
Fuerza del campo magnético de la Tierra

La figura 10 muestra un mapa de contorno para la derivada parcial de segundo orden de u en la dirección vertical, es decir u_{zz}. Resulta que los valores de las derivadas parciales u_{xx} y u_{yy} son relativamente fáciles de medir a partir de un mapa del campo magnético. Entonces, los valores de u_{zz} pueden calcularse con base en la ecuación de Laplace (5).

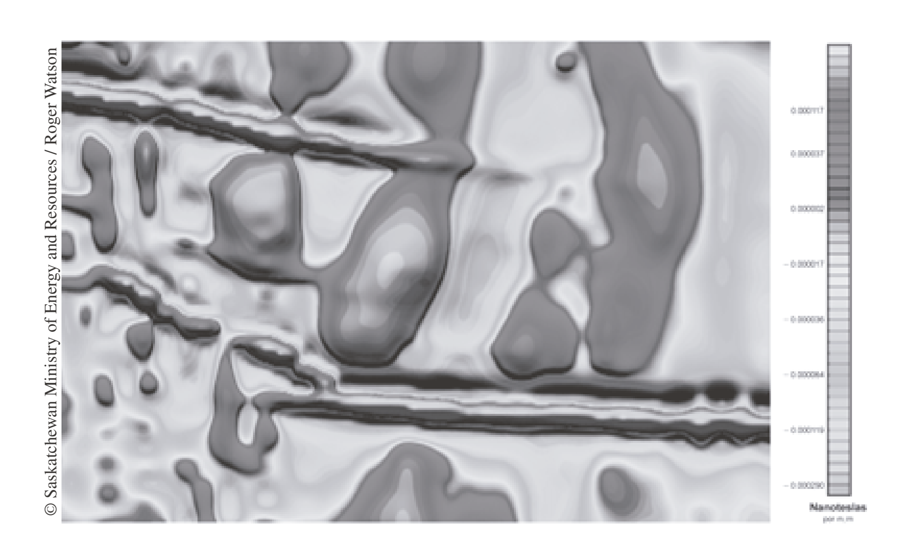


FIGURA 10
Segunda derivada vertical del campo magnético

La función de producción de Cobb-Douglas

En el ejemplo 14.1.3 se describió el trabajo de Cobb y Douglas de modelar la producción total P de un sistema económico como una función de la cantidad de mano de obra L y la inversión de capital K. Aquí se usarán derivadas parciales para demostrar cómo la forma particular de su modelo se desprende de ciertos supuestos que ellos hicieron sobre la economía.

Si la función de producción se denota con $P = P(L, K)$, la derivada parcial $\partial P/\partial L$ es la razón en la que cambia la producción con respecto a la cantidad de mano de obra. Los economistas lo llaman producción marginal con respecto a la mano de obra, o **productividad marginal del trabajo**. De igual manera, la derivada parcial $\partial P/\partial K$ es la razón de cambio de la producción con respecto al capital y se llama **productividad marginal del capital**. En estos términos, los supuestos que hicieron Cobb y Douglas pueden enunciarse como sigue.

(i) Si el trabajo o el capital desaparece, lo mismo ocurrirá con la producción.
(ii) La productividad marginal del trabajo es proporcional a la cantidad de producción por unidad de trabajo.
(iii) La productividad marginal del capital es proporcional a la cantidad de producción por unidad de capital.

Como la producción por unidad de trabajo es P/L, el supuesto (ii) indica que

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguna constante α. Si se mantiene constante a K ($K = K_0$), su ecuación diferencial parcial se convierte en una ecuación diferencial ordinaria:

6 $$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

Si esa ecuación diferencial separable se resuelve con los métodos de la sección 9.3 (véase también el ejercicio 85), se obtiene

7 $$P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$$

Nótese que se ha escrito la constante C_1 como una función de K_0, porque podría depender del valor de K_0.

De igual forma, el supuesto (iii) indica que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

y se puede resolver esta ecuación diferencial para obtener

8 $$P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta}$$

Al comparar las ecuaciones 7 y 8 se tiene

9 $$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$$

donde b es una constante independiente tanto de L como de K. El supuesto (i) muestra que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Adviértase en la ecuación 9 que si tanto el trabajo como el capital aumentan en un factor m, entonces

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, entonces $P(mL, mK) = mP(L, K)$, lo que significa que la producción también aumenta en un factor de m. Por eso Cobb y Douglas supusieron que $\alpha + \beta = 1$, y por tanto

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Esta es la función de producción de Cobb-Douglas que se explicó en la sección 14.1.

14.3 EJERCICIOS

1. La temperatura T (en °C) en una localidad del hemisferio norte depende de la longitud x, la latitud y y el tiempo t, así que se puede escribir $T = f(x, y, t)$. Mida el tiempo en horas desde principios de enero.

(a) ¿Qué significan las derivadas parciales $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ y $\partial T/\partial t$?

(b) Honolulú tiene una longitud de 158 °W y una latitud de 21 °N. Suponga que a las nueve de la mañana del 1º de enero el viento sopla aire caliente hacia el noreste, de manera que el aire al oeste y el sur es templado y el aire del norte y el este es fresco. ¿Se esperaría que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$, y $f_t(158, 21, 9)$ fueran positivas o negativas? Explique su respuesta.

2. Al principio de esta sección se analizó la función $I = f(T, H)$, donde I es el humidex, T la temperatura y H la humedad relativa. Use la tabla 1 para estimar $f_T(34, 75)$ y $f_H(34, 75)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

3. El índice de viento-frío W es la temperatura percibida cuando la temperatura real es T y la velocidad del viento v, así que se puede escribir $W = f(T, v)$. La tabla de valores siguiente es un fragmento de la tabla 1 de la sección 14.1.

Velocidad del viento (km/h); Temperatura real (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

(a) Estime los valores de $f_T(-15, 30)$ y $f_v(-15, 30)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

(b) En general, ¿qué puede decirse sobre los signos de $\partial W/\partial T$ y $\partial W/\partial v$?

(c) ¿Cuál será el valor del límite siguiente?

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. La altura de las olas h en mar abierto depende de la velocidad v del viento y el tiempo t durante el cual el viento ha soplado a esa velocidad. Los valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en metros en la tabla siguiente.

Duración (horas); Velocidad del viento (km/h)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
30	1.2	1.3	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6
40	1.5	2.2	2.4	2.5	2.7	2.8	2.8
60	2.8	4.0	4.9	5.2	5.5	5.8	5.9
80	4.3	6.4	7.7	8.6	9.5	10.1	10.2
100	5.8	8.9	11.0	12.2	13.8	14.7	15.3
120	7.4	11.3	14.4	16.6	19.0	20.5	21.1

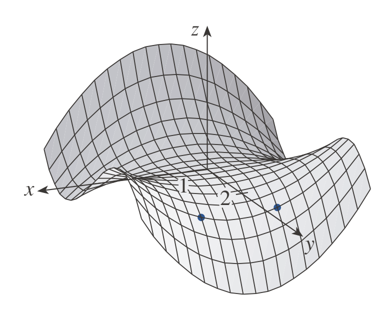
(a) ¿Qué significan las derivadas parciales $\partial h/\partial v$ y $\partial h/\partial t$?

(b) Estime los valores de $f_v(80, 15)$ y $f_t(80, 15)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

(c) ¿Cuál será el valor del límite siguiente?

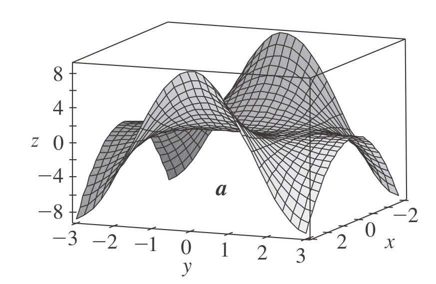
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

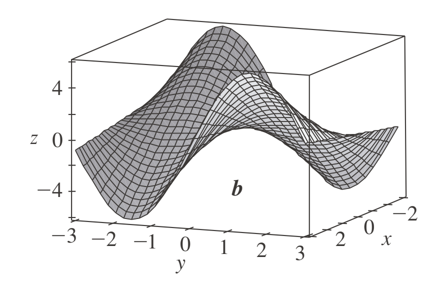
5-8 Determine los signos de las derivadas parciales para la función f de la gráfica siguiente.

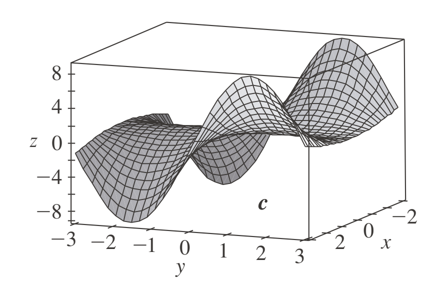


5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$
6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$
7. (a) $f_{xx}(-1, 2)$ (b) $f_{yy}(-1, 2)$
8. (a) $f_{xy}(1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

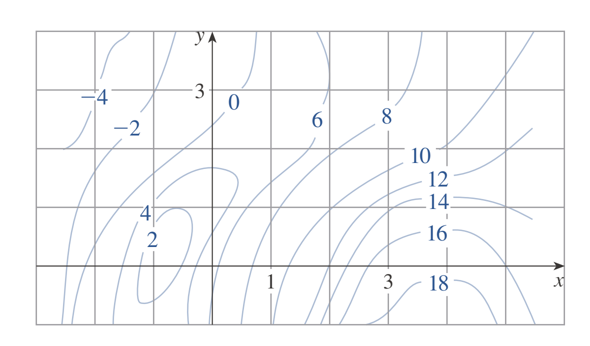
9. Las superficies a, b y c son gráficas de una función f y sus derivadas parciales f_x y f_y. Identifique cada superficie y argumente sus decisiones.







10. Con el mapa de contorno para una función f siguiente estime $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.



11. Si $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, encuentre $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$ e interprete estos números como pendientes. Ilustre con un dibujo a mano o un diagrama en computadora.

12. Si $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, encuentre $f_x(1, 0)$ y $f_y(1, 0)$ e interprete estos números como pendientes. Ilustre con un dibujo a mano o un diagrama en computadora.

13-14 Determine f_x y f_y y grafique f, f_x y f_y con dominios y puntos de vista que le permitan ver las relaciones entre ellas.

13. $f(x, y) = x^2y^3$
14. $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$

15-40 Determine las primeras derivadas parciales de la función.

15. $f(x, y) = x^4 + 5xy^3$
16. $f(x, y) = x^2y - 3y^4$
17. $f(x, t) = t^2e^{-x}$
18. $f(x, t) = \sqrt{3x + 4t}$
19. $z = \ln(x + t^2)$
20. $z = x\,\text{sen}(xy)$
21. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$
22. $f(x, t) = \sqrt{x}\ln t$
23. $f(x, t) = e^{-t}\cos \pi x$
24. $z = \tan xy$
25. $z = (2x + 3y)^{10}$
26. $f(x, t) = \arctan\left(x\sqrt{t}\right)$
27. $w = \text{sen}\,\alpha \cos \beta$
28. $f(x, y) = x^y$
29. $F(x, y) = \displaystyle\int_y^x \cos(e^t)\,dt$
30. $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\,dt$
31. $f(x, y, z) = x^3yz^2 + 2yz$
32. $f(x, y, z) = xy^2e^{-xz}$
33. $w = \ln(x + 2y + 3z)$
34. $w = y\tan(x + 2z)$
35. $u = xy\,\text{sen}^{-1}(yz)$
36. $u = x^{y/z}$
37. $h(x, y, z, t) = x^2y\cos(z/t)$
38. $\phi(x, y, z, t) = \dfrac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta t^2}$
39. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
40. $u = \text{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

41-44 Determine la derivada parcial indicada.

41. $R(s, t) = te^{s/t}$; $R_t(0, 1)$

42. $f(x, y) = y \operatorname{sen}^{-1}(xy)$; $f_y\left(1, \frac{1}{2}\right)$

43. $f(x, y, z) = \ln \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $f_y(1, 2, 2)$

44. $f(x, y, z) = x^{yz}$; $f_z(e, 1, 0)$

45-46 Use la definición de derivadas parciales como límites (4) para hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

45. $f(x, y) = xy^2 - x^3y$

46. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

47-50 Use la derivación implícita para determinar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$

47. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

48. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

49. $e^z = xyz$

50. $yz + x \ln y = z^2$

51-52 Determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

51. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

52. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$

(c) $z = f(x/y)$

53-58 Determine todas las segundas derivadas parciales.

53. $f(x, y) = x^4y - 2x^3y^2$

54. $f(x, y) = \ln(ax + by)$

55. $z = \dfrac{y}{2x + 3y}$

56. $T = e^{-2r} \cos \theta$

57. $v = \operatorname{sen}(s^2 - t^2)$

58. $w = \sqrt{1 + uv^2}$

59-62 Verifique que la conclusión del teorema de Clairaut es válida, es decir que $u_{xy} = u_{yx}$.

59. $u = x^4y^3 - y^4$

60. $u = e^{xy} \operatorname{sen} y$

61. $u = \cos(x^2y)$

62. $u = \ln(x + 2y)$

63-70 Determine las derivadas parciales indicadas.

63. $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$; f_{xxx}, f_{xyx}

64. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y)$; f_{yxy}

65. $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$; f_{xyz}

66. $g(r, s, t) = e^r \operatorname{sen}(st)$; g_{rst}

67. $W = \sqrt{u + v^2}$; $\dfrac{\partial^3 W}{\partial u^2 \partial v}$

68. $V = \ln(r + s^2 + t^3)$; $\dfrac{\partial^3 V}{\partial r \, \partial s \, \partial t}$

69. $u = e^{r\theta} \operatorname{sen} \theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$

70. $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u \, \partial v \, \partial w}$

71. Si $f(x, y, z) = xy^2z^3 + \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{z}\right)$, halle f_{xzy}. [*Sugerencia*: ¿cuál orden de derivación es el más fácil?]

72. Si $g(x, y, z) = \sqrt{1 + xz} + \sqrt{1 - xy}$, halle g_{xyz}. [*Sugerencia*: use un orden de derivación diferente para cada término.]

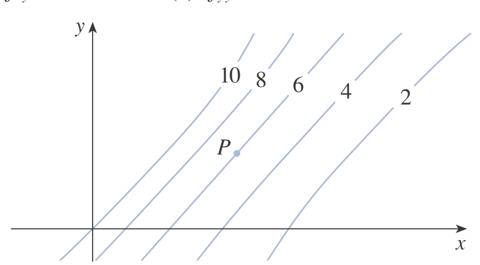
73. Use la tabla de valores de $f(x, y)$ para estimar los valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2.2)$, y $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1.8	2.0	2.2
2.5	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.5	20.0	22.4	26.1

74. Se muestran curvas de nivel para una función f. Determine si las derivadas parciales siguientes son positivas o negativas en el punto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}

(d) f_{xy} (e) f_{yy}



75. Verifique que la función $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$ es una solución de la *ecuación de conducción de calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

76. Determine si cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(a) $u = x^2 + y^2$ (b) $u = x^2 - y^2$

(c) $u = x^3 + 3xy^2$ (d) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

(e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$

(f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

77. Verifique que la función $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es una solución de la ecuación tridimensional de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

78. Demuestre que cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

(a) $u = \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(akt)$ (b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$

(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$

(d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

79. Si f y g son funciones dos veces derivables de una variable, demuestre que la función

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda dada en el ejercicio 78.

80. Si $u = e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}$, donde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

81. La *ecuación de difusión*

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

donde D es una constante positiva, describe la difusión de calor a través de un sólido, o la concentración de un contaminante en el momento t a una distancia x de la fuente de contaminación, o la invasión por una especie extraña de un nuevo hábitat. Verifique que la función

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\,e^{-x^2/(4Dt)}$$

es una solución de la ecuación de difusión.

82. La temperatura en un punto (x, y) en una placa metálica plana está dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, donde T se mide en °C y x, y en metros. Encuentre la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en el punto (2, 1) en (a) la dirección de x y (b) la dirección de y.

83. La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2, R_3 conectadas en un circuito eléctrico paralelo está dada por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

84. Demuestre que la función de producción de Cobb-Douglas $P - bL^\alpha K^\beta$ satisface la ecuación

$$L\,\frac{\partial P}{\partial L} + K\,\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

85. Demuestre que la función de producción de Cobb-Douglas satisface $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\,\frac{P}{L}$$

(Véase la ecuación 6.)

86. Cobb y Douglas usaron la ecuación $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ para modelar la economía estadounidense de 1899 a 1922, donde L es la cantidad de mano de obra y K la cantidad de capital. (Véase el ejemplo 14.1.3.)

(a) Calcule P_L y P_K.

(b) Determine la productividad marginal del trabajo y la productividad marginal de capital en el año 1920, cuando $L = 194$ y $K = 407$ (en comparación con los valores asignados $L = 100$ y $K = 100$ en 1899). Interprete los resultados.

(c) En el año 1920, ¿qué habría beneficiado más a la producción: un aumento en la inversión de capital o un aumento en el gasto de mano de obra?

87. La *ecuación de Van der Waals* para n moles de un gas es

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión, V el volumen y T la temperatura del gas. La constante R es la constante de gas universal y a y b son constantes positivas características de un gas particular. Calcule $\partial T/\partial P$ y $\partial P/\partial V$.

88. La ley del gas para una masa fija m de un gas ideal a temperatura T, presión P y volumen absolutos V es $PV = mRT$, donde R es la constante de gas. Demuestre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\,\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

89. Para el gas ideal del ejercicio 88, demuestre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\,\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

90. El índice de viento-frío es modelado por la función

$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

donde T es la temperatura (°C) y v la velocidad del viento (km/h). Cuando $T = -15$ °C y $v = 30$ km/h, ¿cuánto se esperaría que se reduzca la temperatura aparente W si la temperatura real disminuye 1 °C? ¿Y si la velocidad del viento aumenta 1 km/h?

91. Un modelo para el área de un cuerpo humano está dado por la función

$$S = f(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$$

donde w es el peso en libras, h la altura en pulgadas y S se mide en pies cuadrados. Calcule e interprete las derivadas parciales.

(a) $\dfrac{\partial S}{\partial w}(160, 70)$ (b) $\dfrac{\partial S}{\partial h}(160, 70)$

92. Una de las leyes de Poiseuille establece que la resistencia a la circulación de la sangre por una arteria es

$$R = C\,\frac{L}{r^4}$$

donde L y r son la longitud y radio de la arteria y C una constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre. Calcule $\partial R/\partial L$ y $\partial R/\partial r$ e interprételas.

93. En el proyecto de la página 344 se expresa la fuerza que necesita un ave durante su modo de aleteo como

$$P(v, x, m) = Av^3 + \frac{B(mg/x)^2}{v}$$

donde A y B son constantes específicas de una especie de ave, v la velocidad del ave, m la masa del ave y x la fracción del tiempo de vuelo pasada utilizado en modo de aleteo. Calcule $\partial P/\partial v$, $\partial P/\partial x$, y $\partial P/\partial m$ e interprételas.

94. La energía promedio E (en kcal) que necesita un lagarto para caminar o correr una distancia de un kilómetro ha sido modelada por la ecuación

$$E(m, v) = 2.65m^{0.66} + \frac{3.5m^{0.75}}{v}$$

donde m es la masa corporal del lagarto en gramos y v su velocidad en km/h. Calcule $E_m(400, 8)$ y $E_v(400, 8)$ e interprete sus respuestas.
Fuente: C. Robbins, *Wildlife Feeding and Nutrition*, 2a. ed. (San Diego, Academic Press, 1993).

95. La energía cinética de un cuerpo con masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

96. Si a, b, c son los lados de un triángulo y A, B, C los ángulos opuestos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$, $\partial A/\partial c$ por derivación implícita de la ley de los cosenos.

97. Se dice que hay una función f cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y$ y $f_y(x, y) = 3x - y$. ¿Debería creerlo?

98. El paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ interseca el plano $x = 1$ en una parábola. Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a esta parábola en el punto $(1, 2, -4)$. Use una computadora para graficar el paraboloide, la parábola y la recta tangente en la misma pantalla.

99. El elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ interseca el plano $y = 2$ en una elipse. Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a esta elipse en el punto $(1, 2, 2)$.

100. En un estudio de penetración de la escarcha se descubrió que la temperatura T en el tiempo t (medido en días) a una profundidad x (medida en metros) puede modelarse con la función

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

donde $\omega = 2\pi/365$ y λ es una constante positiva.
(a) Encuentre $\partial T/\partial x$. ¿Cuál es su significado físico?
(b) Encuentre $\partial T/\partial t$. ¿Cuál es su significado físico?
(c) Demuestre que T satisface la ecuación de calor $T_t = kT_{xx}$ para cierta constante k.
(d) Si $\lambda = 0.2$, $T_0 = 0$, y $T_1 = 10$, use una computadora para graficar $T(x, t)$.
(e) ¿Cuál es el significado físico del término $-\lambda x$ en la expresión $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$?

101. Use el teorema de Clairaut para demostrar que si las derivadas parciales de tercer orden de f son continuas, entonces

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

102. (a) ¿Cuántas derivadas parciales de n-ésimo orden tiene una función de dos variables?
(b) Si todas esas derivadas parciales son continuas, ¿cuántas de ellas pueden ser distintas?
(c) Responda la pregunta del inciso (a) para una función de tres variables.

103. Si

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2} e^{\operatorname{sen}(x^2 y)}$$

determine $f_x(1, 0)$. [*Sugerencia*: en lugar de determinar primero $f_x(x, y)$, advierta que es más fácil usar la ecuación 1 o la ecuación 2.]

104. Si $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

105. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Use una computadora para graficar f.
(b) Determine $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ cuando $(x, y) \neq (0, 0)$.
(c) Determine $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ usando las ecuaciones 2 y 3.
(d) Demuestre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ y $f_{yx}(0, 0) = 1$.
SAC (e) ¿El resultado del inciso (d) contradice el teorema de Clairaut? Use gráficas de f_{xy} y f_{yx} para ilustrar su respuesta.

14.4 Planos tangentes y aproximaciones lineales

Una de las ideas más importantes en el cálculo de una variable es que al acercarse a un punto en la gráfica de una función derivable, la gráfica se vuelve indistinguible de su recta tangente y se puede aproximar la función mediante una función lineal. (Véase la sección 3.10.) Aquí se desarrollarán ideas similares en tres dimensiones. Al acercarse a un punto en una superficie que es la gráfica de una función derivable de dos variables, la superficie parece cada vez más un plano (su plano tangente) y se puede aproximar la función mediante una función lineal de dos variables. También se prolonga esta idea de una diferencial a funciones de dos o más variables.

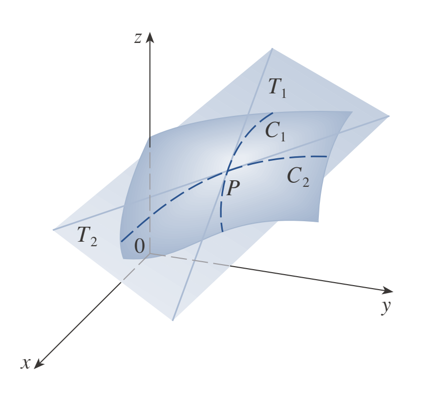


FIGURA 1
El plano tangente contiene las rectas tangentes T_1 y T_2 .

Planos tangentes

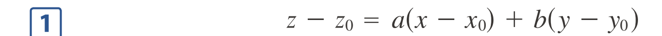
Suponga que una superficie S tiene la ecuación $z = f(x, y)$, donde f tiene primeras derivadas parciales continuas y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Como en la sección precedente, sean C_1 y C_2 las curvas obtenidas de la intersección de los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con la superficie S. Así, el punto P reside tanto en C_1 como en C_2. Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P. Entonces el **plano tangente** a la superficie S en el punto P se define como el plano que contiene a ambas rectas tangentes T_1 y T_2. (Véase la figura 1.)

En la sección 14.6 se verá que si C es cualquier otra curva que reside en la superficie S y pasa por P, su recta tangente en P también reside en el plano tangente. Por tanto, el plano tangente a S en P puede concebirse como compuesto por todas las posibles rectas tangentes en P a curvas que residen en S y pasan por P. El plano tangente en P es el plano que aproxima más certeramente la superficie S cerca del punto P.

Se sabe por la ecuación 12.5.7 que cualquier plano que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene una ecuación de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Al dividir esta ecuación entre C y conceder que $a = -A/C$ y $b = -B/C$, se puede escribir en la forma



1 $$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Si la ecuación 1 representa el plano tangente en P, su intersección con el plano $y = y_0$ debe ser la recta tangente T_1. La inclusión de $y = y_0$ en la ecuación 1 da

$$z - z_0 = a(x - x_0) \qquad \text{donde} \quad y = y_0$$

y se reconoce esta como la ecuación (en forma punto-pendiente) de una recta con pendiente a. Pero por la sección 14.3 se sabe que la pendiente de la tangente T_1 es $f_x(x_0, y_0)$. Por tanto, $a = f_x(x_0, y_0)$.

De igual forma, si se traslada $x = x_0$ en la ecuación 1 se obtiene $z - z_0 = b(y - y_0)$, lo que debe representar a la recta tangente T_2, así que $b = f_y(x_0, y_0)$.

Nótese la semejanza entre la ecuación de un plano tangente y la ecuación de una recta tangente:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

2 Suponga que f tiene derivadas parciales continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

EJEMPLO 1 Determine el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3).

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Entonces,

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$
$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Así, (2) da la ecuación del plano tangente en (1, 1, 3) como

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

o

$$z = 4x + 2y - 3$$

■

La figura 2(a) muestra el paraboloide elíptico y su plano tangente en (1, 1, 3) que se halla en el ejemplo 1. En las partes (b) y (c) se acerca al punto (1, 1, 3) restringiendo el



TEC Visual 14.4 muestra una animación de las figuras 2 y 3.

dominio de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que cuanto más se acerca, más plana parece la gráfica y más se asemeja a su plano tangente.

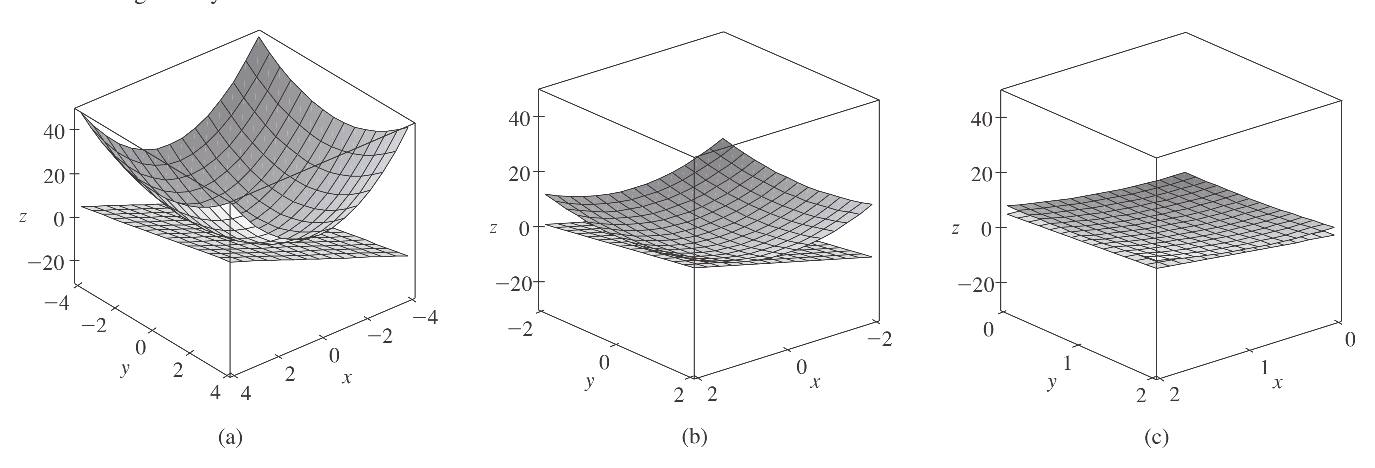
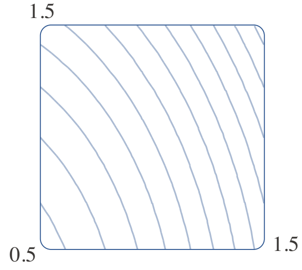
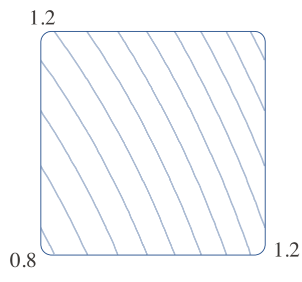


FIGURA 2 El paraboloide elíptico parece coincidir con su plano tangente cuando se acerca a (1, 1, 3).

En la figura 3 se corrobora esta impresión al acercarse al punto (1, 1) en un mapa de contorno de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Adviértase que cuanto más se acerca, las curvas de nivel se parecen cada vez más a rectas paralelas igualmente espaciadas, lo cual es característico de un plano.





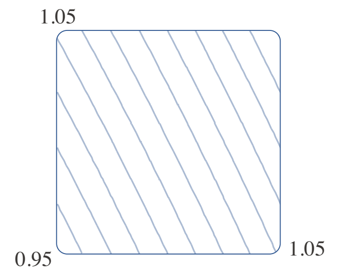


FIGURA 3 Acercamiento a (1, 1) en un mapa de contorno de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$

Aproximaciones lineales

En el ejemplo 1 se determinó que una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3) es $z = 4x + 2y - 3$. Por tanto, en vista de la evidencia visual en las figuras 2 y 3, la función lineal de dos variables

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

es una aproximación satisfactoria a $f(x, y)$ cuando (x, y) está cerca de (1, 1). La función L se llama *linealización* de f en (1, 1) y la aproximación

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

se llama *aproximación lineal* o *aproximación del plano tangente* de f en (1, 1).

Por ejemplo, en el punto (1.1, 0.95) la aproximación lineal da

$$f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3$$

lo cual está muy cerca del valor real de $f(1.1, 0.95) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$. Pero se toma un punto más alejado de (1, 1), como (2, 3), ya no se obtiene una aproximación satisfactoria. De hecho, $L(2, 3) = 11$, mientras que $f(2, 3) = 17$.

En general, se sabe por (2) que una ecuación del plano tangente a la gráfica de una función f de dos variables en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

La función lineal cuya gráfica es este plano tangente, a saber

$$\boxed{3} \qquad L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **linealización** de f en (a, b) y la aproximación

$$\boxed{4} \qquad f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **aproximación lineal** o **aproximación del plano tangente** de f en (a, b).

Se han definido planos tangentes para superficies $z = f(x, y)$, donde f tiene primeras derivadas parciales continuas. ¿Qué sucede si f_x y f_y no son continuas? La figura 4 presenta esa función; su ecuación es

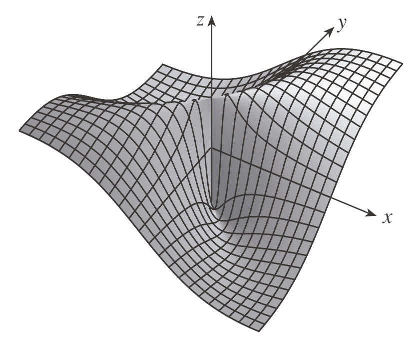


FIGURA 4

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$,
$f(0, 0) = 0$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se puede verificar (véase el ejercicio 46) que sus derivadas parciales existen en el origen y que, de hecho, $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$, pero que f_x y f_y no son continuas. La aproximación lineal sería $f(x, y) \approx 0$, pero $f(x, y) = \frac{1}{2}$ en todos los puntos en la recta $y = x$. Así, una función de dos variables puede desviarse pese a que sus dos derivadas parciales existan. Para eliminar este comportamiento, formule la idea de una función derivable de dos variables.

Recuérdese que para una función de una variable, $y = f(x)$, si x cambia de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

En el capítulo 3 se demostró que si f es derivable en a, entonces

Esta es la ecuación 3.4.7.

$$\boxed{5} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde } \varepsilon \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

Considérese ahora una función de dos variables, $z = f(x, y)$, y suponga que x cambia de a a $a + \Delta x$ y que y cambia de b a $b + \Delta y$. El **incremento** de z correspondiente es

$$\boxed{6} \qquad \Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Así, el incremento Δz representa el cambio de valor de f cuando (x, y) cambia de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Por analogía con (5), se define la derivabilidad de una función de dos variables como sigue.



7 Definición Si $z = f(x, y)$, f **es derivable en** (a, b) si Δz puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

La definición 7 establece que una función derivable es aquella para la que la aproximación lineal (4) es una aproximación satisfactoria cuando (x, y) está cerca de (a, b). Es decir, el plano tangente aproxima la gráfica de f muy cerca del punto de tangencia.



A veces es difícil usar la definición 7 directamente para comprobar la derivabilidad de una función, pero el teorema siguiente ofrece una condición cómoda suficiente para la derivabilidad.

El teorema 8 se demuestra en el apéndice F.

8 Teorema Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es derivable en (a, b).

EJEMPLO 2 Demuestre que $f(x, y) = xe^{xy}$ es derivable en (1, 0) y determine su linealización ahí. Luego úsela para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

La figura 5 muestra las gráficas de la función f y la linealización L usadas en el ejemplo 2.

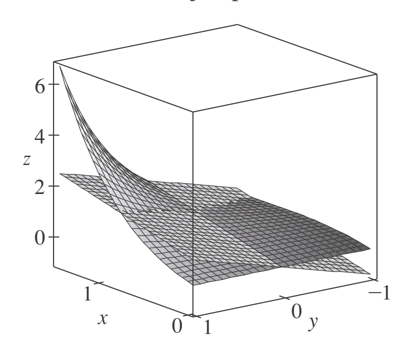


FIGURA 5

SOLUCIÓN Las derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$
$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Tanto f_x y como f_y son funciones continuas, así que f es derivable por el teorema 8. La linealización es

$$L(x, y) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0)$$
$$= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y$$

La correspondiente aproximación lineal es

$$xe^{xy} \approx x + y$$

así que
$$f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$$

Compare esto con el valor real de $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$. ■

EJEMPLO 3 Al principio de la sección 14.3 se analizó el humidex (temperatura percibida) I como una función de la temperatura real T y la humedad relativa H y se formuló la tabla de valores siguiente.

		Humedad relativa (%)								
	T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Temperatura real (°C)	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Determine una aproximación lineal para el humidex $I = f(T, H)$ cuando T está cerca de 30 °C y H de 60%. Úsela para estimar el humidex cuando la temperatura es de 31 °C y la humedad relativa de 62%.

SOLUCIÓN En la tabla se lee que $f(30, 60) = 38$. En la sección 14.3 se usaron los valores tabulares para estimar que $f_T(30, 60) \approx 1.75$ y $f_H(30, 60) \approx 0.3$. (Véase las páginas 912-913.) Así, la aproximación lineal es

$$f(T, H) \approx f(30, 60) + f_T(30, 60)(T - 30) + f_H(30, 60)(H - 60)$$
$$\approx 38 + 1.75(T - 30) + 0.3(H - 60)$$



En particular,

$$f(31, 62) \approx 38 + 1.75(1) + 0.3(2) = 40.35$$

Por tanto, cuando $T = 31$ °C y $H = 62\%$, el humidex es

$$I \approx 40.4\,°\text{C}$$

Diferenciales

Para una función derivable de una variable, $y = f(x)$, se define la diferencial dx como la variable independiente; es decir, dx puede tener el valor de cualquier número real. La diferencial de y se define entonces como

9 $$dy = f'(x)\, dx$$

(Véase la sección 3.10.) La figura 6 muestra la relación entre el incremento Δy y la diferencial dy: Δy representa el cambio de altura de la curva $y = f(x)$ y dy representa el cambio de altura de la recta tangente cuando x cambia por una cantidad $dx = \Delta x$.

Para una función derivable de dos variables, $z = f(x, y)$, se definen las **diferenciales** dx y dy como las variables independientes; es decir, pueden recibir cualquier valor. Entonces la **diferencial** dz, también llamada **diferencial total**, se define mediante

y
$y = f(x)$
Δy
dy
$dx = \Delta x$
0
a
$a + \Delta x$
x
recta tangente
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$

FIGURA 6

10 $$dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

(Compare con la ecuación 9.) A veces se usa la notación df en lugar de dz.

Si se toma $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$ de la ecuación 10, la diferencial de z es

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Así, en la notación de las diferenciales, la aproximación lineal (4) puede escribirse como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

La figura 7 es la contraparte tridimensional de la figura 6 y muestra la interpretación geométrica de la diferencial dz y el incremento Δz: dz representa el cambio de altura del plano tangente, mientras que Δz representa el cambio de altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) cambia de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

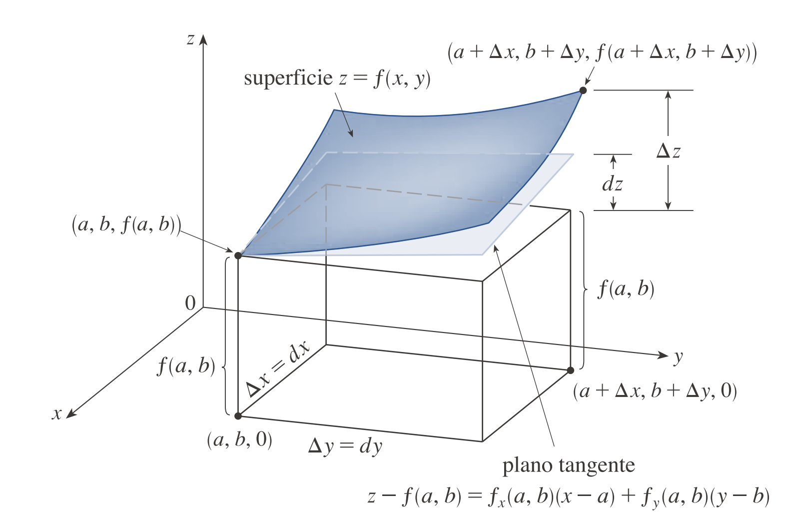


FIGURA 7

EJEMPLO 4

(a) Si $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine la diferencial dz.
(b) Si x cambia de 2 a 2.05 y y cambia de 3 a 2.96, compare los valores de Δz y dz.

SOLUCIÓN

(a) La definición 10 da

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

En el ejemplo 4, dz está cerca de Δz porque el plano tangente es una aproximación satisfactoria de la superficie $z = x^2 + 3xy - y^2$ cerca de (2, 3, 13). (Véase la figura 8.)

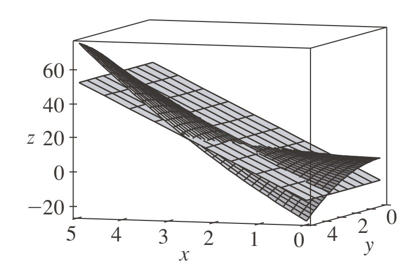


FIGURA 8

(b) Al poner $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y = 3$, y $dy = \Delta y = -0.04$ se obtiene

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65$$

El incremento de z es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3)\\ &= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]\\ &= 0.6449\end{aligned}$$

Nótese que $\Delta z \approx dz$, pero dz es más fácil de calcular. ■

EJEMPLO 5 El radio de la base y la altura de un cono circular recto se miden como 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error de medición de hasta 0.1 cm en cada uno. Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado del cono.

SOLUCIÓN El volumen V de un cono con radio de la base r y altura h es $V = \pi r^2 h/3$. Así, la diferencial de V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = \frac{2\pi rh}{3}\,dr + \frac{\pi r^2}{3}\,dh$$

Como cada error es a lo sumo de 0.1 cm, se tiene $|\Delta r| \leqslant 0.1$, $|\Delta h| \leqslant 0.1$. Para estimar el mayor error en el volumen se toma el error mayor en la medición de r y h. Así, se toma $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$ junto con $r = 10$, $h = 25$. Esto da

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Así, el error máximo en el volumen calculado es de alrededor de 20π cm^3 $\approx$ 63 cm^3. ■

Funciones de tres o más variables

Aproximaciones lineales, derivabilidad y diferenciales pueden definirse en forma similar para funciones de más de dos variables. Una función derivable se define mediante una expresión similar a la de la definición 7. Para esas funciones la **aproximación lineal** es

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

y la linealización $L(x, y, z)$ es el miembro derecho de esta expresión.

Si $w = f(x, y, z)$, el **incremento** de w es

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$



La **diferencial** dw se define en términos de las diferenciales dx, dy y dz de las variables independientes mediante

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz$$

EJEMPLO 6 Las dimensiones de una caja rectangular se miden en 75 cm, 60 cm y 40 cm y cada medida es correcta con un margen de error de 0.2 cm. Use diferenciales para estimar el mayor error posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de estas medidas.

SOLUCIÓN Si las dimensiones de la caja son x, y y z, su volumen es $V = xyz$, así que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Se dio que $|\Delta x| \leqslant 0.2$, $|\Delta y| \leqslant 0.2$, y $|\Delta z| \leqslant 0.2$. Para estimar el mayor error en el volumen, se usa por tanto $dx = 0.2$, $dy = 0.2$ y $dz = 0.2$ junto con $x = 75$, $y = 60$ y $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0.2) + (75)(40)(0.2) + (75)(60)(0.2) = 1980$$

Así, un error de solo 0.2 cm en la medición de cada dimensión podría conducir a ¡un error de aproximadamente 1 980 cm^3 en el volumen calculado! Este podría parecer un error considerable, pero es de apenas alrededor de 1% del volumen de la caja. ■

14.4 EJERCICIOS

1-6 Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

1. $z = 2x^2 + y^2 - 5y, \quad (1, 2, -4)$
2. $z = (x + 2)^2 - 2(y - 1)^2 - 5, \quad (2, 3, 3)$
3. $z = e^{x-y}, \quad (2, 2, 1)$
4. $z = x/y^2, \quad (-4, 2, -1)$
5. $z = \sqrt{xy}, \quad (1, 1, 1)$
6. $z = xe^{xy}, \quad (2, 0, 2)$

7-8 Grafique la superficie y el plano tangente en el punto dado. (Elija el dominio y punto de vista de tal forma que obtenga una vista satisfactoria tanto de la superficie como del plano tangente.) Acérquese después hasta que la superficie y el plano tangente se vuelvan indistinguibles.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2, \quad (1, 1, 5)$
8. $z = \sqrt{9 + x^2y^2}, \quad (2, 2, 5)$

SAC **9-10** Dibuje la gráfica de f y su plano tangente en el punto dado. (Use su sistema algebraico computacional tanto para calcular las derivadas parciales como para graficar la superficie y su plano tangente.) Acérquese después hasta que la superficie y el plano tangente se vuelvan indistinguibles.

9. $f(x, y) = \dfrac{1 + \cos^2(x - y)}{1 + \cos^2(x + y)}, \quad \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7}{4}\right)$
10. $f(x, y) = e^{-xy/10}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}\right), \quad (1, 1, 3e^{-0.1})$

11-16 Explique por qué la función es derivable en el punto dado. Determine después la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto.

11. $f(x, y) = 1 + x\ln(xy - 5), \quad (2, 3)$
12. $f(x, y) = \sqrt{xy}, \quad (1, 4)$
13. $f(x, y) = x^2e^y, \quad (1, 0)$
14. $f(x, y) = \dfrac{1 + y}{1 + x}, \quad (1, 3)$
15. $f(x, y) = 4\arctan(xy), \quad (1, 1)$
16. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}, \quad (3, 0)$

17-18 Verifique la aproximación lineal en (0, 0).

17. $e^x\cos(xy) \approx x + 1$
18. $\dfrac{y - 1}{x + 1} \approx x + y - 1$



19. Dado que f es una función derivable con $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$, y $f_y(2, 5) = -1$, use una aproximación lineal para estimar $f(2.2, 4.9)$.

20. Halle la aproximación lineal de la función $f(x, y) = 1 - xy \cos \pi y$ en (1, 1) y úsela para aproximar $f(1.02, 0.97)$. Ilustre graficando f y el plano tangente.

21. Halle la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en (3, 2, 6) y úsela para aproximar el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

22. La altura de las olas h en mar abierto depende de la velocidad v del viento y el tiempo t durante el cual el viento ha soplado a esa velocidad. Valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en metros en la tabla siguiente. Use la tabla para determinar una aproximación lineal de la función de altura de las olas cuando v está cerca de 80 km/h y t está cerca de 20 horas. Luego estime la altura de las olas cuando el viento ha soplado durante 24 horas a 84 km/h.

Duración (horas) / Velocidad del viento (km/h)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1.5	2.2	2.4	2.5	2.7	2.8	2.8
60	2.8	4.0	4.9	5.2	5.5	5.8	5.9
80	4.3	6.4	7.7	8.6	9.5	10.1	10.2
100	5.8	8.9	11.0	12.2	13.8	14.7	15.3
120	7.4	11.3	14.4	16.6	19.0	20.5	21.1

23. Use la tabla del ejemplo 3 para determinar una aproximación lineal de la función de humidex cuando la temperatura se acerca a los 32 °C y la humedad relativa es cercana a 65%. Estime después el humidex cuando la temperatura es de 33 °C y la humedad relativa de 63%.

24. El índice de viento-frío W es la temperatura percibida cuando la temperatura real es T y la velocidad del viento es v, así que se puede escribir $W = f(T, v)$. La tabla de valores siguiente es un fragmento de la tabla 1 de la sección 14.1. Úsela para determinar una aproximación lineal de la función del índice de viento-frío cuando T se acerca a –15 °C y v se acerca a 50 km/h. Estime después el índice de viento-frío cuando la temperatura es de –17 °C y la velocidad del viento es de 55 km/h.

Velocidad del viento (km/h) / Temperatura real (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

25-30 Determine la diferencial de las siguientes funciones.

25. $z = e^{-2x} \cos 2\pi t$

26. $u = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

27. $m = p^5 q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos \gamma$

30. $L = xze^{-y^2-z^2}$

---

31. Si $z = 5x^2 + y^2$ y (x, y) cambia de (1, 2) a (1.05, 2.1), compare los valores de Δz y dz.

32. Si $z = x^2 - xy + 3y^2$ y (x, y) cambia de (3, –1) a (2.96, –0.95), compare los valores de Δz y dz.

33. La longitud y ancho de un rectángulo se miden como 30 cm y 24 cm, respectivamente, con un error de medición de, a lo sumo, 0.1 cm en cada uno. Use diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del rectángulo.

34. Use diferenciales para estimar la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada de 10 cm de alto y 4 cm de diámetro si el metal en la tapa y el fondo es de 0.1 cm de grosor y el metal en los lados es de 0.05 cm de grosor.

35. Use diferenciales para estimar la cantidad de estaño en una lata cerrada con diámetro de 8 cm y altura de 12 cm si el estaño es de 0.04 cm de grosor.

36. El índice de viento-frío es modelado por la función

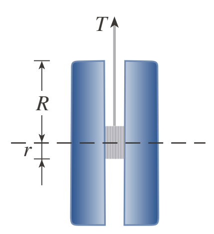
$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

donde T es la temperatura (en °C) y v la velocidad del viento (en km/h). La velocidad del viento se mide en 26 km/h, con un posible error de ±2 km/h, y la temperatura se mide en –11 °C, con un posible error de ±1 °C. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de W debido a los errores de medición en T y v.

37. La tensión T en la cuerda del yo-yo de la figura es

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

donde m es la masa del yo-yo y g la aceleración ejercida por la gravedad. Use diferenciales para estimar el cambio en la tensión si R aumenta de 3 cm a 3.1 cm y r aumenta de 0.7 cm a 0.8 cm. ¿La tensión aumenta o disminuye?



38. La presión, volumen y temperatura de un mol de un gas ideal están relacionados por la ecuación $PV = 8.31T$, donde P se mide en kilopascales, V en litros y T en grados Kelvin. Use diferenciales para hallar el cambio aproximado en la presión si el volumen aumenta de 12 L a 12.3 L y la temperatura disminuye de 310 K a 305 K.

39. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si las resistencias se miden en ohms como $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, y $R_3 = 50\ \Omega$, con un posible error de 0.5% en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

40. Un modelo para el área de un cuerpo humano está dado por $S = 72.09w^{0.425}h^{0.725}$, donde w es el peso (en kilogramos), h la altura (en centímetros) y S se mide en centímetros cuadrados. Si los errores de medición de w y h son a lo sumo de 2%, use diferenciales para estimar el máximo error porcentual en el área calculada.

41. En el ejercicio 14.1.39 y el ejemplo 14.3.3, el índice de masa corporal de una persona se definió como $B(m, h) = m/h^2$, donde m es la masa en kilogramos y h la altura en metros.

(a) ¿Cuál es la aproximación lineal de $B(m, h)$ para un niño con masa de 23 kg y altura de 1.10 m?

(b) Si la masa del niño aumenta 1 kg y la altura 3 cm, use la aproximación lineal para estimar el nuevo IMC. Compare con el nuevo IMC real.

42. Suponga que debe conocer una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 1, 3)$. No tiene una ecuación para S, pero sabe que las curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1 \rangle$$

residen en S. Determine una ecuación del plano tangente en P.

43-44 Demuestre que la función es derivable encontrando valores de ε_1 y ε_2 que satisfagan la definición 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = xy - 5y^2$

45. Compruebe que si f es una función de dos variables derivable en (a, b), f es continua en (a, b).
Sugerencia: demuestre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. (a) La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fue graficada en la figura 4. Demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen pero que f no es derivable en $(0, 0)$. [*Sugerencia*: use el resultado del ejercicio 45.]

(b) Explique por qué f_x y f_y no son continuas en $(0, 0)$.

PROYECTO DE APLICACIÓN EL SPEEDO LZR RACER

Muchos avances tecnológicos han ocurrido en los deportes que han contribuido a un mejor desempeño atlético. Uno de los más conocidos es el lanzamiento, en 2008, del Speedo LZR Racer. Se dijo entonces que este traje de baño de cuerpo entero reducía la fricción de un nadador en el agua. La figura 1 muestra el número de récords mundiales rotos en eventos de natación de estilo libre y carrera larga para hombres y mujeres entre 1990 y 2011.[1] El drástico incremento en 2008, cuando se lanzó ese traje de baño, llevó a algunas personas a sostener que esos trajes eran una forma de doping tecnológico. Como consecuencia, todos los trajes de baño de cuerpo entero fueron prohibidos en competencias a partir de 2010.

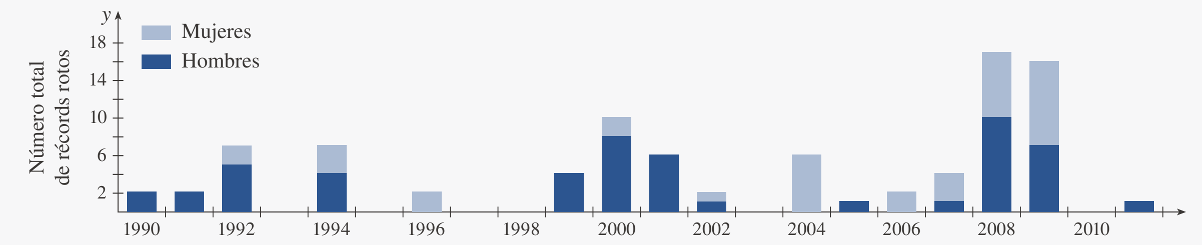


FIGURA 1 Número de récords mundiales impuestos en eventos de natación de estilo libre y carrera larga para hombres y mujeres, 1990-2011

Quizá sorprenda que una simple reducción de fricción pueda tener un efecto tan importante en el rendimiento. Para hacernos una idea, se puede usar un modelo matemático simple.[2]

1. L. Foster *et al*. "Influence of Full Body Swimsuits on Competitive Performance", *Procedia Engineering* 34 (2012): 712-717.
2. Adaptado de http://plus.maths.org/content/swimming.


Cortesía de © Speedo y ANSYS, Inc.

La velocidad v de un objeto propulsado en el agua está dada por

$$v(P, C) = \left(\frac{2P}{kC}\right)^{1/3}$$

donde P es la potencia usada para propulsar el objeto, C el coeficiente de fricción y k una constante positiva. Así, los atletas pueden aumentar su velocidad al nadar aumentando su potencia o reduciendo sus coeficientes de fricción. Pero, ¿qué tan efectivo es cada uno de estos factores?

Para comparar el efecto de aumentar la potencia contra el de reducir la fricción, es necesario comparar de alguna manera ambos factores en unidades comunes. El enfoque más común es determinar el cambio porcentual en velocidad que resulta de un cambio porcentual dado en potencia y fricción.

Si se trabaja con porcentajes como fracciones, cuando la potencia cambia en una fracción x (con x correspondiendo a $100x$ por ciento), P cambia de P a $P + xP$. De igual forma, si el coeficiente de fricción cambia en una fracción y, esto significa que ha cambiado de C a $C + yC$. Por último, el cambio fraccional en velocidad resultante de ambos efectos es

$$\boxed{1} \qquad \frac{v(P + xP, C + yC) - v(P, C)}{v(P, C)}$$

1. La expresión 1 da el cambio fraccional en velocidad que resulta de un cambio x en potencia y un cambio y en fricción. Demuestre que esto se reduce a la función

$$f(x, y) = \left(\frac{1 + x}{1 + y}\right)^{1/3} - 1$$

Dado el contexto, ¿cuál es el dominio de f?

2. Suponga que los posibles cambios en potencia x y fricción y son pequeños. Determine la aproximación lineal de la función $f(x, y)$. ¿Qué puede decirse de esa aproximación sobre el efecto de un aumento reducido en potencia contra una disminución reducida en fricción?

3. Calcule $f_{xx}(x, y)$ y $f_{yy}(x, y)$. Con base en los signos de estas derivadas, ¿la aproximación lineal del problema 2 resulta en una sobrestimación o una subestimación para un aumento en potencia? ¿Y para una disminución en fricción? Use su respuesta para explicar por qué, para cambios en potencia o fricción no muy pequeños una disminución en fricción es más efectiva.

4. Grafique las curvas de nivel de $f(x, y)$. Explique cómo se relacionan las formas de estas curvas con sus respuestas a los problemas 2 y 3.

14.5 La regla de la cadena

Recuerde que la regla de la cadena para funciones de una variable da la regla para derivar una función compuesta: si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, donde f y g son funciones derivables, entonces y es indirectamente una función derivable de t y

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Para funciones con más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de las cuales da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión (teorema 2) se refiere al caso donde $z = f(x, y)$ y cada una de las variables x y y es a su vez una función de una variable t. Esto significa que z es indirectamente una función de t, $z = f(g(t), h(t))$ y la regla de la cadena da una fórmula para derivar z como



una función de t. Suponga que f es derivable (definición 14.4.7). Recuerde que este es el caso cuando f_x y f_y son continuas (teorema 14.4.8).

2 La regla de la cadena (caso 1) Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones derivables de t. Entonces, z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

COMPROBACIÓN Un cambio de Δt en t produce cambios de Δx en x y de Δy en y. Esto produce a su vez un cambio de Δz en z, y por la definición 14.4.7 se tiene

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. [Si las funciones ε_1 y ε_2 no están definidas en (0, 0), puede definirlas como 0 ahí.] Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre Δt, se tiene

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si ahora se permite que $\Delta t \to 0$, entonces $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$, porque g es derivable y por tanto continua. De igual forma, $\Delta y \to 0$. Esto significa a su vez que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$, así que

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$

■

Como se suele escribir $\partial z/\partial x$ en vez de $\partial f/\partial x$, se puede reescribir la regla de la cadena en la forma

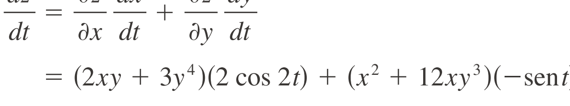
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Nótese la semejanza con la definición de diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

EJEMPLO 1 Si $z = x^2y + 3xy^4$, donde $x = \text{sen } 2t$, y $y = \cos t$ determine dz/dt cuando $t = 0$.

SOLUCIÓN La regla de la cadena da



$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\text{sen}\, t)
\end{aligned}$$

No es necesario sustituir las expresiones para x y y en términos de t. Simplemente observe que cuando $t = 0$, se tiene $x = \text{sen } 0 = 0$ y $y = \cos 0 = 1$. En consecuencia,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2 \cos 0) + (0 + 0)(-\text{sen } 0) = 6$$

■

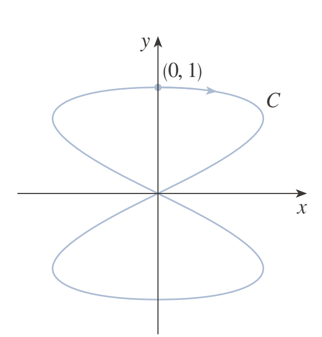
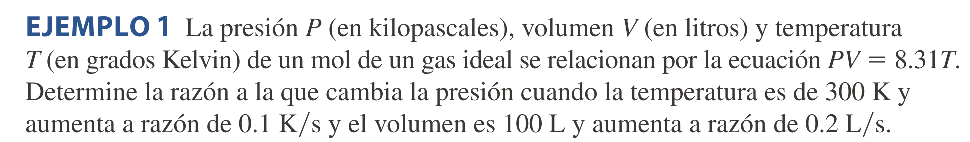


FIGURA 1 La curva $x = \text{sen}2t$, $y = \cos t$

La derivada del ejemplo 1 puede interpretarse como la razón de cambio de z con respecto a t cuando el punto (x, y) se mueve a lo largo de la curva C con ecuaciones paramétricas $x = \text{sen } 2t$, $y = \cos t$. (Véase la figura 1.) En particular, cuando $t = 0$, el punto (x, y) es $(0, 1)$ y $dz/dt = 6$ es la razón de incremento cuando se mueve a lo largo de la curva C que pasa por $(0, 1)$. Si, por ejemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representa la temperatura en el punto (x, y), la función compuesta $z = T(\text{sen } 2t, \cos t)$ representa la temperatura en los puntos en C y la derivada dz/dt representa la razón en la que la temperatura cambia a lo largo de C.



EJEMPLO 1 La presión P (en kilopascales), volumen V (en litros) y temperatura T (en grados Kelvin) de un mol de un gas ideal se relacionan por la ecuación $PV = 8.31T$. Determine la razón a la que cambia la presión cuando la temperatura es de 300 K y aumenta a razón de 0.1 K/s y el volumen es 100 L y aumenta a razón de 0.2 L/s.

SOLUCIÓN Si t representa el tiempo transcurrido en segundos, en el instante dado se tiene $T = 300$, $dT/dt = 0.1$, $V = 100$, $dV/dt = 0.2$. Puesto que

$$P = 8.31\frac{T}{V}$$

la regla de la cadena da

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{8.31}{100}(0.1) - \frac{8.31(300)}{100^2}(0.2) = -0.04155$$

La presión baja a razón de alrededor de 0.042 kPa/s. ■

Considere ahora la situación en la que $z = f(x, y)$, pero en la que tanto x como y son una función de dos variables s y t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Entonces, z es indirectamente una función de s y t y se desea encontrar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$. Recuerde que al calcular $\partial z/\partial t$ se mantiene fija s y se calcula la derivada ordinaria de z con respecto a t. Por tanto, se puede aplicar el teorema 2 para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Un argumento similar es válido para $\partial z/\partial s$, así que se ha comprobado la versión siguiente de la regla de la cadena.

3 La regla de la cadena (caso 2) Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t. Así pues,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

EJEMPLO 3 Si $z = e^x \operatorname{sen} y$, donde $x = st^2$ y $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

SOLUCIÓN Aplicando el caso 2 de la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2}\cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + s^2e^{st^2}\cos(s^2t)$$ ■

El caso 2 de la regla de la cadena contiene tres tipos de variables: s y t son variables **independientes**, x y y se llaman variables **intermedias** y z es la variable **dependiente**. Nótese que el teorema 3 tiene un término para cada variable intermedia y que cada uno de estos términos se asemeja a la regla de la cadena unidimensional de la ecuación 1.

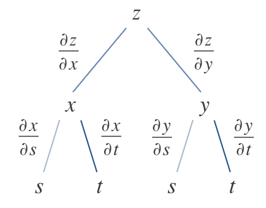


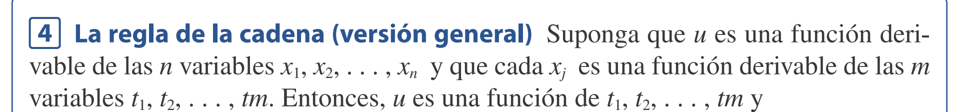
FIGURA 2

Para recordar la regla de la cadena serviría dibujar el **diagrama de árbol** de la figura 2. Se trazan ramas de la variable dependiente z a las variables intermedias x y y para indicar que z es una función de x y y. Luego se trazan ramas de x y y a las variables independientes s y t. En cada rama se escribe la correspondiente derivada parcial. Para hallar $\partial z/\partial s$, se encuentra el producto de las derivadas parciales a lo largo de cada trayectoria de z a s y después se suman esos productos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

En forma similar, se hallan $\partial z/\partial t$ usando las trayectorias de z a t.

Considere ahora la situación general en la que una variable dependiente u es una función de n variables intermedias $x_1, \ldots, x_n$, cada una de las cuales es a su vez una función de m variables independientes $t_1, \ldots, t_m$. Nótese que hay n términos, uno para cada variable intermedia. La comprobación es similar a la del caso 1.



4 La regla de la cadena (versión general) Suponga que u es una función derivable de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y que cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, tm$. Entonces, u es una función de $t_1, t_2, \ldots, tm$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

EJEMPLO 4 Escriba la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, y $t = t(u, v)$.

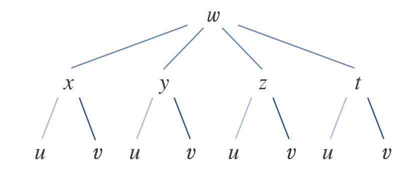


FIGURA 3

SOLUCIÓN Se aplica el teorema 4 con $n = 4$ y $m = 2$. La figura 3 muestra el diagrama de árbol. Aunque no se han escrito las derivadas en las ramas, se entiende que si una rama lleva de y a u, la derivada parcial de esa rama es $\partial y/\partial u$. Con la ayuda del diagrama de árbol, se pueden escribir ahora las expresiones requeridas:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$ ■

EJEMPLO 5 Si $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, y $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine el valor de $\partial u/\partial s$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

SOLUCIÓN Con la ayuda del diagrama de árbol de la figura 4 se tiene

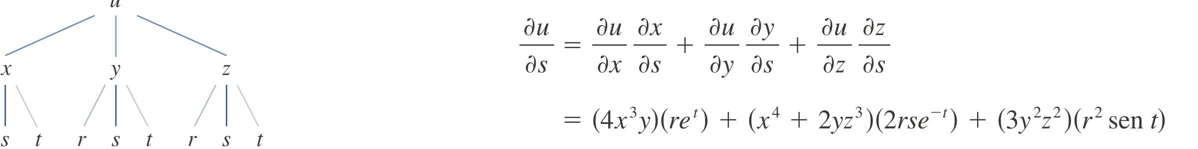


FIGURA 4

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Cuando $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$, se tiene $x = 2$, $y = 2$ y $z = 0$, así que

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Si $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ y f es derivable, demuestre que g satisface la ecuación

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUCIÓN Sea $x = s^2 - t^2$ y $y = t^2 - s^2$. Entonces, $g(s, t) = f(x, y)$ y la regla de la cadena da

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Por tanto,

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, encuentre (a) $\partial z/\partial r$ y (b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUCIÓN

(a) La regla de la cadena da

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

(b) Al aplicar la regla del producto a la expresión del inciso (a), se obtiene

5

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

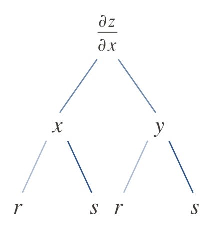


FIGURA 5

Pero usando de nuevo la regla de la cadena (véase la figura 5) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

Al poner estas expresiones en la ecuación 5 y usar la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden, se obtiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

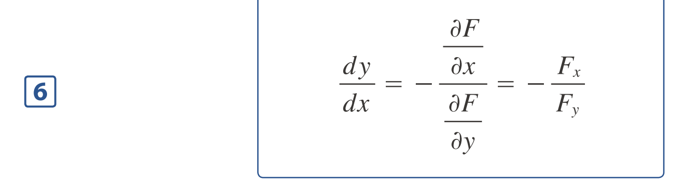
$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$ ■

Derivación implícita

La regla de la cadena puede usarse para obtener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita que se presentó en las secciones 3.5 y 14.3. Se supone que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como una función derivable de x, es decir $y = f(x)$, donde $F(x, f(x)) = 0$ para todas las x en el dominio de f. Si F es derivable, se puede aplicar el caso 1 de la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Pero $dx/dx = 1$, así que si $\partial F/\partial y \neq 0$ se despeja dy/dx y se obtiene



6 $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Para derivar esta ecuación suponga que $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como una función de x. El **teorema de la función implícita**, comprobado en el cálculo avanzado, establece condiciones en las cuales este supuesto es válido: sostiene que si F se define en un disco que contiene (a, b), donde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$, y F_x y F_y son continuas en el disco, la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función de x cerca del punto (a, b) y la derivada de esta función está dada por la ecuación 6.

EJEMPLO 8 Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUCIÓN La ecuación dada puede escribirse como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

así que la ecuación 6 da

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$ ■

La solución del ejemplo 8 debería compararse con la del ejemplo 3.5.2.

Ahora suponga que z es dada implícitamente como una función $z = f(x, y)$ por una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todas las (x, y) en el dominio de f. Si F y f son derivables se puede usar la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Pero $$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

así que esta ecuación se convierte en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si $\partial F/\partial z \neq 0$, despeje $\partial z/\partial x$ y obtenga la primera fórmula en las ecuaciones 7. La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene de forma similar.

7
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

De nueva cuenta, una versión del **teorema de la función implícita** estipula condiciones en las cuales nuestro supuesto es válido: si F se define dentro de una esfera que contiene a (a, b, c), donde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$, y F_x, F_y, y F_z son continuas dentro de la esfera, la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z como una función de x y y cerca del punto (a, b, c) y esta función es derivable, con derivadas parciales dadas por (7).

EJEMPLO 9 Encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUCIÓN Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Entonces, por las ecuaciones 7 se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$ ■

La solución del ejemplo 9 debería compararse con la del ejemplo 14.3.5.

14.5 EJERCICIOS

1-6 Use la regla de la cadena para determinar dz/dt o dw/dt.

1. $z = xy^3 - x^2y, \quad x = t^2 + 1, \quad y = t^2 - 1$

2. $z = \dfrac{x - y}{x + 2y}, \quad x = e^{\pi t}, \quad y = e^{-\pi t}$

3. $z = \text{sen } x \cos y, \quad x = \sqrt{t}, \quad y = 1/t$

4. $z = \sqrt{1 + xy}, \quad x = \tan t, \quad y = \arctan t$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

6. $z = \tan^{-1}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$

7-12 Use la regla de la cadena para determinar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

7. $z = (x - y)^5, \quad x = s^2t, \quad y = st^2$

8. $z = \tan^{-1}(x^2 + y^2), \quad x = s \ln t, \quad y = te^s$



9. $z = \ln(3x + 2y)$, $x = s \operatorname{sen} t$, $y = t \cos s$

10. $z = \sqrt{x}\, e^{xy}$, $x = 1 + st$, $y = s^2 - t^2$

11. $z = e^r \cos\theta$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \operatorname{arcsen}(x - y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$

13. Sea $p(t) = f(g(t), h(t))$, donde f es derivable, $g(2) = 4$, $g'(2) = -3$, $h(2) = 5$, $h'(2) = 6$, $f_x(4, 5) = 2$, $f_y(4, 5) = 8$. Determine $p'(2)$.

14. Sea $R(s, t) = G(u(s, t), v(s, t))$, donde G, u y v son derivables, $u(1, 2) = 5$, $u_s(1, 2) = 4$, $u_t(1, 2) = -3$, $v(1, 2) = 7$, $v_s(1, 2) = 2$, $v_t(1, 2) = 6$, $G_u(5, 7) = 9$, $G_v(5, 7) = -2$. Determine $R_s(1, 2)$ y $R_t(1, 2)$.

15. Suponga que f es una función derivable de x y y, y $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Use la tabla de valores para calcular $g_u(0, 0)$ y $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponga que f es una función derivable de x y y, y $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use la tabla de valores del ejercicio 15 para calcular $g_r(1, 2)$ y $g_s(1, 2)$.

17-20 Use un diagrama de árbol para escribir la regla de la cadena para el caso dado. Suponga que todas las funciones son derivables.

17. $u = f(x, y)$, donde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $w = f(x, y, z)$, donde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$

19. $T = F(p, q, r)$, donde $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$, $r = r(x, y, z)$

20. $R = F(t, u)$ donde $t = t(w, x, y, z)$, $u = u(w, x, y, z)$

21-26 Use la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$;
$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ cuando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}$, $r = y + x\cos t$, $s = x + y \operatorname{sen} t$;
$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ cuando $x = 1$, $y = 2$, $t = 0$

23. $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, $z = r\theta$;
$\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ cuando $r = 2$, $\theta = \pi/2$

24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $u = xe^y$, $v = ye^x$, $w = e^{xy}$;
$\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ cuando $x = 0$, $y = 2$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}$, $p = u + vw$, $q = v + uw$, $r = w + uv$;
$\dfrac{\partial N}{\partial u}, \dfrac{\partial N}{\partial v}, \dfrac{\partial N}{\partial w}$ cuando $u = 2$, $v = 3$, $w = 4$

26. $u = xe^{ty}$, $x = \alpha^2\beta$, $y = \beta^2\gamma$, $t = \gamma^2\alpha$;
$\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}$ cuando $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

27-30 Use la ecuación 6 para hallar dy/dx.

27. $y\cos x = x^2 + y^2$

28. $\cos(xy) = 1 + \operatorname{sen} y$

29. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

30. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

31-34 Use las ecuaciones 7 para hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x\ln y = z^2$

35. La temperatura en el punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados Celsius. Un bicho se arrastra de tal manera que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y se miden en centímetros. La función de temperatura satisface $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Qué tan rápido aumenta la temperatura en la trayectoria del bicho después de 3 segundos?

36. La producción de trigo W en un año dado depende de la temperatura promedio T y la precipitación anual R. Científicos estiman que la temperatura promedio aumenta a razón de 0.15 °C/año y la precipitación disminuye a razón de 0.1 cm/año. También estiman que a los niveles de producción corrientes, $\partial W/\partial T = -2$ y $\partial W/\partial R = 8$.

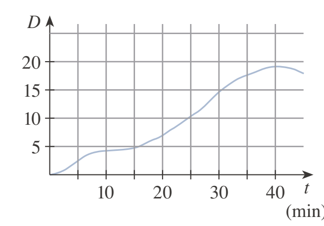
(a) ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?

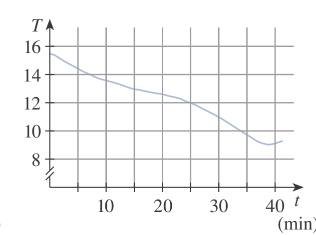
(b) Estime la razón de cambio corriente de la producción de trigo, dW/dt.

37. La velocidad del sonido que viaja a través de aguas oceánicas con salinidad de 35 partes por millar se forma por la ecuación

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + 0.016D$$

donde C es la velocidad del sonido (en metros por segundo), T la temperatura (en grados Celsius) y D la profundidad bajo la superficie del océano (en metros). Un buzo inició una inmersión recreativa en aguas marinas; su profundidad y la temperatura del agua circundante con el paso del tiempo se registran en las gráficas siguientes. Estime la razón de cambio (con respecto al tiempo) de la velocidad del sonido a través de agua marina, experimentada por el buzo luego de 20 minutos de inmersión. ¿Cuáles son las unidades?





38. El radio de un cono circular recto aumenta a razón de 4.6 cm/s mientras su altura disminuye a razón de 6.5 cm/s. ¿A qué razón cambia el volumen del cono cuando el radio es de 300 cm y la altura de 350 cm?

39. La longitud ℓ, ancho w y altura h de una caja cambian con el tiempo. En cierto instante las dimensiones son $\ell = 1$ m y $w = h = 2$ m, y ℓ y w aumentan a razón de 2 m/s mientras que h disminuye a razón de 3 m/s. Determine en ese instante las razones a las que cambian las cantidades siguientes.
(a) El volumen
(b) El área
(c) La longitud de una diagonal

40. El voltaje V en un circuito eléctrico simple disminuye lentamente conforme se agota la batería. La resistencia R se reduce con lentitud conforme el resistor se calienta. Use la ley de Ohm, $V = IR$, para determinar cómo cambia la corriente I en el momento en que $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08$ A, $dV/dt = -0.01$ V/s, y $dR/dt = 0.03\ \Omega$/s.

41. La presión de 1 mol de un gas ideal aumenta a razón de 0.05 kPa/s y la temperatura aumenta a razón de 0.15 K/s. Use la ecuación $PV = 8.31T$ del ejemplo 2 para hallar la razón de cambio del volumen cuando la presión es de 20 kPa y la temperatura de 320 K.

42. Un fabricante ha modelado su función de producción anual P (el valor de su producción entera, en millones de dólares) como una función de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.47L^{0.65}K^{0.35}$$

donde L es el número de horas de trabajo (en miles) y K el capital invertido (en millones de dólares). Suponga que cuando $L = 30$ y $K = 8$, la fuerza de trabajo disminuye a razón de 2 000 horas de trabajo al año y el capital aumenta a razón de \$500 000 al año. Determine la razón de cambio de la producción.

43. Un lado de un triángulo aumenta a razón de 3 cm/s y un segundo lado disminuye a razón de 2 cm/s. Si el área del triángulo se mantiene constante, ¿a qué razón cambia el ángulo entre los lados cuando el primer lado es de 20 cm de largo, el segundo de 30 cm y el ángulo es de $\pi/6$?

44. Un sonido con frecuencia f_s es producido por una fuente que viaja a lo largo de una línea con velocidad v_s. Si un observador viaja con velocidad v_o a lo largo de la misma línea en la dirección opuesta a la fuente, la frecuencia del sonido escuchado por el observador es

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

donde c es la velocidad del sonido, de alrededor de 332 m/s. (Este es el **efecto Doppler**.) Suponga que, en un momento dado, usted viaja en un tren a 34 m/s que acelera a 1.2 m/s^2. Un tren se acerca a usted desde la dirección opuesta en la otra vía a 40 m/s y acelera a 1.4m/s^2 y hace sonar su silbato, que tiene una frecuencia de 460 Hz. En ese instante, ¿cuál es la frecuencia percibida que usted oye y qué tan rápido cambia?

45-48 Suponga que todas las funciones dadas son derivables.

45. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$, (a) encuentre $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial$ y θ y (b) demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Si $z = f(x, y)$, donde $x = s + t$ y $y = s - t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

47. Si $z = \dfrac{1}{x}[f(x - y) + g(x + y)]$, demuestre que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right) = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

48. Si $z = \dfrac{1}{y}[f(ax + y) + g(ax - y)]$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

49-54 Suponga que todas las funciones dadas tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

49. Demuestre que cualquier función de la forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Sugerencia*: sea $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s \cos t$ y $y = e^s \operatorname{sen} t$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. (Compare con el ejemplo 7.)

52. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r$ sen, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial\theta$, y (c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r$ sen, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponga que $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$.
(a) Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Determine una fórmula similar para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Una función f se llama **homogénea de grado n** si satisface la ecuación

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para todas las t, donde n es un entero positivo y f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden.

(a) Verifique que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ es homogénea de grado 3.

(b) Demuestre que si f es homogénea de grado n, entonces

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Sugerencia*: use la regla de la cadena para derivar $f(tx, ty)$ con respecto a t.]

56. Si f es homogénea de grado n, demuestre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x, y)$$

57. Si f es homogénea de grado n, demuestre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponga que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a cada una de las tres variables x, y y z como funciones de las otras dos: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Si F es derivable y F_x, F_y, y F_z son diferentes de cero, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

59. La ecuación 6 es una fórmula para la derivada dy/dx de una función definida implícitamente por una ecuación $F(x, y) = 0$, siempre y cuando F sea derivable y $F_y \neq 0$. Compruebe que si F tiene segundas derivadas continuas, una fórmula para la segunda derivada de y es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

14.6 Derivadas direccionales y el vector gradiente

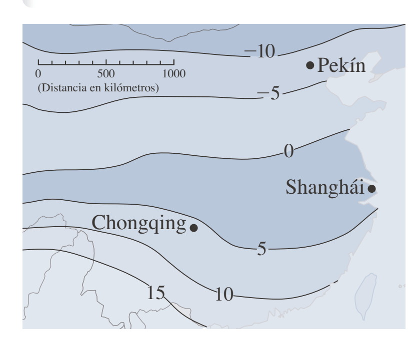


FIGURA 1

El mapa meteorológico de la figura 1 muestra un mapa de contorno de la función de temperatura $T(x, y)$ para China a las tres de la tarde del 28 de diciembre de 2004. Las curvas de nivel, o isotermas, unen lugares con la misma temperatura. La derivada parcial T_x en un lugar como Chongqing es la razón de cambio de temperatura con respecto a la distancia si se viaja al este desde Chongqing; T_y es la razón de cambio de temperatura si se viaja al norte. Pero, ¿y si se quiere conocer la razón de cambio de temperatura cuando se viaja al sureste o en alguna otra dirección? En esta sección se presentará un tipo de derivada llamada *derivada direccional*, que permite determinar la razón de cambio de una función de dos o más variables en cualquier dirección.

Derivadas direccionales

Recuerde que si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se definen como

1

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

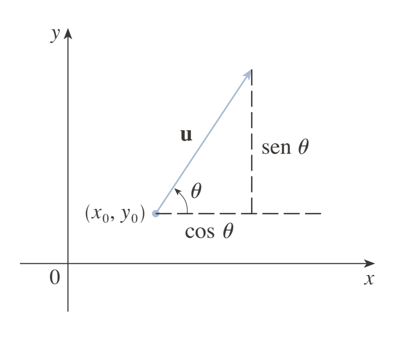


FIGURA 2
Un vector unitario
$\mathbf{u} = \langle a, b\rangle = \langle \cos u, \operatorname{sen} u\rangle$

y representan las razones de cambio de z en las direcciones de x y y, es decir en las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

Suponga que ahora desea determinar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$. (Véase la figura 2.) Para hacer esto se considera la superficie S con la ecuación $z = f(x, y)$ (la gráfica de f) y se concede que $z_0 = f(x_0, y_0)$. Entonces, el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ reside en S. El plano vertical que pasa por P en la dirección

de **u** interseca S en una curva C. (Véase la figura 3.) La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de **u**.

TEC Visual 14.6A anima la figura 3 rotando **u**, y por tanto T.

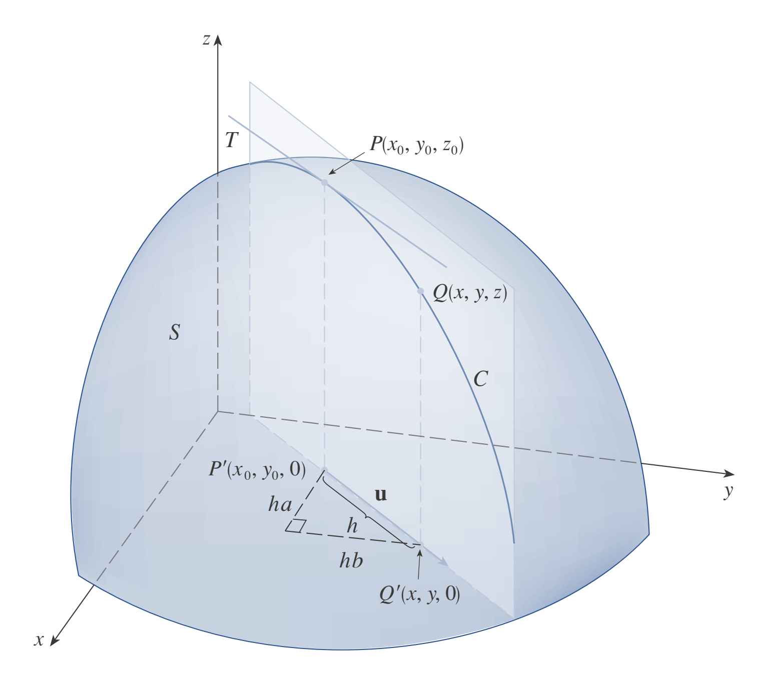


FIGURA 3

Si $Q(x, y, z)$ es otro punto en C y P', Q' son las proyecciones de P, Q en el plano xy, el vector $\overrightarrow{P'Q'}$ es paralelo a **u** y por tanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb\rangle$$

para algún escalar h. Así, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, de modo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si toma el límite cuando $h \to 0$, se obtiene la razón de cambio de z (con respecto a la distancia) en la dirección de **u**, la cual se llama derivada direccional de f en la dirección de **u**.

2 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Al comparar la definición 2 con las ecuaciones 1 se puede ver que si $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$, entonces $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ y que si $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$, entonces $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. En otras palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son sencillamente casos especiales de la derivada direccional.

EJEMPLO 1 Use el mapa meteorológico de la figura 1 para estimar el valor de la derivada direccional de la función de temperatura en Chongqing en la dirección suroeste.

SOLUCIÓN El vector unitario dirigido al suroeste es $\mathbf{u} = -(\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$, pero no necesitará usar esta expresión. Comience dibujando una recta que pase por Chongqing hacia el suroeste (véase la figura 4).

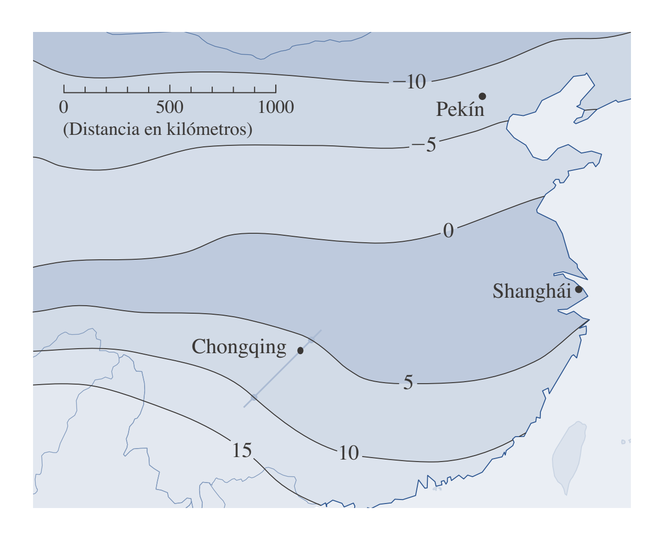


FIGURA 4

Aproxime la derivada direccional D_uT mediante la razón de cambio promedio de la temperatura entre los puntos donde esta recta interseca las isotermas $T = 5$ y $T = 10$. La temperatura en el punto suroeste de Chongqing es $T = 10$ °C y la temperatura en el punto noreste de Chongqing es $T = 5$ °C. La distancia entre estos puntos parece ser alrededor de 380 km. Así, la razón de cambio de la temperatura en la dirección suroeste es

$$D_{\mathbf{u}}T \approx \frac{10 - 5}{380} = \frac{5}{380} \approx 0.013 \text{ °C/km}$$ ■

Cuando se calcula la derivada direccional de una función definida por una fórmula, suele emplearse el teorema siguiente.

3 Teorema Si f es una función derivable de x y y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

COMPROBACIÓN Si se define una función g de la variable h mediante

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

por la definición de una derivada se tiene

4
$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por otro lado, se puede escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, de forma que la regla de la cadena (teorema 14.5.2) da

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\,a + f_y(x, y)\,b$$

Si se pone ahora $h = 0$, entonces $x = x_0$, $y = y_0$ y

5 $$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

Al comparar las ecuaciones 4 y 5 se observa que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$ ■

Si el vector unitario **u** forma un ángulo θ con el eje x positivo (como en la figura 2), se puede escribir $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$ y la fórmula del teorema 3 se convierte en

6 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

La derivada direccional $D_u f(1,2)$ del ejemplo 2 representa la razón de cambio de z en la dirección de **u**. Esta es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ y el plano vertical que pasa por (1, 2, 0) en la dirección de **u** mostrada en la figura 5.

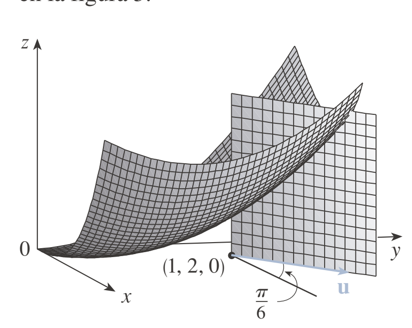


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Determine la derivada direccional $D_u f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y **u** es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \pi/6$. ¿Qué es $D_u f(1, 2)$?

SOLUCIÓN La fórmula 6 da

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right] \end{aligned}$$

Por tanto,

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$ ■

El vector gradiente

Nótese en el teorema 3 que la derivada direccional de una función derivable puede escribirse como el producto punto de dos vectores:

7 $$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\,a + f_y(x, y)\,b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

El primer vector en este producto punto no solo ocurre en el cálculo de derivadas direccionales, sino también en muchos otros contextos. Así, se le da un nombre especial (el *gradiente* de f) y una notación especial (**grad** f o ∇f, que se lee "del f").

8 Definición Si f es una función de dos variables x y y, entonces el gradiente de f es la función vector ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$, entonces

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

y

$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

Con esta notación para el vector gradiente se puede reescribir la ecuación 7 para la derivada direccional de una función derivable como

9
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Esto expresa la derivada direccional en la dirección de un vector unitario **u** como la proyección escalar del vector gradiente en **u**.

El vector gradiente $\nabla f(2, -1)$ del ejemplo 4 se muestra en la figura 6 con punto inicial (2, –1). También se muestra el vector **v** que da la dirección de la derivada direccional. Estos dos vectores se sobreimponen en un mapa de contorno de la gráfica de f.

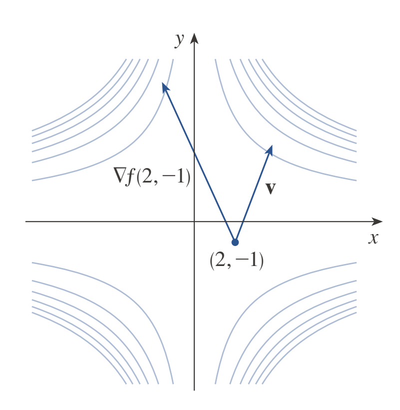


FIGURA 6

EJEMPLO 4 Determine la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ en el punto (2, –1) en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN Primero se calcula el vector gradiente en (2, –1):

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\,\mathbf{j}$$
$$\nabla f(2, -1) = -4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$$

Nótese que **v** no es un vector unitario, pero como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, el vector unitario en la dirección de **v** es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}$$

Así, por la ecuación 9 se tiene

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}\right)$$
$$= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Funciones de tres variables

Para funciones de tres variables se pueden definir derivadas direccionales en forma similar. De nueva cuenta, $D_u f(x, y, z)$ puede interpretarse como la razón de cambio de la función en la dirección de un vector unitario **u**.

10 Definición La derivada direccional de f en (x_0, y_0, z_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si este límite existe.

Si se usa la notación vectorial, pueden escribirse ambas definiciones (2 y 10) de la derivada direccional en la forma compacta

11 $$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

donde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ si $n = 2$ y $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ si $n = 3$. Esto es razonable porque la ecuación vectorial de la recta que pasa por x_0 en la dirección del vector $\mathbf{u}$ está dada por $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ (ecuación 12.5.1), y por tanto $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa el valor de f en un punto en esta recta.

Si $f(x, y, z)$ es derivable y $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, el mismo método que se usó para comprobar el teorema 3 puede emplearse para demostrar que

12 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\, a + f_y(x, y, z)\, b + f_z(x, y, z)\, c$$

Para una función f de tres variables, el vector **gradiente**, denotado por ∇f o **grad** f, es

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

o, para abreviar,

13 $$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Entonces, lo mismo que en el caso de funciones de dos variables, la fórmula 12 para la derivada direccional puede reescribirse como

14 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

EJEMPLO 5 Si $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, (a) determine el gradiente de f y (b) determine la derivada direccional de f en $(1, 3, 0)$ en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN

(a) El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

$$= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle$$

(b) En (1, 3, 0) se tiene $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$. El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

Por tanto, la ecuación 14 da

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k} \right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

■

■ Maximización de la derivada direccional

Suponga que tiene una función f de dos o tres variables y considere todas las posibles derivadas direccionales de f en un punto dado. Estas dan las razones de cambio de f en todas las direcciones posibles. Entonces, se pueden hacer estas preguntas: ¿en cuál de esas direcciones cambia más rápido f y cuál es la máxima razón de cambio? Las respuestas se dan en el teorema siguiente.

TEC Visual 14.6B ofrece una confirmación visual del teorema 15.

15 Teorema Suponga que f es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_u f(\mathbf{x})$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y ocurre cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

COMPROBACIÓN De la ecuación 9 o 14 se tiene

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$. El valor máximo de $\cos\theta$ es 1 y ocurre cuando $\theta = 0$. Por tanto, el valor máximo de $D_u f$ es $|\nabla f|$ y sucede cuando $\theta = 0$, es decir cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que ∇f. ■

EJEMPLO 6
(a) Si $f(x, y) = xe^y$, determine la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P to $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.
(b) ¿En qué dirección tiene f la máxima razón de cambio? ¿Cuál es la máxima razón de cambio?

SOLUCIÓN
(a) Primero se calcula el vector gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ} = \langle -\frac{3}{2}, 2 \rangle$ es $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$, así que la razón de cambio de f en la dirección de P a Q es

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

(b) De acuerdo con el teorema 15, f aumenta más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. La máxima razón de cambio es

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$ ■

En (2, 0) la función del ejemplo 6 aumenta más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. Nótese en la figura 7 que este vector parece ser perpendicular a la curva de nivel que pasa por (2, 0). La figura 8 muestra la gráfica de f y el vector gradiente.

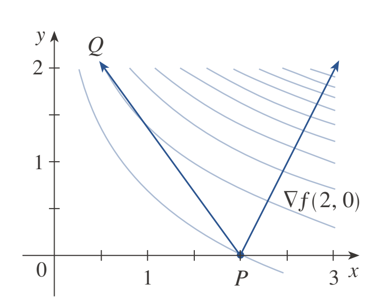


FIGURA 7

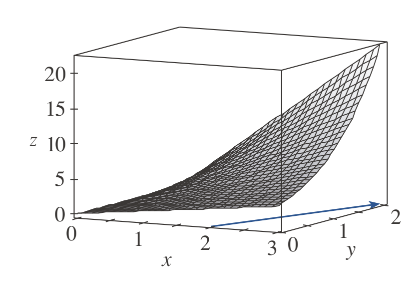


FIGURA 8

EJEMPLO 7 Suponga que la temperatura en el punto (x, y, z) en el espacio está dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, donde T se mide en grados Celsius y x, y, z en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en el punto (1, 1, –2)? ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

SOLUCIÓN El gradiente de T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} - 3z\,\mathbf{k})$$

En el punto (1, 1, –2) el vector gradiente es

$$\nabla T(1, 1, -2) = \tfrac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

Por el teorema 15 la temperatura aumenta más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ o, en forma equivalente, en la dirección de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ o el vector unitario $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$. La razón de incremento máxima es la longitud del vector gradiente:

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \tfrac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

Por tanto, la razón de incremento máxima de la temperatura es $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4\,°\text{C/m}$. ■

Planos tangentes a superficies de nivel

Suponga que S es una superficie con ecuación $F(x, y, z) = k$, es decir, que es una superficie de nivel de una función F de tres variables, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Sea C cualquier curva residente en la superficie S y que pasa por el punto P. Recuerde de la sección 13.1 que la curva C es descrita por una función vectorial continua $r(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Sea t_0 el valor paramétrico correspondiente a P; es decir, $r(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Como C reside en S, cualquier punto $(x(t), y(t), z(t))$, debe satisfacer la ecuación de S, es decir

16 $$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Si x, y y z son funciones derivables de t y F también es derivable, se puede usar la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación 16 como sigue:

17 $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Pero como $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z\rangle$ y $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$, la ecuación 17 puede escribirse en términos de un producto punto como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

En particular, cuando $t = t_0$ se tiene $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, así que

18 $$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

La ecuación 18 establece que *el vector gradiente en* P, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, *es perpendicular al vector tangente* $\mathbf{r}'(t_0)$ *a cualquier curva* C *en* S *que pase por* P. (Véase la figura 9.) Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, es natural entonces definir el plano **tangente a la superficie de nivel** $F(x, y, z) = k$ **en** $P(x_0, y_0, z_0)$ como el plano que pasa por P y tiene vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Usando la ecuación estándar de un plano (ecuación 12.5.7), se puede escribir la ecuación de este plano tangente como

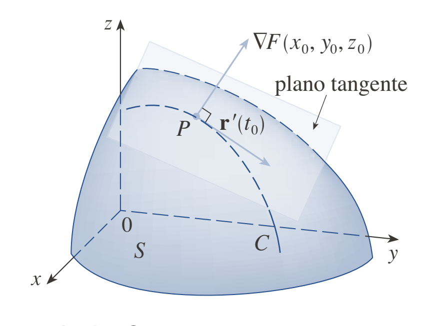


FIGURA 9

19 $$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

La **recta normal** a S en P es la recta que pasa por P y perpendicular al plano tangente. La dirección de la recta normal está dada entonces por el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, así que, por la ecuación 12.5.3, sus ecuaciones simétricas son

20 $$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

En el caso especial en el que la ecuación de una superficie S es de la forma $z = f(x, y)$ (es decir, S es la gráfica de una función f de dos variables), es posible reescribir la ecuación como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

y considerar a S como una superficie de nivel (con $k = 0$) de F. Así pues,

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$



de manera que la ecuación 19 se convierte en

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

lo cual es equivalente a la ecuación 14.4.2. Así, esta nueva y más general definición de un plano tangente es congruente con la definición que se dio para el caso especial de la sección 14.4.

EJEMPLO 8 Determine las ecuaciones del plano tangente y la recta normal en el punto (–2, 1, –3) al elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

La figura 10 muestra el elipsoide, plano tangente y recta normal del ejemplo 8.

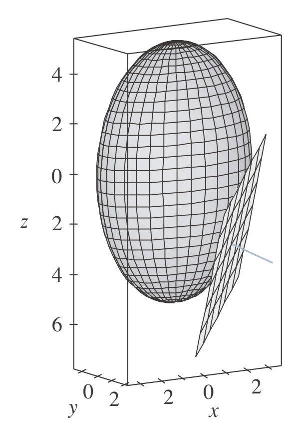


FIGURA 10

SOLUCIÓN El elipsoide es la superficie de nivel (con $k = 3$) de la función

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Por tanto, se tiene

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Así, la ecuación 19 da la ecuación del plano tangente en (–2, 1, –3) como

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

lo que se simplifica en $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Por la ecuación 20, ecuaciones simétricas de la recta normal son

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}$$

■

■ Importancia del vector gradiente

Ahora se resumirán las formas en que el vector gradiente es significativo. Primero considere una función f de tres variables y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en su dominio. Por una parte, por el teorema 15 se sabe que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica la dirección del incremento más rápido de f. Por otra, se sabe que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a la superficie de nivel S de f que pasa por P. (Remítase a la figura 9.) Estas dos propiedades son muy compatibles intuitivamente, porque a medida que se aleja de P en la superficie de nivel S, el valor de f no cambia en absoluto. Así, parece razonable que si se mueve en la dirección perpendicular, se obtiene el incremento máximo.

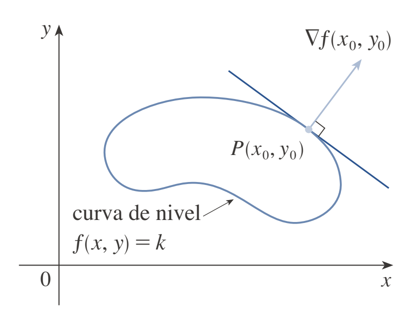


FIGURA 11

De igual manera, considere una función f de dos variables y un punto $P(x_0, y_0)$ en su dominio. También esta vez el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ da la dirección del incremento más rápido de f. Asimismo, por consideraciones similares al análisis de los planos tangentes, se puede demostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por P. Esto es, de nuevo, intuitivamente verosímil, porque los valores de f se mantienen constantes conforme se mueve a lo largo de la curva. (Véase la figura 11.)

Si considera un mapa topográfico de una colina y concede que $f(x, y)$ representa la altura sobre el nivel del mar en un punto con coordenadas (x, y), una curva de ascenso muy pronunciado puede dibujarse como en la figura 12 volviéndola perpendicular a todas

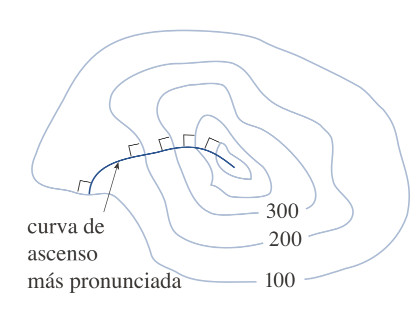


FIGURA 12

las rectas de contorno. Este fenómeno también puede percibirse en la figura 14.1.12, donde el río Lonesome sigue una curva de descenso muy pronunciada.

Sistemas algebraicos computacionales tienen comandos que trazan vectores gradiente de muestra. Cada vector gradiente $\nabla f(a, b)$ se traza a partir del punto (a, b). La figura 13 muestra un diagrama de ese tipo (llamado *campo de vectores gradiente*) para la función $f(a, b) = x^2 - y^2$ sobreimpuesta a un mapa de contorno de f. Como era de esperarse, los vectores gradiente apuntan "colina arriba" y son perpendiculares a las curvas de nivel.

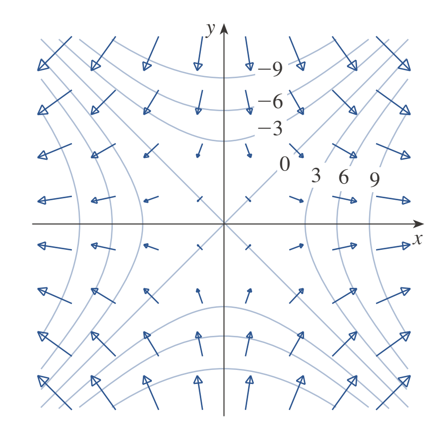
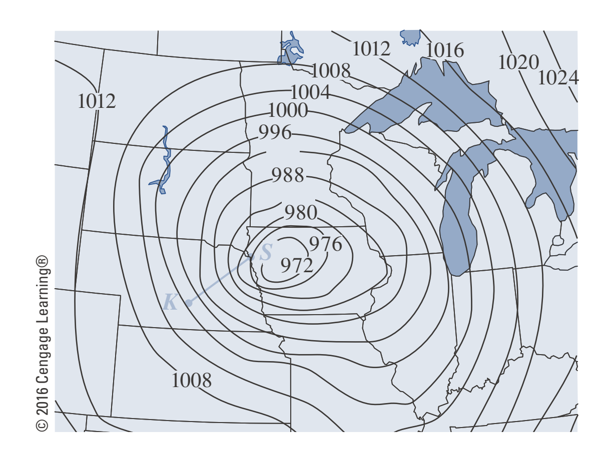


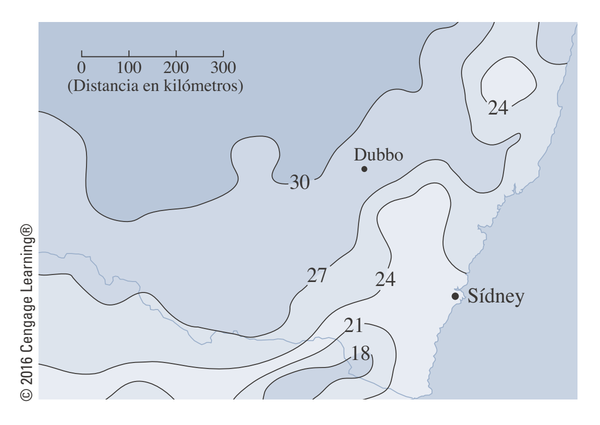
FIGURA 13

14.6 EJERCICIOS

1. Se muestran curvas de nivel para la presión barométrica (en milibaras) a las seis de la mañana de un día de noviembre. Una profunda depresión con presión de 972 mb se mueve sobre el noreste de Iowa. La distancia a lo largo de la recta azul de K (Kearney, Nebraska) a S (Sioux City, Iowa) es de 300 km. Estime el valor de la derivada direccional de la función de presión en Kearney en la dirección de Sioux City. ¿Cuáles son las unidades de la derivada direccional?



2. El mapa de contorno muestra la temperatura máxima promedio para noviembre de 2004 (en °C). Estime el valor de la derivada direccional de esta función de temperatura en Dubbo, Nueva Gales del Sur, en la dirección de Sídney. ¿Cuáles son las unidades?



3. Una tabla de valores para el índice de viento-frío $W = f(T, v)$ se da en el ejercicio 14.3.3, en la página 923. Use esa tabla para estimar el valor de $D_{\mathbf{u}} f(-20, 30)$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4-6 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección indicada por el ángulo θ.

4. $f(x, y) = xy^3 - x^2, \quad (1, 2), \quad \theta = \pi/3$

5. $f(x, y) = y\cos(xy)$, $(0, 1)$, $\theta = \pi/4$

6. $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$, $(3, 1)$, $\theta = -\pi/6$

7-10
(a) Determine el gradiente de f.
(b) Evalúe el gradiente en el punto P.
(c) Determine la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = x/y$, $P(2, 1)$, $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\,\mathbf{i} + \frac{4}{5}\,\mathbf{j}$

8. $f(x, y) = x^2 \ln y$, $P(3, 1)$, $\mathbf{u} = -\frac{5}{13}\,\mathbf{i} + \frac{12}{13}\,\mathbf{j}$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$

11-17 Halle la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, $(0, \pi/3)$, $\mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$

12. $g(r, s) = \tan^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

13. $g(s, t) = s\sqrt{t}$, $(2, 4)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

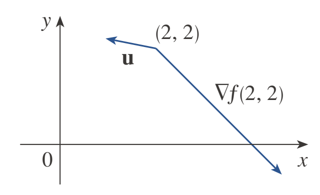
14. $g(u, v) = u^2 e^{-v}$, $(3, 0)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z$, $(1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 2 \rangle$

16. $f(x, y, z) = xy^2 \tan^{-1} z$, $(2, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

17. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

18. Use la figura para estimar $D_u f(2, 2)$.



19. Determine la derivada direccional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ at $P(2, 8)$ en $P(2, 8)$ en la dirección de $Q(5, 4)$.

20. Determine la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy^2z^3$ en $P(2, 1, 1)$ en la dirección de $Q(0, -3, 5)$.

21-26 Determine la máxima razón de cambio de f en el punto dado y la dirección en la que ocurre.

21. $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$, $(4, 1)$

22. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = x \ln(yz)$, $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$

25. $f(x, y, z) = x/(y + z)$, $(8, 1, 3)$

26. $f(p, q, r) = \arctan(pqr)$, $(1, 2, 1)$

27. (a) Demuestre que una función derivable f disminuye de manera más rápida en $\boldsymbol{x}$ en la dirección opuesta al vector gradiente, es decir, en la dirección de $-\nabla f(\mathbf{x})$.
(b) Use el resultado del inciso (a) para determinar la dirección en la que la función $f(x, y) = x^4 y - x^2 y^3$ disminuye a máxima velocidad en el punto $(2, -3)$.

28. Encuentre las direcciones en las que la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + xy^3$ en el punto $(2, 1)$ tiene el valor 2.

29. Encuentre todos los puntos en los que la dirección del cambio más rápido de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. Cerca de una boya, la profundidad de un lago en el punto con coordenadas (x, y) es $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, donde x, y y z se miden en metros. Un pescador en un pequeño bote parte del punto $(80, 60)$ y se mueve hacia la boya, la cual se localiza en $(0, 0)$. ¿El agua bajo el bote es más profunda o más superficial cuando él parte? Explique su respuesta.

31. La temperatura T en una pelota de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la pelota, que se toma como el origen. La temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es de 120°.
(a) Determine la razón de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en dirección al punto $(2, 1, 3)$.
(b) Demuestre que en cualquier punto en la pelota la dirección de mayor incremento en temperatura está dada por un vector que apunta al origen.

32. La temperatura en un punto (x, y, z) está dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2 - 3y^2 - 9z^2}$$

donde T se mide en °C y x, y, z en metros.
(a) Determine la razón de cambio de temperatura en el punto $P(2, -1, 2)$ en dirección al punto $(3, -3, 3)$.
(b) ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en P?
(c) Determine la razón de incremento máxima en P.

33. Suponga que en cierta región del espacio el potencial eléctrico V está dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
(a) Encuentre la razón de cambio de potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) ¿En qué dirección cambia más rápido V en P?
(c) ¿Cuál es la máxima razón de cambio en P?

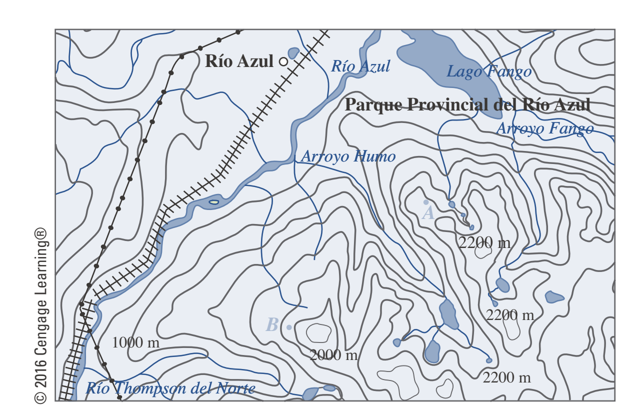
34. Suponga que sube una colina cuya forma está dada por la ecuación $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$, donde x, y y z se miden en metros, y que usted se encuentra en un punto con coordenadas $(60, 40, 966)$. El eje x positivo apunta al este y el eje y positivo al norte.
(a) Si camina hacia el sur, ¿empezará a ascender o a descender? ¿A qué razón?

(b) Si camina al noreste, ¿comenzará a ascender o a descender? ¿A qué razón?

(c) ¿En qué dirección la pendiente es mayor? ¿Cuál es la razón de ascenso en esa dirección? ¿A qué ángulo sobre la horizontal comienza la trayectoria en esa dirección?

35. Sea f una función de dos variables que tiene derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ y $D(6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 26. Determine la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

36. Se muestra un mapa topográfico del Parque Provincial del Río Azul, en la Columbia Británica. Dibuje las curvas de descenso más pronunciado desde el punto A (descenso al Lago Fango) y desde el punto B.



37. Demuestre que la operación de tomar un gradiente de una función tiene la propiedad dada. Suponga que u y v son funciones derivables de x y y y que a, b son constantes.

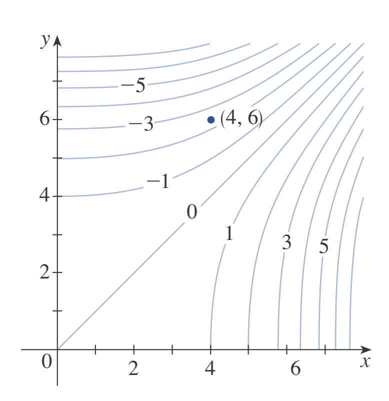
(a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$

(b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$

(d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Trace el vector gradiente $\nabla f(4, 6)$ para la función f cuyas curvas de nivel se muestran. Explique cómo determinó la dirección y longitud de este vector.



39. La **segunda derivada direccional** de $f(x, y)$ es

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) = D_{\mathbf{u}}[D_{\mathbf{u}} f(x, y)]$$

Si $f(x, y) = x^3 + 5x^2y + y^3$ y $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, calcule $D_{\mathbf{u}}^2 f(2, 1)$.

40. (a) Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ es un vector unitario y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}a^2 + 2f_{xy}ab + f_{yy}b^2$$

(b) Encuentre la segunda derivada direccional de $f(x, y) = xe^{2y}$ en la dirección de $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$.

41-46 Encuentre ecuaciones de (a) el plano tangente y (b) la recta normal a la superficie dada, en el punto especificado.

41. $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10, \quad (3, 3, 5)$

42. $x = y^2 + z^2 + 1, \quad (3, 1, -1)$

43. $xy^2z^3 = 8, \quad (2, 2, 1)$

44. $y = x^2 - z^2, \quad (4, 7, 3)$

45. $xyz^2 = 6, \quad (3, 2, 1)$

46. $x^4 + y^4 + z^4 = 3x^2y^2z^2, \quad (1, 1, 1)$

47-48 Use una computadora para graficar la superficie, el plano tangente y la recta normal en la misma pantalla. Elija cuidadosamente el dominio para que evite planos verticales extraños. Seleccione el punto de vista de tal manera que obtenga una vista óptima de los tres objetos.

47. $xy + yz + zx = 3, \quad (1, 1, 1)$

48. $xyz = 6, \quad (1, 2, 3)$

49. Si $f(x, y) = xy$, determine el vector gradiente $\nabla f(3, 2)$ y úselo para hallar la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 6$ en el punto $(3, 2)$. Trace la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

50. Si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, determine el vector gradiente $\nabla g(1, 2)$ y úselo para hallar la recta tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 1$ en el punto $(1, 2)$. Trace la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

51. Demuestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

52. Determine la ecuación del plano tangente el hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ en (x_0, y_0, z_0) y exprésela en una forma similar a la del ejercicio 51.

53. Demuestre que la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

54. ¿En qué punto en el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + z = 1$?

55. ¿Hay puntos en el hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente sea paralelo al plano $z = x + y$?

56. Demuestre que el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ son tangentes entre sí en el punto (1, 1, 2). (Esto significa que tienen un plano tangente común en este punto.)

57. Demuestre que todos los planos tangentes al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasan por el origen.

58. Demuestre que todas las rectas normales a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pasan por el centro de la esfera.

59. ¿Dónde interseca la recta normal al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 2) con el paraboloide por segunda vez?

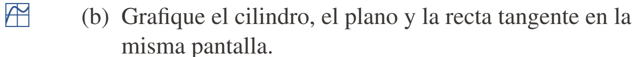
60. ¿En qué puntos la recta normal que pasa por el punto (1, 2, 1) en el elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$ interseca la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 102$?

61. Demuestre que la suma de las intersecciones en x, y y z de todos los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ es una constante.

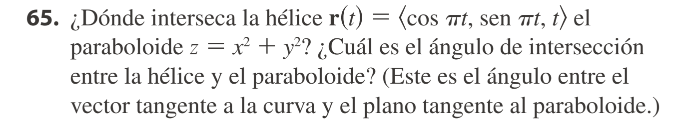
62. Demuestre que las pirámides separadas del primer octante por cualquier plano tangente a la superficie $xyz = 1$ en puntos en el primer octante deben tener el mismo volumen.

63. Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 9$ en el punto (–1, 1, 2).

64. (a) El plano $y + z = 3$ interseca el cilindro $x^2 + y^2 = 5$ en una elipse. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta tangente a esta elipse en el punto (1, 2, 1).



(b) Grafique el cilindro, el plano y la recta tangente en la misma pantalla.



65. ¿Dónde interseca la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, t \rangle$ el paraboloide $z = x^2 + y^2$? ¿Cuál es el ángulo de intersección entre la hélice y el paraboloide? (Este es el ángulo entre el vector tangente a la curva y el plano tangente al paraboloide.)

66. La hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(\pi t/2), \operatorname{sen}(\pi t/2), t \rangle$ interseca la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ en dos puntos. Determine el ángulo de intersección en cada punto.

67. (a) Dos superficies se llaman **ortogonales** en un punto de intersección si sus rectas normales son perpendiculares en ese punto. Demuestre qué superficies, con las ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en un punto P donde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ y $\nabla G \neq \mathbf{0}$ si, y solo si

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0 \quad \text{en } P$$

(b) Use el inciso (a) para demostrar que las superficies $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ son ortogonales en todos los puntos de intersección. ¿Puede ver por qué esto es cierto sin usar el cálculo?

68. (a) Demuestre que la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ es continua y que las derivadas parciales f_x y f_y existen en el origen pero que las derivadas direccionales en todas las demás direcciones no existen.

(b) Grafique f cerca del origen y comente cómo esta gráfica confirma el inciso (a).

69. Suponga que las derivadas direccionales de $f(x, y)$ son conocidas en un punto dado en dos direcciones no paralelas dadas por los vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Es posible determinar ∇f en este punto? De ser así, ¿cómo lo haría?

70. Demuestre que si $z = f(x, y)$ es derivable en $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[*Sugerencia*: use directamente la definición 14.4.7.]

14.7 Valores máximos y mínimos

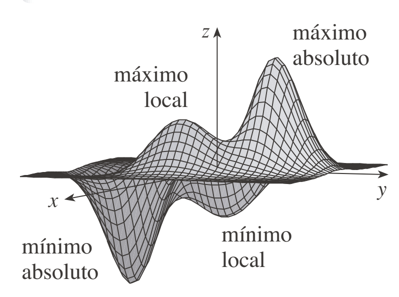


FIGURA 1

Como se vio en el capítulo 4, uno de los principales usos de las derivadas ordinarias es encontrar valores máximos y mínimos (valores extremos). En esta sección se verá cómo usar derivadas parciales para localizar máximos y mínimos de funciones de dos variables. En particular, en el ejemplo 6 se verá cómo maximizar el volumen de una caja sin tapa si tiene una cantidad fija de cartón para trabajar.

Examine las cumbres y valles de la gráfica de f que aparece en la figura 1. Hay dos puntos (a, b) donde f tiene un *máximo local*, es decir, donde $f(a, b)$ es mayor que los valores cercanos de $f(x, y)$. El mayor de esos dos valores es el *máximo absoluto*. De igual manera, f tiene dos *mínimos locales*, donde $f(a, b)$ es menor que los valores cercanos. El menor de estos dos valores es el *mínimo absoluto*.

1 Definición Una función de dos variables tiene un **máximo local** en (a, b) si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b). [Esto significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en algún disco con centro (a, b).] El número $f(a, b)$ se llama **valor máximo local**. Si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b), f tiene un **mínimo local** en (a, b) y $f(a, b)$ es un **valor mínimo local**.

Si las desigualdades de la definición 1 son válidas para todos los puntos (x, y) en el dominio de f, entonces f tiene un **máximo absoluto** (o **mínimo absoluto**) en (a, b).

Nótese que la conclusión del teorema 2 puede enunciarse en la notación de vectores gradiente como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

2 Teorema Si f tiene un máximo o mínimo local en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden de f no existen, $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

COMPROBACIÓN Sea $g(x) = f(x, b)$. Si f tiene un máximo (o mínimo) local en (a, b), g tiene un máximo (o mínimo) local en a, así que $g'(a) = 0$ por el teorema de Fermat (véase al teorema 4.1.4). Pero $g'(a) = f_x(a, b)$ (véase la ecuación 14.3.1), de manera que $f_x(a, b) = 0$. De igual forma, al aplicar el teorema de Fermat a la función $G(y) = f(a, y)$ se obtiene $f_y(a, b) = 0$. ■

Si se pone $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ en la ecuación de un plano tangente (ecuación 14.4.2), se obtiene $z = z_0$. Así, la interpretación geométrica del teorema 2 es que, si la gráfica de f tiene un plano tangente en un máximo o mínimo local, el plano tangente debe ser horizontal.

Un punto (a, b) se llama **punto crítico** (o *punto estacionario*) de f si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de estas derivadas parciales no existe. El teorema 2 indica que si f tiene un máximo o mínimo local en (a, b), entonces (a, b) es un punto crítico de f. Sin embargo, como en el cálculo de una variable, no todos los puntos críticos dan origen a máximos o mínimos. En un punto crítico, una función podría tener un máximo local o un mínimo local, o ninguno de ellos.

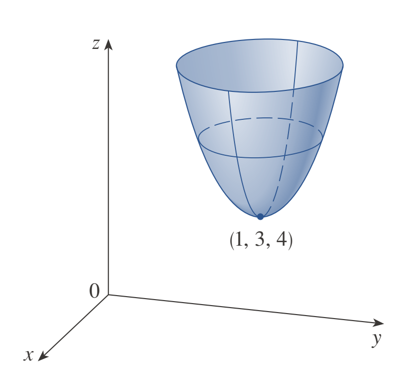


FIGURA 2
$z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Entonces,

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Estas derivadas parciales son iguales a 0 cuando $x = 1$ y $y = 3$, así que el único punto crítico es $(1, 3)$. Al completar el cuadrado se descubre que

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Como $(x - 1)^2 \geqslant 0$ y $(y - 3)^2 \geqslant 0$, se tiene $f(x, y) \geqslant 4$ para todos los valores de x y y. Por tanto, $f(1, 3) = 4$ es un mínimo local, y de hecho es el mínimo absoluto de f. Esto puede confirmarse geométricamente en la gráfica de f, que es el paraboloide elíptico con vértice $(1, 3, 4)$ que aparece en la figura 2. ■

EJEMPLO 2 Determine los valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

SOLUCIÓN Como $fx = -2x$ y $f_y = 2y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Nótese que para puntos en el eje x se tiene $y = 0$, y $= 0$, así que $f(x, y) = -x^2, < 0$ (si $x \neq 0$). Sin embargo, para puntos en el eje y se tiene $x = 0$, así que $f(x, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). En consecuencia, todos los discos con centro $(0, 0)$ contienen puntos donde f adopta valores positivos, así como puntos en los que f adopta valores negativos. Por tanto, $f(0, 0) = 0$ no puede ser un valor extremo para f, por lo que f no tiene ningún valor extremo. ■

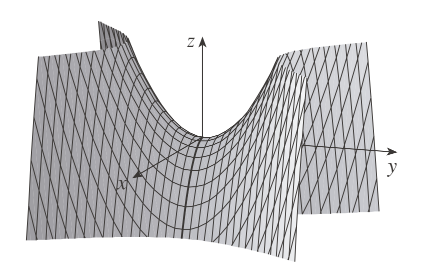


FIGURA 3
$z = y^2 - x^2$

El ejemplo 2 ilustra el hecho de que una función no necesariamente debe tener un valor máximo o mínimo en un punto crítico. La figura 3 muestra cómo es posible esto. La gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, que tiene un plano tangente horizontal ($z = 0$) en el origen. Puede verse que $f(0, 0) = 0$ es un máximo en la dirección del eje x pero un mínimo en la dirección del eje y. Cerca del origen, la gráfica tiene la forma de una silla de montar, y por eso $(0, 0)$ se llama un *punto silla* de f.

Un paso de montaña también tiene forma de silla de montar. Como lo ilustra la fotografía de la formación geológica, para quienes escalan en una dirección, el punto silla es el punto más bajo en su ruta, mientras que para quienes viajan en una dirección diferente el punto silla es el punto más alto.

Debe ser capaz de determinar si una función tiene o no un valor extremo en un punto crítico. La prueba siguiente, que se comprobará al final de esta sección, es análoga a la prueba de la segunda derivada para funciones de una variable.



Fotografía de Stan Wagon, Macalester College

3 Prueba de la segunda derivada Suponga que las segundas derivadas parciales de f son continuas en un disco con centro (a, b) y que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ [es decir, que (a, b) es un punto crítico de f]. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.
(b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces, $f(a, b)$ es un máximo local.
(c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo ni un mínimo local.

NOTA 1 En el caso (c), el punto (a, b) se llama **punto silla** de f y la gráfica de f cruza su plano tangente en (a, b).

NOTA 2 Si $D = 0$, la prueba no aporta ninguna información: f podría tener un máximo local o mínimo local en (a, b), o (a, b) podría ser un punto silla de f.

NOTA 3 Para recordar la fórmula para D, es útil escribirla como una determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

SOLUCIÓN Primero se localizan los puntos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Al igualar con 0 estas derivadas parciales, se obtienen las ecuaciones

$$x^3 - y = 0 \qquad \text{y} \qquad y^3 - x = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, se sustituye $y = x_3$ de la primera ecuación en la segunda. Esto da

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

de manera que hay tres raíces reales: $x = 0, 1, -1$. Los tres puntos críticos son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.



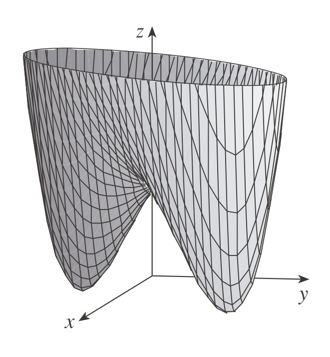


FIGURA 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Luego se calculan las segundas derivadas parciales y $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, del caso (c) de la prueba de la segunda derivada se sigue que el origen es un punto silla; es decir, que f no tiene ningún máximo ni mínimo local en $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, con base en el caso (a) de la prueba se advierte que $f(1, 1) = -1$ es un mínimo local. De igual forma, se tiene $D(-1, -1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, así que $f(-1, -1) = -1$ también es un mínimo local.

La gráfica de f aparece en la figura 4. ■

Un mapa de contorno de la función f del ejemplo 3 se muestra en la figura 5. Las curvas de nivel cerca de (1, 1) y (–1, –1) son de forma ovalada e indican que conforme se alejan de (1, 1) o (–1, –1) en cualquier dirección, los valores de f aumentan. Las curvas de nivel cerca de (0, 0) parecen hipérbolas. Revelan que conforme se alejan del origen (donde el valor de f es 1), los valores de f disminuyen en algunas direcciones pero aumentan en otras. Así, el mapa de contorno sugiere la presencia de los mínimos y el punto silla que se determinaron en el ejemplo 3.

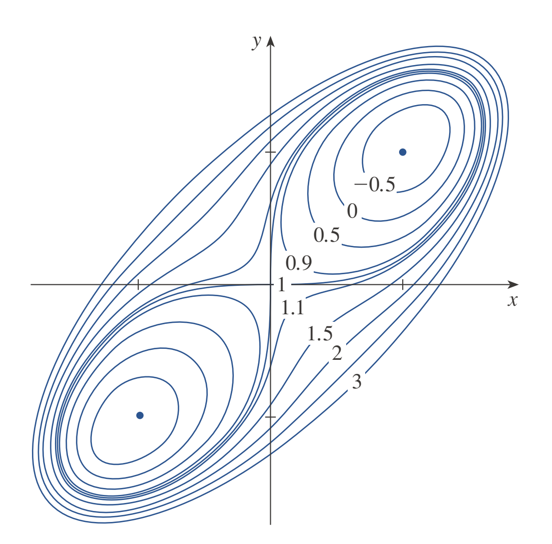


FIGURA 5

EJEMPLO 4 Determine y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Determine igualmente el punto más alto en la gráfica de f.

SOLUCIÓN Las derivadas parciales de primer orden son

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \qquad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

TEC En el Módulo 14.7 pueden usarse mapas de contorno para estimar las ubicaciones de puntos críticos.

Así, para determinar los puntos críticos se deben resolver las ecuaciones

$$\boxed{4} \qquad 2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$$

$$\boxed{5} \qquad 5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$$

En la ecuación 4 se ve que

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad 10y - 5 - 2x^2 = 0$$

En el primer caso ($x = 0$), la ecuación 5 se convierte en $-4y(1 + y^2) = 0$, así que $y = 0$ y se tiene el punto crítico (0, 0).

En el segundo caso ($10y - 5 - 2x^2 = 0$), se obtiene

$$\boxed{6} \qquad x^2 = 5y - 2.5$$

y al poner esto en la ecuación 5 se tiene $25y - 12.5 - 4y - 4y^3 = 0$. Así, se debe resolver la ecuación cúbica

$$\boxed{7} \qquad 4y^3 - 21y + 12.5 = 0$$

Usando una calculadora graficadora o computadora para graficar la función

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12.5$$

como en la figura 6, se advierte que la ecuación 7 tiene tres raíces reales. Al acercarse, se puede determinar las raíces con cuatro decimales:

$$y \approx -2.5452 \qquad y \approx 0.6468 \qquad y \approx 1.8984$$

FIGURA 6

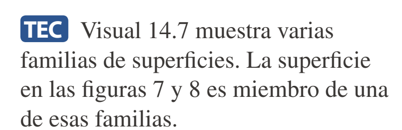
(O bien, es posible haber usado el método de Newton o resuelto numéricamente con una calculadora o computadora para localizar esas raíces.) Con base en la ecuación 6, los correspondientes valores x están dados por

$$x = \pm\sqrt{5y - 2.5}$$

Si $y \approx -2.5452$, x no tiene valores reales correspondientes. Si $y \approx 0.6468$, entonces $x \approx \pm 0.8567$. Si $y \approx 1.8984$, entonces $x \approx \pm 2.6442$. Así, hay un total de cinco puntos críticos, los cuales se analizan en la tabla siguiente. Todas las cantidades se redondearon a dos decimales.

Punto crítico	Valor de f	f_{xx}	D	Conclusión
$(0, 0)$	0.00	-10.00	80.00	máximo local
$(\pm 2.64, 1.90)$	8.50	-55.93	2488.72	máximo local
$(\pm 0.86, 0.65)$	-1.48	-5.87	-187.64	punto silla

Las figuras 7 y 8 muestran dos vistas de la gráfica de f y se ve que la superficie se abre hacia abajo. [Esto también puede verse en la expresión para $f(x, y)$: los términos dominantes son $-x^4 - 2y^4$ cuando $|x|$ y $|y|$ son grandes.] Al comparar los valores de f en sus puntos máximos locales, se advierte que el valor máximo absoluto de f es $f(\pm 2.64, 1.90) \approx 8.50$. En otras palabras, los puntos más altos en la gráfica de f son $f(\pm 2.64, 1.90, 8.50)$.



TEC Visual 14.7 muestra varias familias de superficies. La superficie en las figuras 7 y 8 es miembro de una de esas familias.

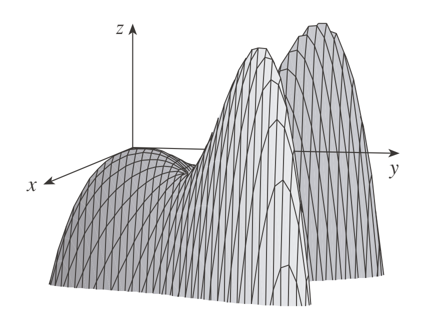


FIGURA 7

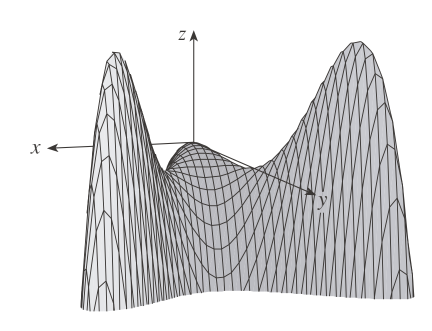


FIGURA 8

Los cinco puntos críticos de la función f del ejemplo 4 aparecen en negro en el mapa de contorno de f de la figura 9.

FIGURA 9

EJEMPLO 5 Determine la distancia más corta del punto (1, 0, –2) al plano $x + 2y + z = 4$.

SOLUCIÓN La distancia desde cualquier punto (x, y, z) al punto (1, 0, –2) es

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2}$$

pero si (x, y, z) reside en el plano $x + 2y + z = 4$, entonces $z = 4 - x - 2y$ y entonces se tiene $d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$. Se puede minimizar d minimizando la expresión, más simple,

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Al resolver las ecuaciones

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

se descubre que el único punto crítico es $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Como $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$, y $f_{yy} = 10$, se tiene $D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$ y $f_{xx} > 0$, así que por la prueba de la segunda derivada f tiene un mínimo local en $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Intuitivamente, es posible ver que este mínimo local es en realidad un mínimo absoluto porque debe haber un punto en el plano dado que sea el más cercano a (1, 0, –2). Si $x = \frac{11}{6}$ y $y = \frac{5}{3}$, entonces

El ejemplo 5 también podría resolverse usando vectores. Compare con los métodos de la sección 12.5.

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2} = \tfrac{5}{6}\sqrt{6}$$ ■

La distancia más corta de (1, 0 –2) al plano $x + 2y + z = 4$ es $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

EJEMPLO 6 Una caja rectangular sin tapa debe hacerse con 12 m² de cartón. Determine el volumen máximo de esa caja.

SOLUCIÓN Sean la longitud, ancho y alto de la caja (en metros) x, y y z, como se muestra en la figura 10. Entonces el volumen de la caja es

$$V = xyz$$

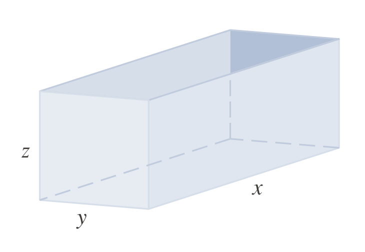


FIGURA 10

Se puede expresar V como una función de solo dos variables x y y usando el hecho de que el área de los cuatro lados y el fondo de la caja es

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Al despejar z en esta ecuación se obtiene $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, de modo que la expresión para V se convierte en

$$V = xy\frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Calcule las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Si V es un máximo, entonces $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, pero $x = 0$ o $y = 0$ da $V = 0$, así que se deben resolver las ecuaciones

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Estas implican que $x^2 = y^2$, y por tanto $x = y$. (Obsérvese que x y y deben ser positivas en este problema.) Si se pone $x = y$ en cualquier ecuación se obtiene $12 - 3x^2 = 0$, lo que da $x = 2$, $y = 2$ y $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$.

Se podría usar la prueba de la segunda derivada para demostrar que esto da un máximo local de V, o simplemente es posible argumentar, con base en la naturaleza física de este problema, que debe haber un volumen máximo absoluto, el cual debe ocurrir en un punto crítico de V, de manera que debe ocurrir cuando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Entonces $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, así que el volumen máximo de la caja es 4 m^3. ■

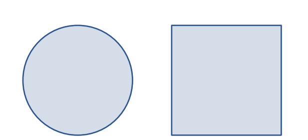
Valores máximos y mínimos absolutos

Para una función f de una variable, el teorema de los valores extremos establece que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, f tiene un valor mínimo absoluto y un valor máximo absoluto. De acuerdo con el método del intervalo cerrado de la sección 4.1, esos valores se determinan evaluando f no solo en los números críticos, sino también en los puntos extremos a y b.

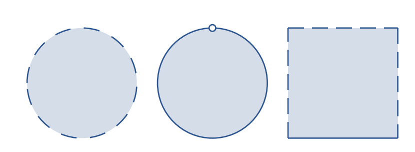
Existe una situación similar para funciones de dos variables. Así como un intervalo cerrado contiene sus puntos extremos, un **conjunto cerrado** en $\mathbb{R}^2$ es aquel que contiene todos sus puntos frontera. [Un punto frontera de D es un punto (a, b) tal que todos los discos con centro (a, b) contienen puntos en D y también ningún punto en D.] Por ejemplo, el disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

que consta de todos los puntos en o dentro del círculo $x^2 + y^2 = 1$, es un conjunto cerrado porque contiene todos sus puntos frontera (los cuales son los puntos en el círculo $x^2 + y^2 = 1$). Pero si se omitiera incluso un solo punto en la curva frontera, el conjunto no sería cerrado. (Véase la figura 11.)



(a) Conjuntos cerrados



(b) Conjuntos no cerrados

FIGURA 11

Un **conjunto acotado** en $\mathbb{R}^2$ es aquel que está contenido en un disco. En otras palabras, es de extensión finita. Así, en términos de conjuntos cerrados y acotados, se puede enunciar la contraparte del teorema de los valores extremos en dos dimensiones.

> **8 Teorema de valores extremos para funciones de dos variables** Si f es continua en un conjunto cerrado y acotado D en $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D.

Para hallar los valores extremos garantizados por el teorema 8, hay que señalar que, por el teorema 2, si f tiene un valor extremo en (x_1, y_1), entonces (x_1, y_1) es un punto crítico de f o un punto acotado de D. Así, se tiene la extensión del método del intervalo cerrado siguiente.

9 Para determinar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua f en un conjunto cerrado y acotado D:

1. Determine los valores de f en los puntos críticos de f en D.
2. Determine los valores extremos de f en la frontera de D.
3. El mayor de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el menor de esos valores es el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 7 Halle los valores máximo y mínimo absoluto de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ en el rectángulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

SOLUCIÓN Como f es una polinomial, es continua en el rectángulo cerrado y acotado D, así que el teorema 8 dice que hay tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. De acuerdo con el paso 1 en (9), primero se determinan los puntos críticos. Estos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

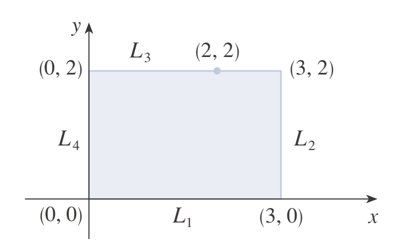


FIGURA 12

así que el único punto crítico es $(1, 1)$, y el valor de f ahí es $f(1, 1) = 1$.

En el paso 2 se examinan los valores de f en la frontera de D, los que constan de los cuatro segmentos de recta L_1, L_2, L_3, L_4 que aparecen en la figura 12. En L_1 se tiene $y = 0$ y

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Esta es una función creciente de x, de manera que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(3, 0) = 9$. En L_2 hay $x = 3$ y

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

Esta es una función decreciente de y, así que su valor máximo es $f(3, 0) = 9$ y su valor mínimo es $f(3, 2) = 1$. En L_3 se tiene $y = 2$ y

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

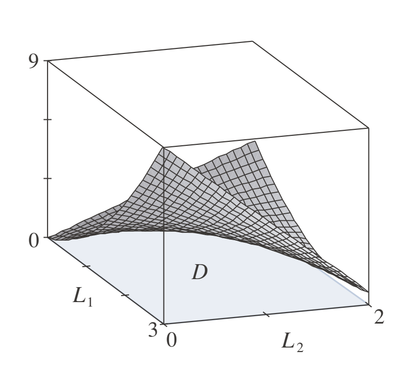


FIGURA 13
$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

Por los métodos del capítulo 4, o simplemente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, se advierte que el valor mínimo de esta función es $f(2, 2) = 0$ y el valor máximo es $f(0, 2) = 4$. Por último, en L_4 hay $x = 0$ y

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

con valor máximo $f(0, 2) = 4$ y valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Así, en la frontera, el valor mínimo de f es 0 y el máximo es 9.

En el paso 3 se comparan estos valores con el valor $f(1, 1) = 1$ en el punto crítico y se concluye que el valor máximo absoluto de f en D es $f(3, 0) = 9$ y el valor mínimo absoluto es $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. La figura 13 muestra la gráfica de f. ■

Finaliza esta sección con una comprobación de la primera parte de la prueba de la segunda derivada. La parte (b) tiene una prueba similar.

COMPROBACIÓN DEL TEOREMA 3, PARTE (a) Calcule la derivada direccional de segundo orden de f en la dirección de $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$. La derivada de primer orden está dada por el teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}} f = f_x h + f_y k$$

Al aplicar este teorema por segunda vez se tiene

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) = \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k$$

$$= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k$$

$$= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \qquad \text{(por el teorema de Clairaut)}$$

Si se completa el cuadrado en esta expresión se obtiene

$$\boxed{10} \qquad D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Se dio que $f_{xx}(a, b) > 0$ y $D(a, b) > 0$. Pero f_{xx} y $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ son funciones continuas, así que existe un disco B con centro (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ y $D(x, y) > 0$ siempre que (x, y) está en B. Por tanto, al examinar la ecuación 10 se advierte que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ cada vez que (x, y) está en B. Esto significa que si C es la curva obtenida de la intersección de la gráfica de f con el plano vertical que pasa por $P(a, b, f(a, b))$ en la dirección de $\mathbf{u}$, C es cóncava hacia arriba en un intervalo de longitud 2δ. Esto es cierto en la dirección de todos los vectores $\mathbf{u}$, de modo que si se restringe (x, y) a B, la gráfica de f reside arriba de su plano tangente horizontal en P. Así, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cada vez que (x, y) está en B. Esto demuestra que $f(a, b)$ es un mínimo local. ■

14.7 EJERCICIOS

1. Suponga que $(1, 1)$ es un punto crítico de una función f con segundas derivadas continuas. En cada caso, ¿qué puede decirse acerca de f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 1, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 3, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponga que $(0, 2)$ es un punto crítico de una función g con segundas derivadas continuas. En cada caso, ¿qué puede decir usted acerca de g?

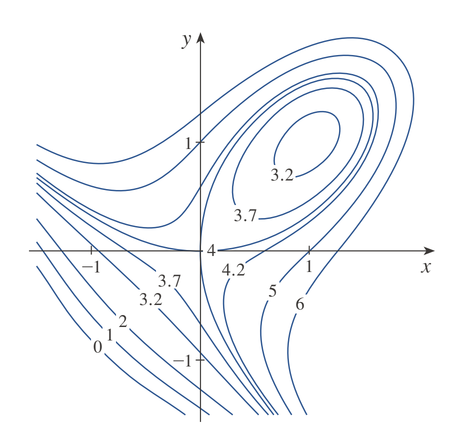
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 2, \quad g_{yy}(0, 2) = -8$

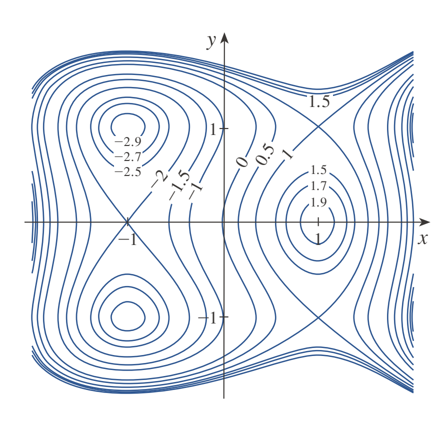
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3-4 Use las curvas de nivel en la figura para predecir la ubicación de los puntos críticos de f y si f tiene un punto silla o un máximo o mínimo local en cada punto crítico. Explique su razonamiento. Use después la prueba de la segunda derivada para confirmar sus predicciones.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5-20 Determine los valores máximos y mínimos locales y el punto o puntos silla de la función. Si tiene software de graficación tridimensional, grafique la función con un dominio y punto de vista que revelen todos los aspectos importantes de la función.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

8. $f(x, y) = y(e^x - 1)$

9. $f(x, y) = x^2 + y^4 + 2xy$

10. $f(x, y) = 2 - x^4 + 2x^2 - y^2$

11. $f(x, y) = x^3 - 3x + 3xy^2$

12. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$

13. $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$

14. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

15. $f(x, y) = e^x \cos y$

16. $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

17. $f(x, y) = xy + e^{-xy}$

18. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$

19. $f(x, y) = y^2 - 2y\cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

20. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

21. Demuestre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tiene un número infinito de puntos críticos y que $D = 0$ en cada uno. Luego demuestre que f tiene un mínimo local (y absoluto) en cada punto crítico.

22. Demuestre que $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ tiene valores máximos en $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ y valores mínimos en $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Demuestre también que f tiene una infinidad de puntos críticos adicionales y que $D = 0$ en cada uno de ellos. ¿Cuáles dan origen a valores máximos? ¿A valores mínimos? ¿A puntos silla?

23-26 Use una gráfica o curvas de nivel o ambos para estimar los valores máximos y mínimos locales y el punto o puntos silla de la función. Luego use cálculo para determinar precisamente esos valores.

23. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

24. $f(x, y) = (x - y)e^{-x^2-y^2}$

25. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

26. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4, \; 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

27-30 Use un dispositivo de graficación como en el ejemplo 4 (o el método de Newton, o resuelva numéricamente usando una calculadora o computadora) para determinar los puntos críticos de f con tres decimales. Clasifique después los puntos críticos y halle los puntos más altos o más bajos en la gráfica, si los hay.

27. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y + 2y$

28. $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

29. $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

30. $f(x, y) = 20e^{-x^2-y^2} \operatorname{sen} 3x \cos 3y, \quad |x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1$

31-38 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de f en el conjunto D.

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, D es la región triangular cerrada con vértices (2, 0), (0, 2) y (0, –2)

32. $f(x, y) = x + y - xy$, D es la región triangular cerrada con vértices (0, 0), (0, 2) y (4, 0).

33. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

34. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6y$,
$D = \{(x, y) \mid -3 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

35. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 1$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

36. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

37. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

38. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D es el cuadrilátero cuyos vértices son (–2, 3), (2, 3), (2, 2) y (–2, –2).

39. Para funciones de una variable es imposible que una función continua tenga dos máximos locales y ningún mínimo local. Pero para funciones de dos variables tales funciones existen. Demuestre que la función

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

solo tiene dos puntos críticos, pero tiene máximos locales en ambos. Use después una computadora para producir una gráfica con un dominio y punto de vista cuidadosamente elegidos para ver cómo es posible esto.

40. Si una función de una variable es continua en un intervalo y solo tiene un número crítico, un máximo local debe ser un máximo absoluto. Pero esto no es cierto para funciones de dos variables. Demuestre que la función

$$f(x, y) = 3xe^{y} - x^{3} - e^{3y}$$

tiene exactamente un punto crítico, y que f tiene un máximo local ahí que no es un máximo absoluto. Use después una computadora para producir una gráfica con dominio y punto de vista cuidadosamente elegidos para ver cómo es posible esto.

41. Encuentre la distancia más corta del punto (2, 0, –3) al plano $x + y + z = 1$.

42. Encuentre el punto en el plano $x - 2y + 3z = 6$ más cercano al punto (0, 1, 1).

43. Encuentre los puntos en el cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto (4, 2, 0).

44. Encuentre los puntos en la superficie $y^2 = 9 + xz$ más cercanos al origen.

45. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea un máximo.

46. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 12 y la suma de cuyos cuadrados sea lo más reducida posible.

47. Encuentre el volumen máximo de una caja rectangular inscrita en una esfera de radio r.

48. Encuentre las dimensiones de la caja con volumen 1000 cm^3 que tiene área mínima.

49. Encuentre el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos de coordenadas y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

50. Encuentre las dimensiones de la caja rectangular con el volumen más grande si el área total está dada como 64 cm^2.

51. Encuentre las dimensiones de una caja rectangular de volumen máximo tal que la suma de las longitudes de sus doce aristas sea una c constante.

52. La base de una pecera con volumen dado V está hecha de pizarra y los lados están hechos de vidrio. Si la pizarra cuesta cinco veces más (por unidad de área) que el vidrio, encuentre las dimensiones de la pecera que minimicen el costo de los materiales.

53. Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones que minimicen la cantidad de cartón usado.

54. Un edificio rectangular se diseña para minimizar la pérdida de calor. Las paredes este y oeste pierden calor a razón de 10 unidades/m^2 al día, las paredes norte y sur a razón de 8 unidades/m^2 al día, el piso a razón de 1 unidad/m^2 al día y el techo a razón de 5 unidades/m^2 al día. Cada pared debe ser de al menos 30 m de largo, la altura debe ser de al menos 4 m y el volumen debe ser de exactamente 4000 m^3.
(a) Determine y trace el dominio de la pérdida de calor como una función de las longitudes de los lados.
(b) Determine las dimensiones que minimicen la pérdida de calor. (Verifique tanto los puntos críticos como los puntos en la frontera del dominio.)
(c) ¿Podría diseñar un edificio con aún menos pérdida de calor si las restricciones de las longitudes de las paredes fueran eliminadas?

55. Si la longitud de la diagonal de una caja rectangular debe ser L, ¿cuál es el mayor volumen posible?

56. Un modelo para el rendimiento Y de un cultivo agrícola como una función del nivel de nitrógeno N y el nivel de fósforo P en la tierra (medidos en las unidades apropiadas) es

$$Y(N, P) = kNPe^{-N-P}$$

donde k es una constante positiva. ¿Qué niveles de nitrógeno y fósforo resultan en el mejor rendimiento?

57. El índice de Shannon (también llamado índice de Shannon-Wiener o índice de Shannon-Weaver) es una medida de la diversidad en un ecosistema. Para el caso de tres especies, se define como

$$H = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3$$

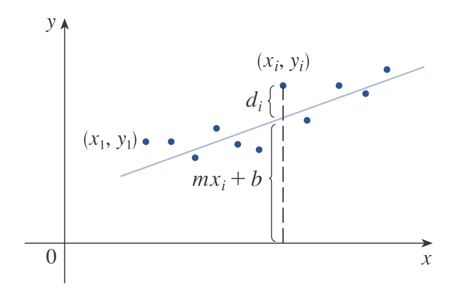
donde p_i es la proporción de especies i en el ecosistema.
(a) Exprese H como una función de dos variables usando el hecho de que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
(b) ¿Cuál es el dominio de H?
(c) Determine el valor máximo de H. ¿Para cuáles valores de p_1, p_2, p_3 ocurre?

58. Tres alelos (versiones alternativas de un gen) A, B y O determinan los cuatro tipos de sangre A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción de individuos en una población que portan dos alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

donde p, q y r son las proporciones de A, B y O en la población. Use el hecho de que $p + q + r = 1$ para demostrar que P es a lo sumo de $\frac{2}{3}$.

59. Suponga que un científico tiene razones para creer que dos cantidades x y y están relacionadas linealmente, es decir que $y = mx + b$, al menos aproximadamente, para algunos valores de m y b. El científico realiza un experimento y recolecta datos bajo la forma de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, tras de lo cual traza estos puntos. Los puntos no se sitúan exactamente en una recta, así que el científico quiere determinar constantes m y b de tal forma que la recta $y = mx + b$ "se ajuste" lo más posible a los puntos (véase la figura).





Sea $d_i = y_i - (mx_i + b)$ la desviación vertical del punto respecto a la recta. El **método de mínimos cuadrados** determina m y b de tal modo que se minimice $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, la suma de los cuadrados de estas desviaciones. Demuestre que, de acuerdo con este método, la recta de mejor ajuste se obtiene cuando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

y

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Así, la recta se determina resolviendo en estas dos ecuaciones las dos incógnitas m y b. (Véase la sección 1.2 para un análisis adicional y aplicaciones del método de mínimos cuadrados.)

60. Determine una ecuación del plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y corta el menor volumen en el primer octante.

PROYECTO DE APLICACIÓN DISEÑO DE UN CONTENEDOR DE DESECHOS

Para este proyecto localice un contenedor rectangular a fin de estudiar su forma y construcción. Luego intente determinar las dimensiones de un contenedor de diseño similar que minimicen el costo de construcción.

1. Localice primero un contenedor de desechos en su área. Estúdielo atentamente y describa todos los detalles de su construcción, y determine su volumen. Incluya un boceto del contenedor.

2. Manteniendo la forma general y método de construcción, determine las dimensiones de un contenedor del mismo volumen si usted tuviera que minimizar el costo de construcción. Use los supuestos siguientes en su análisis:

- Los lados, frente y tras deben hacerse con hojas de acero de 12 gauges (de 2.657 mm de grosor), que cuestan $8.00 dólares por metro cuadrado (incluidos todos los cortes y dobleces requeridos).
- La base debe hacerse con una hoja de acero de 10 gauges (de 3.416 mm de grosor), que cuesta $10.00 dólares por metro cuadrado.
- Las tapas cuestan aproximadamente $50.00 cada una, independientemente de sus dimensiones.
- La soldadura cuesta alrededor de $0.60 por metro, combinando material y mano de obra.

Dé una justificación de cualesquiera supuestos o simplificaciones adicionales respecto a los detalles de construcción.

3. Describa cómo podrían sus supuestos o simplificaciones afectar al resultado final.

4. Si se le contratara como consultor en esta investigación, ¿cuáles serían sus conclusiones? ¿Recomendaría alterar el diseño del contenedor? De ser así, describa los ahorros que resultarían.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO APROXIMACIONES CUADRÁTICAS Y PUNTOS CRÍTICOS

La aproximación polinomial de Taylor de funciones de una variable que se estudió en el capítulo 11 puede prolongarse a funciones de dos o más variables. Aquí investigará las aproximaciones cuadráticas de funciones de dos variables y las usará para dar una idea de la prueba de la segunda derivada para la clasificación de puntos críticos.

En la sección 14.4 se analizó la linealización de una función f de dos variables en un punto (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Recuerde que la gráfica de L es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ y que la correspondiente aproximación lineal es $f(x, y) \approx L(x, y)$. La linealización L también se llama **polinomio de Taylor de primer grado** de f en (a, b).

1. Si f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden en (a, b), el **polinomio de Taylor de segundo grado** de f en (a, b) es

$$Q(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

y la aproximación $f(x, y) \approx Q(x, y)$ se llama **aproximación cuadrática** de f en (a, b). Verifique que Q tiene las mismas derivadas parciales de primero y segundo orden que f en (a, b).

2. (a) Determine los polinomios de Taylor de primer y segundo grado L y Q de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ en $(0, 0)$.
(b) Grafique f, L y Q. Comente qué tanto L y Q se aproximan a f.

3. (a) Determine los polinomios de Taylor de primer y segundo grado L y Q para $f(x, y) = xe^y$ en $(1, 0)$.
(b) Compare los valores de L, Q y f en $(0.9, 0.1)$.
(c) Grafique f, L y Q. Comente qué tanto L y Q se aproximan a f.

4. En este problema se analizará el comportamiento del polinomio $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (sin usar la prueba de la segunda derivada) al identificar la gráfica como un paraboloide.
(a) Completando el cuadrado, demuestre que si a $\neq 0$, entonces

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right]$$

(b) Sea $D = 4ac - b^2$. Demuestre que si $D > 0$ y $a > 0$, f tiene un mínimo local en $(0, 0)$.
(c) Demuestre que si $D > 0$ y a < 0, f tiene un máximo local en $(0, 0)$.
(d) Demuestre que si $D < 0$, entonces $(0. 0)$ es un punto silla.

5. (a) Suponga que f es cualquier función con derivadas parciales continuas de segundo orden tales que $f(0, 0) = 0$ y que $(0, 0)$ es un punto crítico de f. Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de segundo grado Q de f en $(0, 0)$.
(b) ¿Qué puede concluir sobre Q con base en el problema 4?
(c) En vista de la aproximación cuadrática $f(x, y) \approx Q(x, y)$, ¿qué sugiere el inciso (b) acerca de f?

14.8 Multiplicadores de Lagrange

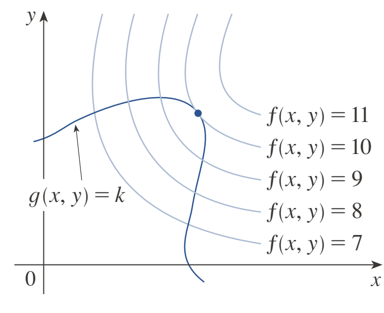


FIGURA 1

TEC Visual 14.8 anima la figura 1 tanto para curvas de nivel como para superficies de nivel.

En el ejemplo 14.7.6 se maximizó una función de volumen $V = xyz$ sujeta a la restricción $2xz + 2yz + xy = 12$, que expresaba la condición secundaria de que el área era de 12 m^2. En esta sección se presentará el método de Lagrange para maximizar o minimizar una función general $f(x, y, z)$ sujeta a una restricción (o condición secundaria) de la forma $g(x, y, z) = k$.

Es más fácil explicar la base geométrica del método de Lagrange para funciones de dos variables. Así, comience tratando de determinar los valores extremos de (x, y) sujetos a una restricción de la forma $g(x, y) = k$. En otras palabras, buscaremos los valores extremos de $f(x, y)$ cuando el punto (x, y) está restringido a residir en la curva de nivel $g(x, y) = k$. La figura 1 muestra esta curva junto con varias curvas de nivel de f. Estas tienen las ecuaciones $f(x, y) = c$, donde $c = 7, 8, 9, 10, 11$. Maximizar $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = k$

consiste en hallar el mayor valor de c tal que la curva de nivel $f(x, y) = c$ interseque $g(x, y) = k$. En la figura 1 parece que esto sucede cuando esas curvas se tocan apenas entre sí, es decir, cuando tienen una recta tangente común. (De lo contrario, el valor de c podría aumentar más.) Esto significa que las rectas normales en el punto (x_0, y_0) donde se tocan son idénticas. Así, los vectores gradiente son paralelos; es decir, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algún escalar λ.

Este tipo de argumento también se aplica al problema de encontrar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. Así, el punto (x, y, z) está restringido a residir en la superficie de nivel S con ecuación $g(x, y, z) = k$. En vez de las curvas de nivel de la figura 1, considere las superficies de nivel $f(x, y, z) = c$ y argumente que si el valor máximo de f es $f(x_0, y_0, z_0) = c$, la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ es tangente a la superficie de nivel $g(x, y, z) = k$, y por tanto los correspondientes vectores gradiente son paralelos.

Este argumento intuitivo puede precisarse de la forma siguiente. Suponga que una función f tiene un valor extremo en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en la superficie S y sea C una curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ que reside en S y pasa por P. Si t_0 es el valor paramétrico correspondiente al punto P, entonces $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. La función compuesta $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ representa los valores que f adopta en la curva C. Como f tiene un valor extremo en (x_0, y_0, z_0), de esto resulta que h tiene un valor extremo en t_0, de modo que $h'(t_0) = 0$. Pero si f es derivable, se puede usar la regla de la cadena para escribir

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \end{aligned}$$

Esto demuestra que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ a todas esas curvas C. Pero por la sección 14.6 se sabe que el vector gradiente de g, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ para todas esas curvas. (Véase la ecuación 14.6.18.) Esto significa que los vectores gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ deben ser paralelos. Por tanto, si $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, existe un número λ tal que

1 $$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Los multiplicadores de Lagrange deben su nombre al matemático ítalo-francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Véase un boceto biográfico de Lagrange en la página 289.

El número λ en la ecuación 1 se llama **multiplicador de Lagrange**. El procedimiento basado en la ecuación 1 es como sigue.

Al derivar el método de Lagrange se supuso que $\nabla g \neq \mathbf{0}$. En cada uno de nuestros ejemplos puede verificar que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos donde $g(x, y, z) = k$. Véase el ejercicio 25 para analizar qué puede fallar si $\nabla g = \mathbf{0}$.

Método de multiplicadores de Lagrange Para determinar los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z)$ sujetos a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores extremos existen y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = k$$

(b) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que resulten del paso (a). El mayor de esos valores es el valor máximo de f; el menor es el valor mínimo de f.

Si se escribe la ecuación vectorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ en términos de componentes, las ecuaciones del paso (a) se convierten en

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k$$



Este es un sistema de cuatro ecuaciones con las cuatro incógnitas x, y, z y λ, pero no es necesario hallar valores explícitos para λ.

Para funciones de dos variables, el método de multiplicadores de Lagrange es similar al método que se acaba de describir. Para determinar los valores extremos de $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = k$ se buscan valores de x, y y λ tales que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = k$$

Esto equivale a resolver tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

La primera ilustración del método de Lagrange es para reconsiderar el problema dado en el ejemplo 14.7.6.

EJEMPLO 1 Una caja rectangular sin tapa debe hacerse con 12 m^2 de cartón. Determine el volumen máximo de esa caja.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 14.7.6, sean x, y y z la longitud, ancho y alto, respectivamente, de la caja en metros. Entonces, se desea maximizar

$$V = xyz$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Usando el método de multiplicadores de Lagrange, busque valores de x, y, z y λ tales que $\nabla V = \lambda \nabla g$ y $g(x, y, z) = 12$. Esto da las ecuaciones

$$V_x = \lambda g_x$$
$$V_y = \lambda g_y$$
$$V_z = \lambda g_z$$
$$2xz + 2yz + xy = 12$$

que se convierten en

2 $$yz = \lambda(2z + y)$$

3 $$xz = \lambda(2z + x)$$

4 $$xy = \lambda(2x + 2y)$$

5 $$2xz + 2yz + xy = 12$$

No existen reglas generales para resolver sistemas de ecuaciones. A veces se requiere un poco de ingenio. En el ejemplo siguiente es notorio que si se multiplica (2) por x, (3) por y y (4) por z, los miembros izquierdos de estas ecuaciones serán idénticos. Haciendo esto, se tiene

Otro método para resolver el sistema de ecuaciones (2-5) es despejar λ en cada una de las ecuaciones 2, 3 y 4 e igualar después las expresiones resultantes.

6 $$xyz = \lambda(2xz + xy)$$

7 $$xyz = \lambda(2yz + xy)$$

8 $$xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Observe que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaría que $yz = xz = xy$ de (2), (3)



y (4), y esto contradiría (5). Por tanto, de (6) y (7) se tiene

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

lo que da $xz = yz$. Pero $z \neq 0$ (ya que $z = 0$ daría $V = 0$), así que $x = y$. De (7) y (8) es

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

lo que da $2xz = xy$, y por tanto (ya que $x \neq 0$) $y = 2z$. Si se pone ahora $x = y = 2z$ en (5), se obtiene

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Como x, y y z son positivas, se tiene $z = 1$, así que $x = 2$ y $y = 2$. Esto coincide con la respuesta en la sección 14.7. ■

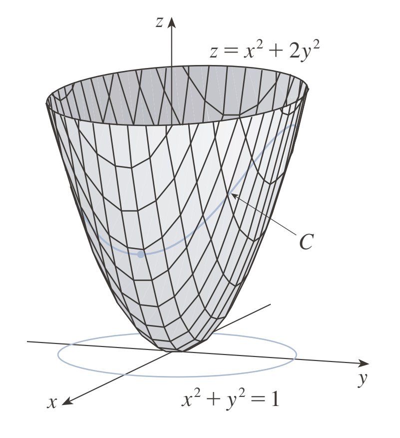




FIGURA 2

EJEMPLO 2 Determine los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Se piden los valores extremos de f sujetos a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Usando los multiplicadores de Lagrange, se resuelven las ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$ y $g(x, y) = 1$, las que pueden escribirse como

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

o bien

9 $$2x = 2x\lambda$$

10 $$4y = 2y\lambda$$

11 $$x^2 + y^2 = 1$$

De (9) se tiene que $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces (11) da $y = \pm 1$. Si $\lambda = 1$, entonces $y = 0$ de (10), así que (11) da $x = \pm 1$. Por tanto, f tiene posibles valores extremos en los puntos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Al evaluar f en esos cuatro puntos se descubre que

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

La geometría detrás del uso de los multiplicadores de Lagrange en el ejemplo 2 se muestra en la figura 3. Los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ corresponden a las curvas de nivel que tocan el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

En consecuencia, el valor máximo de f en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(\pm 1, 0) = 1$. En términos geométricos, estos corresponden a los puntos más alto y más bajo en la curva C de la figura 2, donde C consta de aquellos puntos en el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ que se encuentran directamente arriba del círculo de restricción $x^2 + y^2 = 1$. ■

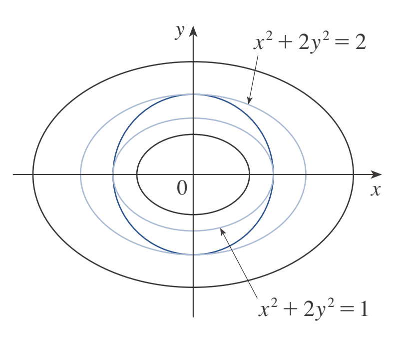


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Determine los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

SOLUCIÓN De acuerdo con el procedimiento en (14.7.9), se compararon los valores de f en los puntos críticos con los valores en los puntos de la frontera. Como $f_x = 2x$ y $f_y = 4y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Compare el valor de f en ese punto con los valores extremos en la frontera del ejemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Por tanto, el valor máximo de f en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$. ■

EJEMPLO 4 Halle los puntos en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están más cerca y más lejos del punto (3, 1, –1).

SOLUCIÓN La distancia desde un punto (x, y, z) al punto (3, 1, –1) es

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

pero el álgebra es más simple si en lugar de ello maximiza y minimiza el cuadrado de la distancia:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

La restricción es que el punto (x, y, z) reside en la esfera, es decir

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acuerdo con el método de multiplicadores de Lagrange, se resuelve $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$. Esto da

12 $$2(x-3) = 2x\lambda$$

13 $$2(y-1) = 2y\lambda$$

14 $$2(z+1) = 2z\lambda$$

15 $$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

La manera más sencilla de resolver estas ecuaciones es despejar x, y y z en términos de λ en (12), (13) y (14) y sustituir después esos valores en (15). De (12) se tiene

$$x - 3 = x\lambda \qquad \text{o} \qquad x(1-\lambda) = 3 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{3}{1-\lambda}$$

[Adviértase que $1 - \lambda \neq 0$, porque $\lambda = 1$ es imposible debido a (12).] De igual manera, (13) y (14) dan

$$y = \frac{1}{1-\lambda} \qquad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

La figura 4 muestra la esfera y el punto P más cercano del ejemplo 4. ¿Cómo podría determinar las coordenadas de P sin usar cálculo?

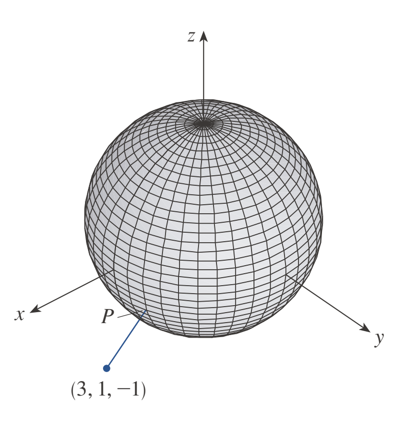


FIGURA 4

En consecuencia, de (15) se tiene

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

lo que da $(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$, así que

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Estos valores de λ dan entonces los correspondientes puntos (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Es fácil ver que f tiene un valor menor en el primero de estos puntos, así que el punto más cercano es $(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11})$ y el más alejado es $(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11})$. ■

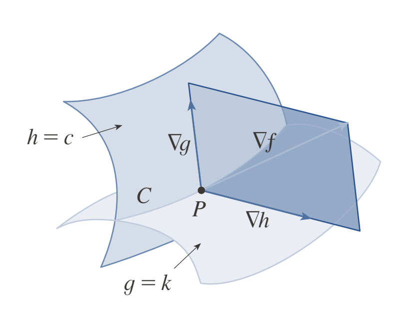


FIGURA 5

Dos restricciones

Suponga ahora que se quieren encontrar los valores máximo y mínimo de una función $f(x, y, z)$ sujeta a dos restricciones (condiciones secundarias) de la forma $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = c$. Geométricamente, esto significa que se buscan los valores extremos de f cuando (x, y, z) está restringido a residir en la curva de intersección C de las superficies de nivel $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = c$. (Véase la figura 5.) Suponga que f tiene tal valor extremo en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Se sabe desde el principio de esta sección que ∇f es ortogonal a C en P. Pero también se sabe que ∇g es ortogonal a $g(x, y, z) = k$ y que ∇h es ortogonal a $h(x, y, z) = c$, así que ∇g y ∇h son por igual ortogonales a C. Esto significa que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ está en el plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. (Suponga que estos vectores gradiente no son cero ni paralelos.) Así, existen números λ y μ (llamados multiplicadores de Lagrange) tales que

16 $$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

En este caso, el método de Lagrange consiste en buscar valores extremos resolviendo cinco ecuaciones con las cinco incógnitas x, y, z, λ y μ. Estas ecuaciones se obtienen escribiendo la ecuación 16 en términos de sus componentes y usando las ecuaciones de restricción:

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ interseca el plano $x - y + z = 1$ en una elipse (figura 6). El ejemplo 5 pide el valor máximo de f cuando (x, y, z) está restringido a residir en la elipse.

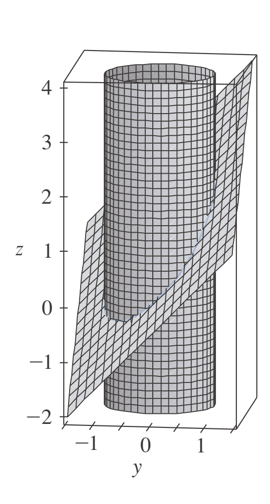


FIGURA 6

EJEMPLO 5 Encuentre el valor máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ en la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Maximice la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeta a las restricciones $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ y $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. La condición de Lagrange es $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, así que se resuelven las ecuaciones

17 $$1 = \lambda + 2x\mu$$

18 $$2 = -\lambda + 2y\mu$$

19 $$3 = \lambda$$

20 $$x - y + z = 1$$

21 $$x^2 + y^2 = 1$$

Al poner $\lambda = 3$ [de 19)] en (17) se obtiene $2x\mu = -2$, así que $x = -1/\mu$. De igual manera, (18) da $y = 5/(2\mu)$. La sustitución en (21) da entonces

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

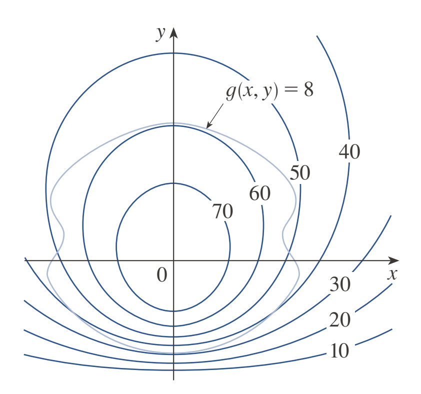
y por tanto $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Entonces, $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$ y, de (20), $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Los valores correspondientes de f son

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Por tanto, el valor máximo de f en la curva dada es $3 + \sqrt{29}$. ■

14.8 EJERCICIOS

1. Se presenta un mapa de contorno de f y una curva con ecuación $g(x, y) = 8$. Estime los valores máximo y mínimo de f sujetos a la restricción de que $g(x, y) = 8$. Explique su razonamiento.



2. (a) Use una calculadora graficadora o computadora para graficar el círculo $x^2 + y^2 = 1$. En la misma pantalla, grafique varias curvas de la forma $x^2 + y = c$ hasta encontrar dos que toquen apenas el círculo. ¿Cuál es la significación de los valores de c para estas dos curvas?
(b) Use los multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Compare sus respuestas con las del inciso (a).

3-14 Cada uno de estos problemas de valores extremos tiene una solución tanto con un valor máximo como con un valor mínimo. Use los multiplicadores de Lagrange para hallar los valores extremos de la función sujeta a la restricción dada.

3. $f(x, y) = x^2 - y^2$; $x^2 + y^2 = 1$

4. $f(x, y) = e^{xy}$; $x^3 + y^3 = 16$

5. $f(x, y) = xy$; $4x^2 + y^2 = 8$

6. $f(x, y) = xe^y$; $x^2 + y^2 = 2$

7. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 12$

8. $f(x, y, z) = e^{xyz}$; $2x^2 + y^2 + z^2 = 24$

9. $f(x, y, z) = xy^2z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

10. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 1) + \ln(y^2 + 1) + \ln(z^2 + 1)$; $x^2 + y^2 + z^2 = 12$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$; $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15. El método de multiplicadores de Lagrange supone que los valores extremos existen, pero este no siempre es el caso. Demuestre que el problema de encontrar el valor mínimo de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeta a la restricción $xy = 1$ puede resolverse usando multiplicadores de Lagrange pero que f no tiene un valor máximo con esa restricción.

16. Halle el valor mínimo de $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sujeta a la restricción $x + 2y + 3z = 10$. Demuestre que f no tiene ningún valor máximo con esa restricción.

17-20 Determine los valores extremos de f sujeta a ambas restricciones.

17. $f(x, y, z) = x + y + z$; $x^2 + z^2 = 2$, $x + y = 1$

18. $f(x, y, z) = z$; $x^2 + y^2 = z^2$, $x + y + z = 24$

19. $f(x, y, z) = x + 2y$; $x + y + z = 1$, $y^2 + z^2 = 4$

20. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $x + y - z = 0$, $x^2 + 2z^2 = 1$

21-23 Halle los valores extremos de f en la región descrita por la desigualdad.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$

22. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$, $x^2 + y^2 \leqslant 16$

23. $f(x, y) = e^{-xy}$, $x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

24. Considere el problema de maximizar la función $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a la restricción $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.
(a) Intente usar multiplicadores de Lagrange para resolver el problema.
(b) ¿Podría $f(25, 0)$ dar un valor mayor que el del inciso (a)?
(c) Resuelva el problema graficando la ecuación de restricción y varias curvas de nivel de f.
(d) Explique por qué el método de multiplicadores de Lagrange fracasa en la resolución de este problema.
(e) ¿Cuál es el significado de $f(9, 4)$?



25. Considere el problema de minimizar la función $f(x, y) = x$ en la curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (un piriforme).
(a) Intente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.
(b) Demuestre que el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$, pero que la condición de Lagrange $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ no es satisfecha por ningún valor de λ.
(c) Explique por qué los multiplicadores de Lagrange fracasan en el hallazgo del valor mínimo en este caso.

SAC **26.** (a) Si su sistema algebraico computacional traza curvas implícitamente definidas, úselo para estimar los valores mínimo y máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeta a la restricción $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ mediante métodos gráficos.
(b) Resuelva el problema del inciso (a) con ayuda de los multiplicadores de Lagrange. Use su SAC para resolver la ecuación numéricamente. Compare sus respuestas con las del inciso (a).

27. La producción total P de cierto producto depende de la cantidad L de mano de obra utilizada y de la cantidad K de inversión de capital. En las secciones 14.1 y 14.3 se analizó cómo el modelo de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ sigue ciertos supuestos económicos, donde b y α son constantes positivas y $\alpha < 1$. Si el costo de una unidad de trabajo es m y el costo de una unidad de capital es n, y si la compañía solo puede gastar p dólares como su presupuesto total, maximizar la producción P está sujeta a la restricción $mL + nK = p$. Demuestre que la producción máxima ocurre cuando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{y} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

28. En referencia al ejercicio 27, suponga ahora que la producción se fija en $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, donde Q es una constante. ¿Qué valores de L y K minimizan la función de costo $C(L, K) = mL + nK$?

29. Use multiplicadores de Lagrange para comprobar que el rectángulo con área máxima que tiene un perímetro dado p es un cuadrado.

30. Use multiplicadores de Lagrange para comprobar que el triángulo con área máxima que tiene un perímetro dado p es equilátero.
Sugerencia: use la fórmula de Herón para el área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

donde $s = p/2$ y x, y, z son las longitudes de los lados.

31-43 Use multiplicadores de Lagrange para dar una solución alterna al ejercicio indicado de la sección 14.7.

31. Ejercicio 41 **32.** Ejercicio 42
33. Ejercicio 43 **34.** Ejercicio 44
35. Ejercicio 45 **36.** Ejercicio 46
37. Ejercicio 47 **38.** Ejercicio 48
39. Ejercicio 49 **40.** Ejercicio 50
41. Ejercicio 51 **42.** Ejercicio 52
43. Ejercicio 55

44. Determine los volúmenes máximo y mínimo de una caja rectangular cuya área es de 1500 cm² y cuya longitud de aristas total es de 200 cm.

45. El plano $x + y + 2z = 2$ interseca el paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Halle los puntos en esta elipse que están más cerca y más lejos del origen.

46. El plano $4x - 3y + 8z = 5$ interseca el cono $z^2 = x^2 + y^2$ en una elipse.
(a) Grafique el cono y el plano y observe la intersección elíptica.
(b) Use multiplicadores de Lagrange para determinar el punto más alto y el más bajo en la elipse.

SAC **47-48** Halle los valores máximo y mínimo de f sujeta a las restricciones dadas. Use un sistema algebraico computacional para resolver el sistema de ecuaciones que surge del uso de multiplicadores de Lagrange. (Si su SAC solo halla una solución, quizá deba usar comandos adicionales.)

47. $f(x, y, z) = ye^{x-z}$; $\quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$, $\; xy + yz = 1$

48. $f(x, y, z) = x + y + z$; $\quad x^2 - y^2 = z$, $\; x^2 + z^2 = 4$

49. (a) Encuentre el valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

dado que $x_2, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos y $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, donde c es una constante.
(b) Deduzca del inciso (a) que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos, entonces

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Esta desigualdad indica que la media geométrica de n números no es mayor que la media aritmética de los números. ¿En qué circunstancias estas dos medias son iguales?

50. (a) Maximice $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeta a las restricciones $\sum_{i-1}^{n} x_i^2 = 1$ y $\sum_{i-1}^{n} y_i^2 = 1$.
(b) Use

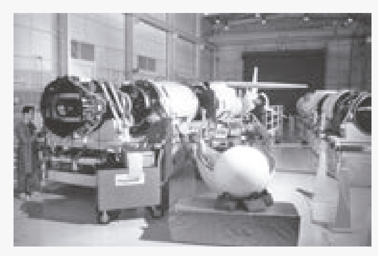
$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \qquad \text{y} \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

para demostrar que

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_j^2}\,\sqrt{\sum b_j^2}$$

para cualesquiera números $a_1, \ldots, an, b_1, \ldots, bn$. Esta desigualdad se conoce como desigualdad de Cauchy-Schwarz.

PROYECTO DE APLICACIÓN LA CIENCIA DE LOS COHETES









Cortesía de Orbital Sciences Corporation

Muchos cohetes, como el *Pegasus XL*, que actualmente se usa para lanzar satélites, y el *Saturn V*, que fue el primero en llevar hombres a la luna, están diseñados para usar tres etapas en su ascenso al espacio. Una gran primera etapa propulsa inicialmente al cohete hasta que su combustible se agota, momento en el cual esta etapa es desechada para reducir la masa del cohete. Las etapas segunda y tercera son menores y funcionan de manera similar a fin de poner en órbita alrededor de la Tierra la carga útil del cohete. (Con este diseño, se requieren al menos dos etapas para llegar a las velocidades necesarias, y usar tres etapas ha resultado ser un buen arreglo entre costo y desempeño.) La meta aquí es determinar las masas particulares de las tres etapas, las que deben diseñarse para minimizar la masa total del cohete, permitiendo al mismo tiempo que alcance la velocidad deseada.

Para un cohete de una etapa que consume combustible a una razón constante, el cambio en velocidad que resulta de la aceleración del vehículo del cohete se ha propuesto como

$$\Delta V = -c \ln\left(1 - \frac{(1 - S)M_r}{P + M_r}\right)$$

donde M_r es la masa del motor del cohete incluido el combustible inicial, P es la masa de la carga útil, S es un *factor estructural* determinado por el diseño del cohete (específicamente, la proporción entre la masa del vehículo del cohete sin combustible y la masa total del cohete sin carga útil) y c es la velocidad (constante) de escape en relación con el cohete.

Considérese ahora un cohete con tres etapas y una carga útil de masa A. Suponga que las fuerzas externas son mínimas y que c y S permanecen constantes en cada etapa. Si M_i es la masa de la etapa de orden i, se puede considerar inicialmente que el motor del cohete tiene masa M_1 y que su carga útil tiene masa $M_2 + M_3 + A$; la segunda y tercera etapas pueden manejarse de forma similar.

1. Demuestre que la velocidad alcanzada después de desechadas las tres etapas está dada por

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_3 + A}{SM_3 + A}\right)\right]$$

2. Se desea minimizar la masa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ del motor del cohete sujeta a la restricción de que se alcance la velocidad deseada vf del problema 1. El método de multiplicadores de Lagrange es apropiado aquí, pero difícil de implementar usando las expresiones corrientes. Para simplificar, se definen variables N_i de tal forma que la ecuación de restricción pueda expresarse como $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Dado que M es ahora difícil de expresar en términos de N_i's, es deseable usar una función más simple que sea minimizada en el mismo lugar que M. Demuestre que

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_1}{1 - SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_2}{1 - SN_2}$$

$$\frac{M_3 + A}{A} = \frac{(1 - S)N_3}{1 - SN_3}$$

y concluya que

$$\frac{M + A}{A} = \frac{(1 - S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1 - SN_1)(1 - SN_2)(1 - SN_3)}$$

3. Verifique que $\ln((M + A)/A)$ se minimiza en el mismo lugar que M; use multiplicadores de Lagrange y los resultados del problema 2 para hallar expresiones para los valores de N_i donde ocurre el mínimo sujeto a la restricción $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. [*Sugerencia*: use propiedades de logaritmos para simplificar las expresiones.]

4. Determine una expresión para el valor mínimo de M como función de v_f.

5. Si se quiere poner un cohete de tres etapas en órbita a 160 km de la superficie terrestre, se requiere una velocidad final de aproximadamente 28 000 km/h. Suponga que cada etapa integra un factor estructural $S = 0.2$ y una velocidad de escape de $c = 9\,600$ km/h.
(a) Determine la masa mínima total M de los motores del cohete como una función de A.
(b) Determine la masa de cada etapa particular como una función de A. (¡No son de igual tamaño!)

6. El mismo cohete requeriría una velocidad final de aproximadamente 39 700 km/h para escapar de la gravedad de la Tierra. Determine la masa de cada etapa que minimizaría la masa total de los motores del cohete y que le permitiría propulsar una sonda de 200 kg en el espacio profundo.

PROYECTO DE APLICACIÓN OPTIMIZACIÓN DE HIDROTURBINAS

En una estación generadora de energía hidroeléctrica (alguna vez operada por la Katahdin Paper Company) en Millinocket, Maine, el agua se traslada por tuberías desde una presa hasta la estación de energía. La razón a la que fluye el agua por la tubería varía, dependiendo de condiciones externas.

La estación de energía tiene tres diferentes turbinas hidroeléctricas, cada una de ellas con una función de potencia conocida (y única) que define la cantidad de energía eléctrica generada como una función del flujo de agua que llega a la turbina. El agua de arribo puede repartirse en diferentes volúmenes a cada turbina, así que la meta es determinar cómo distribuir el agua entre las turbinas para establecer la máxima producción de energía total a cualquier razón de flujo.

Con base en evidencia experimental y la *ecuación de Bernoulli*, se determinaron los modelos cuadráticos siguientes para la producción de energía de cada turbina, junto con los flujos permisibles de operación:

$$KW_1 = (-18.89 + 0.1277Q_1 - 4.08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_2 = (-24.51 + 0.1358Q_2 - 4.69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_3 = (-27.02 + 0.1380Q_3 - 3.84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$250 \leqslant Q_1 \leqslant 1110, \quad 250 \leqslant Q_2 \leqslant 1110, \quad 250 \leqslant Q_3 \leqslant 1225$$

donde

Q_i = flujo por la turbina i en pies cúbicos por segundo

KW_i = energía generada por turbina i en kilowatts

Q_T = flujo total por la estación en pies cúbicos por segundo

1. Si se usan las tres turbinas, se quiere determinar el flujo Q_i a cada turbina que dará la producción máxima de energía total. Las limitaciones son que los flujos deben sumar el flujo de entrada total y observar las restricciones dadas del dominio. En consecuencia, use multiplicadores de Lagrange para determinar los valores para los flujos particulares (como funciones de Q_T) que maximicen la producción de energía total $KW_1 + KW_2 + KW_3$ sujeta a las restricciones $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$ y a las restricciones del dominio en cada Q_i.

2. ¿Para cuáles valores de Q_T es válido su resultado?

3. Para un flujo de entrada de 2500 pies^3/s, determine la distribución a las turbinas y verifique (probando algunas distribuciones cercanas) que su resultado sea efectivamente un máximo.

4. Hasta ahora se ha supuesto que las tres turbinas están en operación; ¿en algunas situaciones es posible que se produzca más energía usando solo una turbina? Haga una gráfica de las

tres funciones de energía y úsela para decidir si un flujo de entrada de 1000 pies^3/s debería distribuirse a las tres turbinas o encauzarse solo a una. (Si determina que debería usarse solo una turbina, ¿cuál de ellas sería?) ¿Y si el flujo fuera de únicamente 600 pies^3/s?

5. Quizá para algunos niveles de flujo sería provechoso usar dos turbinas. Si el flujo de entrada es de 1500 pies^3/s, ¿cuáles dos turbinas recomendaría usar? Use multiplicadores de Lagrange para determinar cómo debería distribuirse el flujo entre las dos turbinas para maximizar la energía producida. Para este flujo, ¿emplear dos turbinas es más eficiente que usar las tres?

6. Si el flujo de entrada es de 3400 pies^3/s, ¿qué recomendaría a la gerencia de la estación?

14 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una función de dos variables?
(b) Describa tres métodos para visualizar una función de dos variables.

2. ¿Qué es una función de tres variables? ¿Cómo puede visualizar una función de ese tipo?

3. ¿Qué significa la expresión siguiente?

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

¿Cómo podría demostrar que ese límite no existe?

4. (a) ¿Qué significa decir que f es continua en (a, b)?
(b) Si f es continua en $\mathbb{R}^2$, ¿qué puede decir usted sobre su gráfica?

5. (a) Escriba expresiones para las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ como límites.
(b) ¿Cómo se interpreta $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ geométricamente? ¿Cómo se les interpreta como razones de cambio?
(c) Si $f(x, y)$ está dada por una fórmula, ¿cómo se calcula f_x y f_y?

6. ¿Qué dice el teorema de Clairaut?

7. ¿Cómo se determina un plano tangente a cada uno de los tipos de superficies siguientes?
(a) Una gráfica de una función de dos variables, $z = f(x, y)$
(b) Una superficie de nivel de una función de tres variables, $F(x, y, z) = k$

8. Defina la linealización de f en (a, b). ¿Cuál es la correspondiente aproximación lineal? ¿Cuál es la interpretación geométrica de la aproximación lineal?

9. (a) ¿Qué significa decir que f es derivable en (a, b)?
(b) ¿Cómo suele verificarse que f es derivable?

10. Si $z = f(x, y)$, ¿qué son las diferenciales dx, dy y dz?

11. Enuncie la regla de la cadena para el caso en el que $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una variable. ¿Y si x y y fueran funciones de dos variables?

12. Si z es definida implícitamente como una función de x y y por una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, ¿cómo se determina $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$?

13. (a) Escriba una expresión como un límite para la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. ¿Cómo se le interpreta como una razón? ¿Cómo se le interpreta geométricamente?
(b) Si f es derivable, escriba una expresión para $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ en términos de f_x y f_y.

14. (a) Defina el vector gradiente ∇f para una función f de dos o tres variables.
(b) Exprese $D_{\mathbf{u}} f$ en términos de ∇f.
(c) Explique la significación geométrica del gradiente.

15. ¿Qué significan los enunciados siguientes?
(a) f tiene un máximo local en (a, b).
(b) f tiene un máximo absoluto en (a, b).
(c) f tiene un mínimo local en (a, b).
(d) f tiene un mínimo absoluto en (a, b).
(e) f tiene un punto silla en (a, b).

16. (a) Si f tiene un máximo local en (a, b), ¿qué puede decir usted sobre sus derivadas parciales en (a, b)?
(b) ¿Qué es un punto crítico de f?

17. Enuncie la prueba de la segunda derivada.

18. (a) ¿Qué es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué es un conjunto acotado?
(b) Enuncie el teorema de valores extremos para funciones de dos variables.
(c) ¿Cómo se determinan los valores que garantiza el teorema de valores extremos?

19. Explique cómo funciona el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. ¿Y si hubiera una segunda restricción $h(x, y, z) = c$?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. $f_y(a, b) = \lim_{y \to b} \dfrac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$

2. Existe una función f con derivadas parciales continuas de segundo orden tales que $f_x(x, y) = x + y^2$ y $f_y(x, y) = x - y^2$.

3. $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$

4. $D_{\mathbf{k}} f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$

5. Si $f(x, y) \to L$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de todas las rectas que pasan por (a, b), entonces $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$.

6. Si $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ existen, f es derivable en (a, b).

7. Si f tiene un mínimo local en (a, b) y f es derivable en (a, b), entonces $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

8. Si f es una función, entonces

$$\lim_{(x, y)\to(2, 5)} f(x, y) = f(2, 5)$$

9. Si $f(x, y) = \ln y$, entonces $\nabla f(x, y) = 1/y$.

10. Si $(2, 1)$ es un punto crítico de f y

$$f_{xx}(2, 1)\, f_{yy}(2, 1) < [f_{xy}(2, 1)]^2$$

f tiene un punto silla en $(2, 1)$.

11. Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$, entonces $-\sqrt{2} \leqslant D_{\mathbf{u}} f(x, y) \leqslant \sqrt{2}$.

12. Si $f(x, y)$ tiene dos máximos locales, f debe tener un mínimo local.

EJERCICIOS

1-2 Determine y trace el dominio de la función.

1. $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$

2. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$

3-4 Trace la gráfica de la función.

3. $f(x, y) = 1 - y^2$

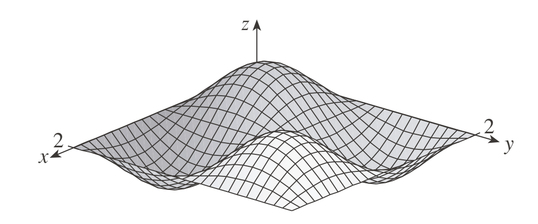
4. $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$

5-6 Trace varias curvas de nivel de la función.

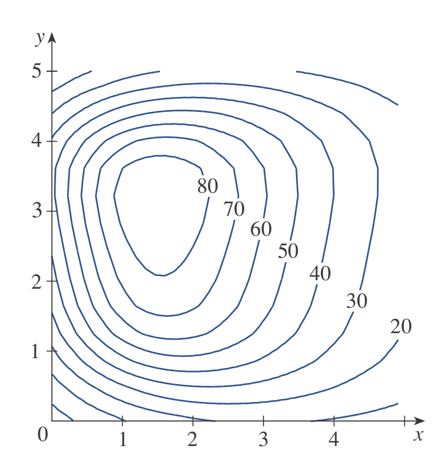
5. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

6. $f(x, y) = e^x + y$

7. Haga un diagrama aproximado de un mapa de contorno para la función cuya gráfica se muestra.



8. Se muestra el mapa de contorno de una función f.
   (a) Estime el valor de $f(3, 2)$.
   (b) ¿$f_x(3, 2)$ es positivo o negativo? Explique su respuesta.
   (c) ¿Cuál es mayor, $f_y(2, 1)$ o $f_y(2, 2)$? Explique su respuesta.



9-10 Evalúe el límite o demuestre que no existe.

9. $\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

10. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

11. Una placa de metal está situada en el plano xy y ocupa el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 8$, donde x y y se miden en metros. La temperatura en el punto (x, y) en la placa es $T(x, y)$, donde T se mide en grados Celsius. Temperaturas en puntos igualmente espaciados se miden y registran en la tabla.
   (a) Estime los valores de las derivadas parciales $T_x(6, 4)$ y $T_y(6, 4)$. ¿Cuáles son las unidades?

(b) Estime el valor de $D_{\mathbf{u}}\,T(6, 4)$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$. Interprete su resultado.

(c) Estime el valor de $T_{xy}(6, 4)$.

x \ y	0	2	4	6	8
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

12. Halle una aproximación lineal de la función de temperatura $T(x, y)$ del ejercicio 11 cerca del punto (6, 4). Úsela después para estimar la temperatura en el punto (5, 3.8).

13-17 Determine las primeras derivadas parciales.

13. $f(x, y) = (5y^3 + 2x^2y)^8$

14. $g(u, v) = \dfrac{u + 2v}{u^2 + v^2}$

15. $F(\alpha, \beta) = \alpha^2 \ln(\alpha^2 + \beta^2)$

16. $G(x, y, z) = e^{xz} \operatorname{sen}(y/z)$

17. $S(u, v, w) = u \arctan\left(v\sqrt{w}\right)$

18. La velocidad del sonido a través de aguas oceánicas es una función de la temperatura, la salinidad y la presión, que se representa por la función

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016D$$

donde C es la velocidad del sonido (en metros por segundo), T la temperatura (en grados Celsius), S la salinidad (la concentración de sales en partes por millar, lo que significa el número de gramos de sólidos disueltos por cada 1000 g de agua) y D la profundidad bajo la superficie marina (en metros). Calcule $\partial C/\partial T$, $\partial C/\partial S$, y $\partial C/\partial D$ cuando $T = 10$ °C, $S = 35$ partes por millar y $D = 100$ m. Explique el significado físico de estas derivadas parciales.

19-22 Determine todas las segundas derivadas parciales de f.

19. $f(x, y) = 4x^3 - xy^2$

20. $z = xe^{-2y}$

21. $f(x, y, z) = x^k y^l z^m$

22. $v = r\cos(s + 2t)$

23. Si $z = xy + xe^{y/x}$, demuestre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

24. Si $z = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} t)$, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

25-29 Determine ecuaciones de (a) el plano tangente y (b) la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

25. $z = 3x^2 - y^2 + 2x$, $(1, -2, 1)$

26. $z = e^x \cos y$, $(0, 0, 1)$

27. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$, $(2, -1, 1)$

28. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

29. $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$, $(2, -1, 0)$

30. Use una computadora para graficar la superficie $z = x^2 + y^4$ y su plano tangente y recta normal en $(1, 1, 2)$ en la misma pantalla. Elija el dominio y punto de vista de tal forma que obtenga una vista completa de los tres objetos.

31. Halle los puntos en el hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ donde el plano tangente es paralelo al plano $2x + 2y + z = 5$.

32. Halle du si $u = \ln(1 + se^{2t})$.

33. Halle la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = x^3\sqrt{y^2 + z^2}$ en el punto (2, 3, 4) y úsela para estimar el número $(1.98)^3\sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$.

34. Los dos lados de un triángulo rectángulo se miden como 5 m y 12 m con un posible error de medición de a lo sumo 0.2 cm en cada una. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de (a), el área del triángulo y (b) la longitud de la hipotenusa.

35. Si $u = x^2y^3 + z^4$, donde $x = p + 3p^2$, $y = pe^p$ y $z = p \operatorname{sen} p$, use la regla de la cadena para determinar du/dp.

36. Si $v = x^2 \operatorname{sen} y + ye^{xy}$, donde $x = s + 2t$ y $y = st$, use la regla de la cadena para determinar $\partial v/\partial s$ y $\partial v/\partial t$ cuando $s = 0$ y $t = 1$.

37. Suponga que $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $g(1, 2) = 3$, $g_s(1, 2) = -1$, $g_t(1, 2) = 4$, $h(1, 2) = 6$, $h_s(1, 2) = -5$, $h_t(1, 2) = 10$, $f_x(3, 6) = 7$, y $f_y(3, 6) = 8$. Determine $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ cuando $s = 1$ y $t = 2$.

38. Use un diagrama de árbol para escribir la regla de la cadena para el caso en el que $w = f(t, u, v)$, $t = t(p, q, r, s)$, $u = u(p, q, r, s)$ y $v = v(p, q, r, s)$ son todas ellas funciones derivables.

39. Si $z = y + f(x^2 - y^2)$, donde f es derivable, demuestre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

40. La longitud x de un lado de un triángulo aumenta a razón de 6 cm/s, la longitud y de otro lado disminuye a razón de 4 cm/s y el ángulo contenido θ aumenta a razón de 0.05 radianes/s. ¿Qué tan rápido cambia el área del triángulo cuando $x = 80$ cm, $y = 100$ cm y $\theta = \pi/6$?

41. Si $z = f(u, v)$, donde $u = xy$, $v = y/x$ y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2v\frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Si $\cos(xyz) = 1 + x^2y^2 + z^2$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

43. Determine el gradiente de la función $f(x, y, z) = x^2e^{yz^2}$.

44. (a) ¿Cuándo es un máximo la derivada direccional de f?
(b) ¿Cuándo es un mínimo?
(c) ¿Cuándo es de 0?
(d) ¿Cuándo es de la mitad de su valor máximo?

45-46 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección indicada.

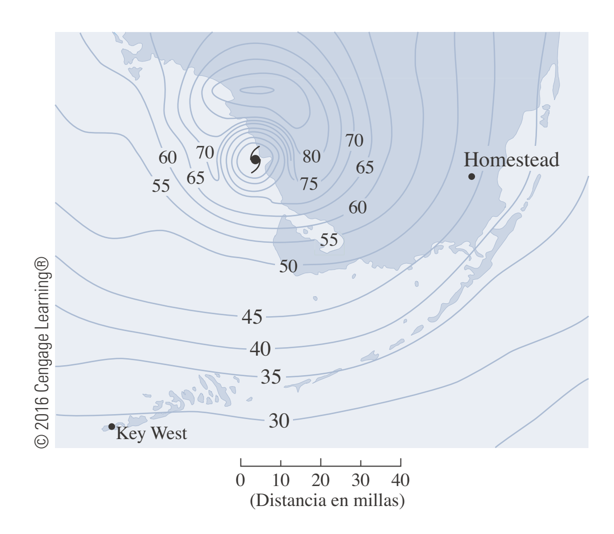
45. $f(x, y) = x^2e^{-y}$, $(-2, 0)$, en dirección al punto (2, –3)

46. $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1 + z}$, $(1, 2, 3)$, en la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

47. Determine la máxima razón de cambio de $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ en el punto (2, 1). ¿En qué dirección ocurre?

48. Determine la dirección en la que $f(x, y, z) = ze^{xy}$ aumenta más rápido en el punto (0, 1, 2). ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

49. El mapa de contorno muestra la velocidad del viento en nudos durante el huracán Andrew el 24 de agosto de 1992. Úselo para estimar el valor de la derivada direccional de la velocidad del viento en Homestead, Florida, en la dirección del ojo del huracán.



50. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente en el punto (–2, 2, 4) a la curva de intersección de la superficie y el plano $z = 4$.

51-54 Encuentre los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de las funciones. Si tiene software de graficación tridimensional, grafique la función con un dominio y perspectiva que revele todos los aspectos importantes de la función.

51. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

52. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

53. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

54. $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

55-56 Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de f en el conjunto D.

55. $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$; D es la región triangular cerrada en el plano xy con vértices (0, 0), (0, 6) y (6, 0)

56. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$; D es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$

57. Use una gráfica o curvas de nivel o ambas para estimar los valores máximos y mínimos locales y puntos silla de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$. Use después cálculo para determinar con precisión esos valores.

58. Use una calculadora graficadora o computadora (o el método de Newton, o un sistema algebraico computacional) para determinar los puntos críticos de $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$ con tres decimales. Clasifique después los puntos críticos y determine el punto más alto en la gráfica.

59-62 Use multiplicadores de Lagrange para determinar los valores máximos y mínimos de f sujeta a las restricciones dadas.

59. $f(x, y) = x^2y$; $x^2 + y^2 = 1$

60. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

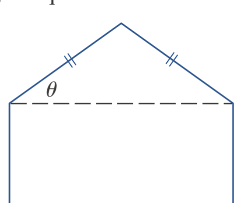
61. $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$;
$x + y + z = 1$, $x - y + 2z = 2$

63. Halle los puntos en la superficie $xy^2z^3 = 2$ que están más cerca del origen.

64. Un paquete en forma de una caja rectangular puede enviarse por el US Postal Service si la suma de su longitud y circunferencia (el perímetro de una sección transversal perpendicular a la longitud) es a lo sumo de 108 pulgadas. Halle las dimensiones del paquete con el mayor volumen que es posible enviar.

65. Un pentágono se forma colocando un triángulo isósceles sobre un rectángulo, como se muestra en la figura. Si el pentágono tiene perímetro fijo P, halle las longitudes de los lados del pentágono que maximicen su área.



Problemas adicionales

1. Un rectángulo con longitud L y ancho W es cortado en cuatro rectángulos más pequeños por dos rectas paralelas a los lados. Determine los valores máximo y mínimo de la suma de los cuadrados de las áreas de los rectángulos menores.

2. Biólogos marinos han determinado que cuando un tiburón detecta la presencia de sangre en el agua, nadará en la dirección en la que la concentración de la sangre aumenta más rápido. Con base en ciertas pruebas, la concentración de sangre (en partes por millón) en un punto $P(x, y)$ en la superficie del mar se aproxima mediante

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$$

donde x y y se miden en metros en un sistema de coordenadas rectangulares con la fuente de sangre en el origen.

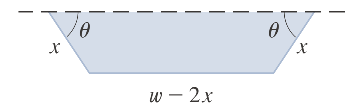
(a) Identifique las curvas de nivel de la función de concentración y trace varios miembros de esta familia junto con una trayectoria que un tiburón seguirá a la fuente.

(b) Suponga que un tiburón está en el punto (x_0, y_0) cuando detecta por primera vez la presencia de sangre en el agua. Determine una ecuación de la trayectoria del tiburón estableciendo y resolviendo una ecuación diferencial.

3. Una pieza larga de una hoja metálica galvanizada con ancho w debe doblarse en forma simétrica con tres lados rectos para hacer una canaleta de agua de lluvia. Una sección transversal se muestra en la figura.

(a) Determine las dimensiones que permitan el máximo flujo posible; es decir, halle las dimensiones que den la máxima área transversal posible.

(b) ¿Sería mejor doblar el metal para formar la canaleta con una sección transversal circular?



4. ¿Para cuáles valores del número r la función siguiente es continua en $\mathbb{R}^3$?

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

5. Suponga que f es una función derivable de una variable. Demuestre que todos los planos tangentes a la superficie $z = xf(y/x)$ intersecan en un punto común.

6. (a) El método de Newton para aproximar una solución de un sistema de ecuaciones $f(x) = 0$ (véase la sección 4.8) puede adaptarse para aproximar una solución de un sistema de ecuaciones $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$. Las superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ se intersecan en una curva que interseca el plano xy en el punto (r, s), la cual es la solución del sistema. Si una aproximación inicial (x_1, y_1) está cerca de este punto, los planos tangentes a las superficies en (x_1, y_1) se intersecan en una recta que interseca el plano xy en un punto (x_2, y_2), el que debería estar más cerca de (r, s). (Compare con la figura 4.8.2.) Demuestre que

$$x_2 = x_1 - \frac{fg_y - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = y_1 - \frac{f_x g - fg_x}{f_x g_y - f_y g_x}$$

donde f, g y sus derivadas parciales se evalúan en (x_1, y_1). Si continúa este procedimiento, se obtendrán sucesivas aproximaciones (x_n, y_n).

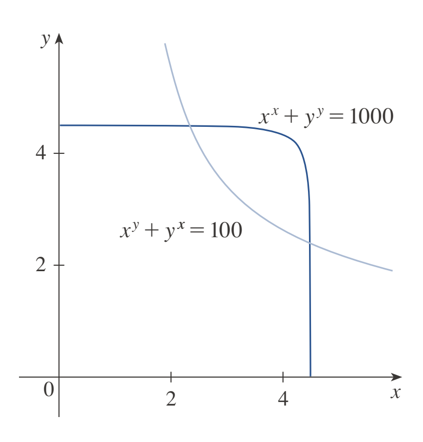
(b) Fue Thomas Simpson (1710-1761) quien formuló el método de Newton tal como se conoce ahora y quien lo prolongó a funciones de dos variables como en el inciso (a).



(Véase la biografía de Simpson en la página 520.) El ejemplo que dio para ilustrar el método fue resolver el sistema de ecuaciones

$$x^x + y^y = 1000 \qquad x^y + y^x = 100$$

En otras palabras, determinó los puntos de intersección de las curvas en la figura. Use el método del inciso (a) para determinar las coordenadas de los puntos de intersección con seis decimales.



7. Si la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ debe encerrar al círculo $x^2 + y^2 = 2y$, ¿qué valores de a y b minimizan el área de la elipse?

8. Demuestre que el valor máximo de la función

$$f(x, y) = \frac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

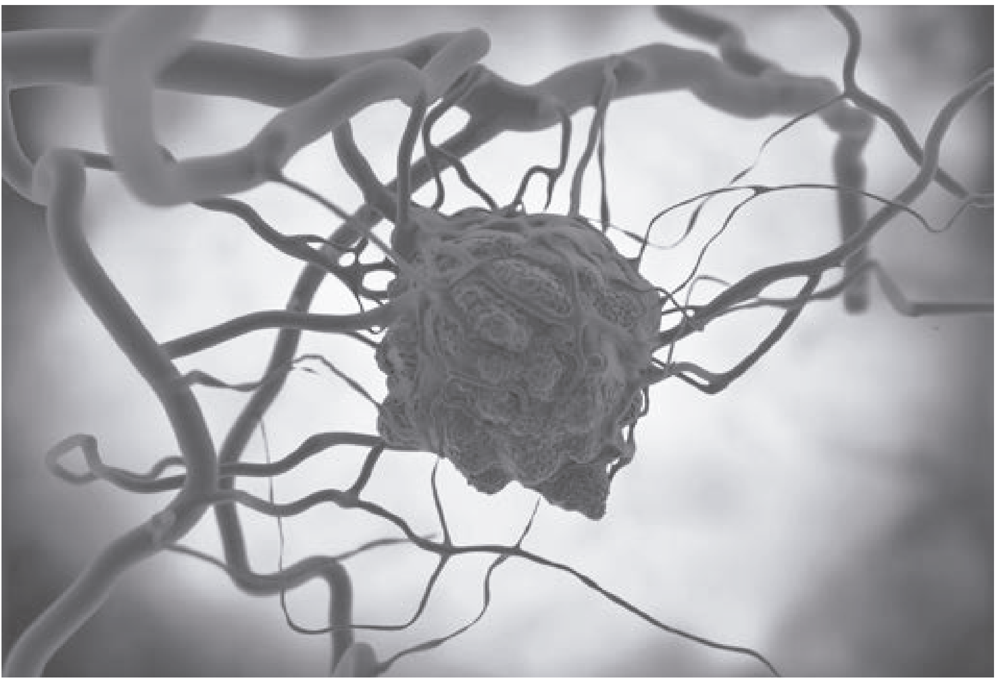
es $a^2 + b^2 + c^2$.

Sugerencia: un método para atacar este problema es usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

(Véase el ejercicio 12.3.61.)

15 Integrales múltiples



Los tumores, como el que se muestra, han sido modelados como "esferas con protuberancias". En el ejercicio 47 de la sección 15.8 se le pedirá calcular el volumen encerrado por una superficie de este tipo.

EN ESTE CAPÍTULO SE PROLONGARÁ la idea de una integral definida a las integrales dobles y triples de funciones de dos o tres variables. Estas ideas se usarán después para calcular volúmenes, masas y centroides de regiones más generales que las que se pudieron considerar en los capítulos 6 y 8. También se usarán integrales dobles para calcular probabilidades cuando dos variables aleatorias están implicadas.

Se verá que las coordenadas polares son útiles para calcular integrales dobles en algunos tipos de regiones. En forma similar, se presentarán dos nuevos sistemas de coordenadas en el espacio tridimensional —las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas— que simplifican enormemente el cálculo de integrales triples en ciertas regiones sólidas de ocurrencia común.

15.1 Integrales dobles en rectángulos

Así como el intento de resolver el problema del área condujo a la definición de una integral definida, ahora se buscará determinar el volumen de un sólido y llegar en el proceso a la definición de una integral doble.

Repaso de la integral definida

Recuerde primero los elementos básicos concernientes a las integrales definidas de funciones de una variable. Si $f(x)$ se define para $a \leqslant x \leqslant b$, se comienza dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$ y se eligen puntos de muestra x_i^* en estos subintervalos. Luego se forma la suma de Riemann

1
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

y se toma el límite de esas sumas como $n \to \infty$ para obtener la integral definida de f de a a b:

2
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

En el caso especial en que $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann puede interpretarse como la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación de la figura 1, y $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b.

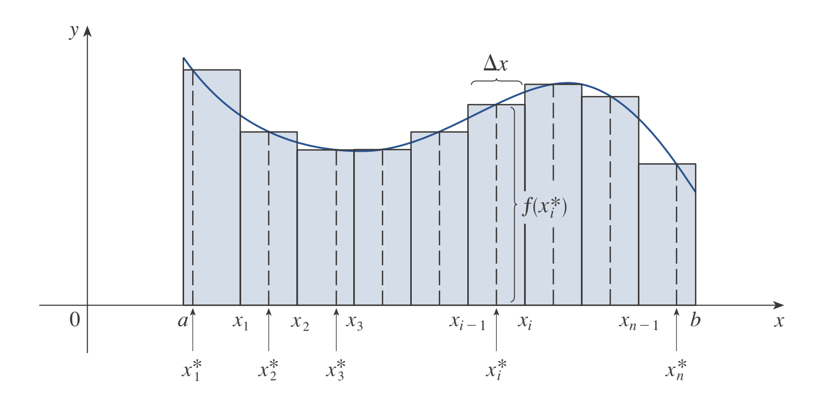


FIGURA 1

Volúmenes e integrales dobles

En forma similar, si se considera una función f de dos variables definida en un rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

y se supone primero que $f(x, y) \geqslant 0$. La gráfica de f es una superficie con ecuación $z = f(x, y)$. Sea S el sólido que se encuentra arriba de R y bajo la gráfica de f, es decir

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant f(x, y),\ (x, y) \in R\}$$

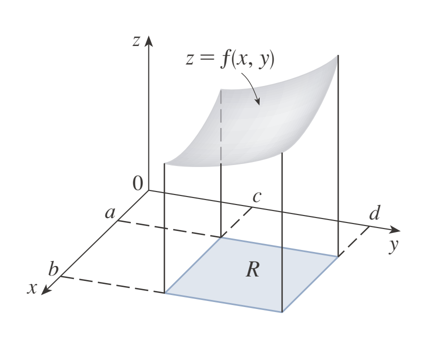


FIGURA 2

(Véase la figura 2.) La meta es determinar el volumen de S.

El primer paso es dividir el rectángulo R en subrectángulos. Se hace esto dividiendo el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho $\Delta x = (b - a)/m$ y dividiendo $[c, d]$ en n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de igual ancho $\Delta y = (d - c)/n$. Al dibujar líneas

paralelas a los ejes de coordenadas que pasan por los puntos extremos de esos subintervalos, se forman los subrectángulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

cada uno con área $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$, como en la figura 3.

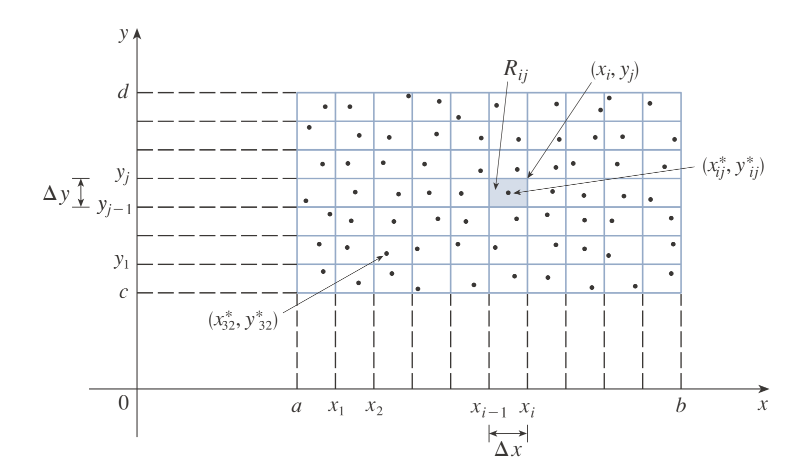


FIGURA 3
División de R en subrectángulos

Si se elige un **punto muestra** (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en cada R_{ij}, se puede aproximar la parte de S ubicada sobre cada R_{ij} mediante una fina caja rectangular (o "columna") con base R_{ij} y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como se muestra en la figura 4. (Compare con la figura 1.) El volumen de esta caja es la altura de la caja multiplicada por el área del rectángulo base:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

Si se sigue este procedimiento para todos los rectángulos y se suman los volúmenes de las cajas correspondientes, se obtendrá una aproximación del volumen total de S:

3
$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

(Véase la figura 5.) Esta doble suma significa que para cada subrectángulo se evalúa f en el punto elegido y se multiplica por el área del subrectángulo, y después se suman los resultados.

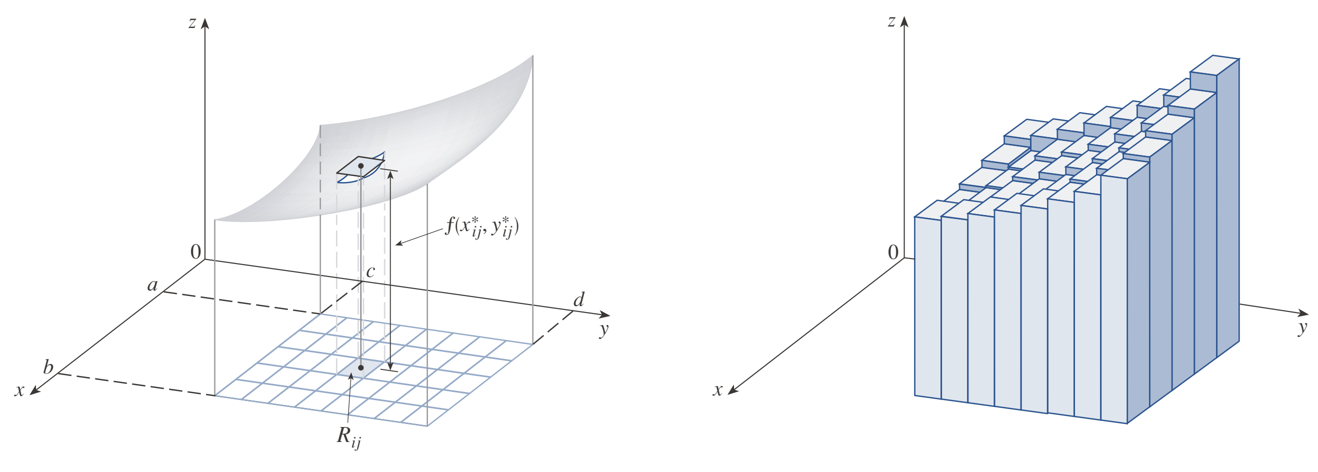


FIGURA 4

FIGURA 5

El significado del doble límite en la ecuación 4 es que se puede hacer la doble suma lo más cercana que se quiera al número V [para cualquier selección de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}] tomando m y n lo suficientemente grandes.

La intuición dice que la aproximación dada en (3) mejora cuando m y n se vuelven más grandes, de modo que sería de esperar que

4
$$V = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A$$

Se usa la expresión en la ecuación 4 para definir el **volumen** del sólido S que se encuentra bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo R. (Se puede demostrar que esta definición es congruente con la fórmula para el volumen en la sección 6.2.)

Límites del tipo que aparece en la ecuación 4 ocurren con frecuencia, no solo en la determinación de volúmenes, sino también en una amplia variedad de otras situaciones (como se verá en la sección 15.4) aun si f no es una función positiva. Así, se hace la definición siguiente.

Note la semejanza entre la definición 5 y la definición de una integral en la ecuación 2.

5 Definición La **integral doble** de f en el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A$$

si este límite existe.

Aunque se ha definido la integral doble dividiendo R en subrectángulos de igual tamaño, se podría haber usado subrectángulos R_{ij} de tamaño desigual. Pero luego se tendría que cerciorar de que todas sus dimensiones se aproximaran a cero en el proceso límite.

El significado preciso del límite en la definición 5 es que para cada número $\varepsilon > 0$ existe un entero N, tal que

$$\left| \iint_R f(x, y) \, dA - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A \right| < \varepsilon$$

para todos los enteros m y n mayores que N y para cualquier selección de puntos muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}.

Una función f se llama **integrable** si el límite de la definición 5 existe. En cursos de cálculo avanzado se demuestra que todas las funciones continuas son integrables. De hecho, la integral doble de f existe siempre y cuando f "no sea demasiado discontinua". En particular, si f está acotada en R [es decir, si hay una constante M, tal que $|f(x, y)| \leqslant M$ para todas las (x, y) en R] y f es continua ahí, excepto en un número finito de curvas suaves, f es integrable en R.

El punto muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) puede ser elegido como cualquier punto en el subrectángulo R_{ij}, pero si se escoge en el extremo superior derecho de R_{ij} [es decir (x_i, y_j), véase la figura 3], la expresión para la integral doble luce más simple:

6
$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \, \Delta A$$

Al comparar las expresiones dadas en la ecuación 4 y la definición 5, se ve que un volumen puede escribirse como una integral doble:

Si $f(x, y) \geqslant 0$, el volumen V del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y bajo la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

La suma de la definición 5,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

se llama **doble suma de Riemann** y se usa como una aproximación del valor de la integral doble. [Nótese lo parecida que es a la suma de Riemann en (1) para una función de una variable.] Si f resulta ser una función *positiva*, la doble suma de Riemann representa la suma de los volúmenes de las columnas, como en la figura 5, y es una aproximación del volumen bajo la gráfica de f.

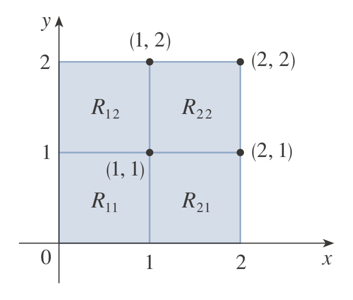


FIGURA 6

EJEMPLO 1 Estime el volumen del sólido que se encuentra arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y bajo el paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R en cuatro cuadrados iguales y elija como punto muestra el extremo superior derecho de cada cuadrado R_{ij}. Trace el sólido y las cajas rectangulares de aproximación.

SOLUCIÓN Los cuadrados se muestran en la figura 6. El paraboloide es la gráfica de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ y el área de cada cuadrado es $\Delta A = 1$. Al aproximar el volumen por la suma de Riemann con $m = n = 2$, se tiene

$$V \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\,\Delta A$$

$$= f(1, 1)\,\Delta A + f(1, 2)\,\Delta A + f(2, 1)\,\Delta A + f(2, 2)\,\Delta A$$

$$= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34$$

Este es el volumen de las cajas rectangulares de aproximación que se muestran en la figura 7. ■

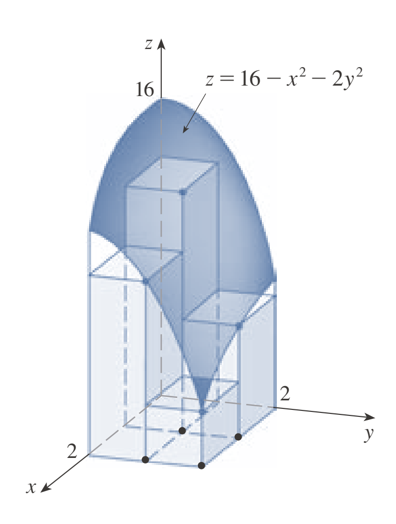
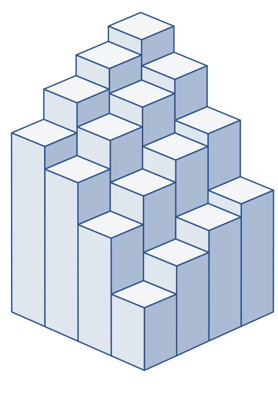
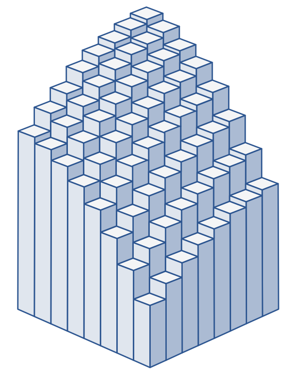


FIGURA 7

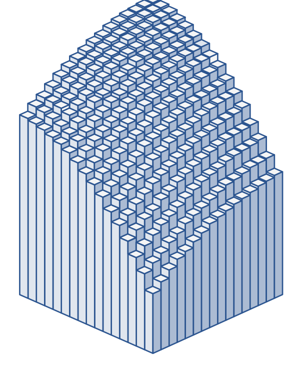
Se obtienen mejores aproximaciones del volumen del ejemplo 1 si se aumenta el número de cuadrados. La figura 8 muestra cómo las columnas comienzan a parecerse más al sólido real y las aproximaciones correspondientes se vuelven cada vez más acertadas cuando se usa 16, 64 y 256 cuadrados. En el ejemplo 7 se demostrará que el volumen exacto es 48.



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$



(b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$



(c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

FIGURA 8
Las aproximaciones por la suma de Riemann del volumen bajo $z = 16 - x^2 - 2y^2$ se vuelven más acertadas conforme m y n aumentan.

EJEMPLO 2 Si $R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, -2 \leqslant y \leqslant 2\}$, evalúe la integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA$$

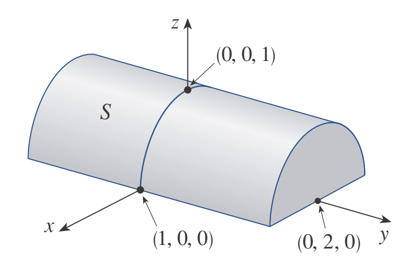


FIGURA 9

SOLUCIÓN Sería muy difícil evaluar directamente esta integral a partir de la definición 5 pero, debido a que $\sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, se puede calcular la integral interpretándola como un volumen. Si $z = \sqrt{1 - x^2}$, entonces $x^2 + z^2 = 1$ y $z \geqslant 0$, así que la doble integral dada representa el volumen del sólido S que se encuentra bajo el cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ y arriba del rectángulo R. (Véase la figura 9.) El volumen de S es el área de un semicírculo con radio 1 multiplicada por la longitud del cilindro. Así,

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA = \tfrac{1}{2}\pi(1)^2 \times 4 = 2\pi$$ ■

■ La regla del punto medio

Los métodos que se usan para aproximar integrales simples (la regla del punto medio, la regla del trapecio, la regla de Simpson) tienen contrapartes para las integrales dobles. Aquí solo se considerará la regla del punto medio para integrales dobles. Esto significa que se usará una doble suma de Riemann para aproximar la integral doble, en la que como punto muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij} se elige el centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ de R_{ij}. En otras palabras, $\bar{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\bar{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

Regla del punto medio para integrales dobles

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

donde $\bar{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\bar{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

EJEMPLO 3 Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de la integral $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

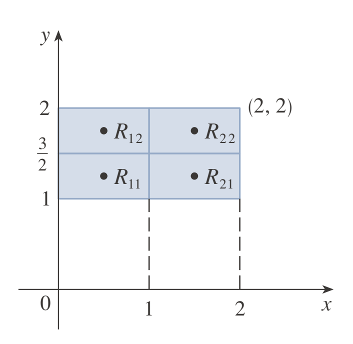
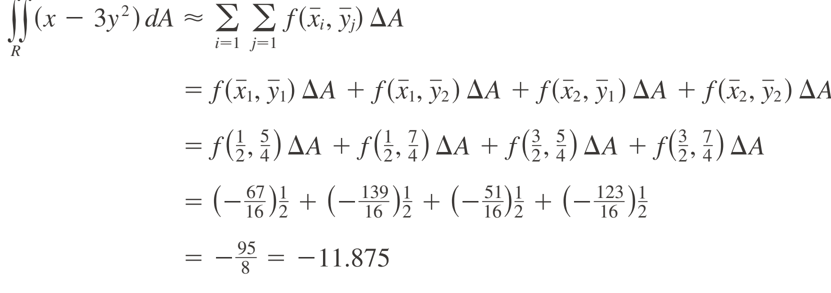


FIGURA 10

SOLUCIÓN Al usar la regla del punto medio con $m = n = 2$, se evalúa $f(x, y) = x - 3y^2$ en los centros de los cuatro subrectángulos que aparecen en la figura 10. Así, $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$, y $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. El área de cada subrectángulo es $\Delta A = \frac{1}{2}$. En consecuencia,



$$\begin{aligned}\iint_R (x - 3y^2)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A \\ &= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A \\ &= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2} \\ &= -\tfrac{95}{8} = -11.875\end{aligned}$$

Así se tiene $$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx -11.875$$ ■

NOTA En el ejemplo 5 se verá que el valor exacto de la integral doble del ejemplo 3 es -12. (Recuerde que la interpretación de una integral doble como un volumen es válida solo cuando el integrando f es una función *positiva*. El integrando del ejemplo 3 no es una función positiva, así que su integral no es un volumen. En los ejemplos 5 y 6 se estudiará cómo interpretar integrales de funciones que no siempre son positivas en términos de volúmenes.) Si se sigue dividiendo cada subrectángulo de la figura 10 en cuatro más pequeños de forma similar, se obtendrán las aproximaciones por la regla del punto medio que se presentan en la tabla al margen. Note cómo estas aproximaciones se acercan al valor exacto de la integral doble, -12.

Número de subrectángulos	Aproximación por la regla del punto medio
1	−11.5000
4	−11.8750
16	−11.9687
64	−11.9922
256	−11.9980
1024	−11.9995

Integrales iteradas

Recuerde que suele ser difícil evaluar directamente integrales simples a partir de la definición de una integral, pero el teorema fundamental del cálculo proporciona un método mucho más fácil. La evaluación de integrales dobles con base en los principios elementales es aún más difícil, pero aquí se verá cómo expresar una integral doble como una integral iterada, la que después puede evaluarse calculando dos integrales simples.

Suponga que f es una función de dos variables integrable en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Se usa la notación $\int_c^d f(x, y)\, dy$ para indicar que x se mantiene fija y que $f(x, y)$ se integra con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Este procedimiento se llama *integración parcial con respecto* a y. (Adviértase su semejanza con la derivación parcial.) Ahora $\int_c^d f(x, y)\, dy$ es un número que depende del valor de x, así que define a una función de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Si integra ahora la función A con respecto a x de $x = a$ a $x = b$, se obtiene

7 $$\int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

La integral en el miembro derecho de la ecuación 7 se llama **integral iterada**. Usualmente se omiten los corchetes. Así,

8 $$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

significa que primero se integra con respecto a y de c a d, y después con respecto a x de a a b.

De igual forma, la integral iterada

9 $$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

significa que primero se integra con respecto a x (considerando a y como si fuera constante) de $x = a$ a $x = b$, y después se integra la función resultante de y con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Note que en las ecuaciones 8 y 9 se trabaja *de adentro hacia fuera*.

EJEMPLO 4 Evalúe las integrales iteradas

(a) $\displaystyle\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy$

SOLUCIÓN

(a) Considerando a x como una constante, se obtiene

$$\int_1^2 x^2 y\, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \tfrac{3}{2}x^2$$

Así, la función A en el análisis precedente está dada por $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ en este ejemplo. Ahora integre esta función de x de 0 a 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2}x^2\, dx = \frac{x^3}{2} \Bigg]_0^3 = \frac{27}{2}$$



(b) Aquí integre primero con respecto a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y \, dy = 9 \left. \frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{27}{2}$$

Observe que en el ejemplo 4 se obtuvo la misma respuesta ya sea que se integrara primero con respecto a y o x. En general, resulta que las dos integrales iteradas de las ecuaciones 8 y 9 siempre son iguales (véase el teorema 10); es decir, el orden de la integración no importa. (Esto es similar al teorema de Clairaut sobre la igualdad de las derivadas parciales mixtas.)

El teorema siguiente da un método práctico para evaluar una integral doble expresándola como una integral iterada (en cualquier orden).

El teorema 10 debe su nombre al matemático italiano Guido Fubini (1879-1943), quien comprobó una versión muy general de este teorema en 1907. Pero la versión para funciones continuas fue conocida por el matemático francés Augustin-Louis Cauchy casi un siglo antes.

10 Teorema de Fubini Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

En términos más generales, esto es cierto si se supone que f está acotada en R, f es discontinua solo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

La comprobación del teorema de Fubini es demasiado difícil para incluirla en este libro, pero se puede dar, al menos, una indicación intuitiva de por qué es cierto para el caso en el que $f(x, y) \geqslant 0$. Recuerde que si f es positiva, se puede interpretar la integral doble $\iint_R f(x, y) \, dA$ como el volumen V del sólido S que se encuentra arriba de R y bajo la superficie $z = f(x, y)$. Pero se tiene otra fórmula que se usa para determinar el volumen en el capítulo 6, a saber

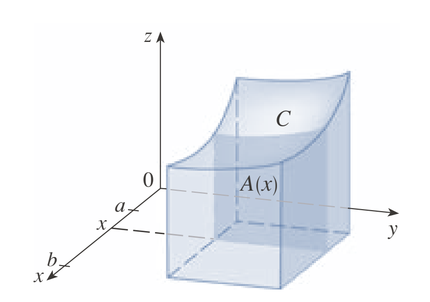


FIGURA 11

$$V = \int_a^b A(x) \, dx$$

donde $A(x)$ es el área de una sección transversal de S en el plano que pasa por x perpendicular al eje x. En la figura 11 puede verse que $A(x)$ es el área bajo la curva C cuya ecuación es $z = f(x, y)$, donde x se mantiene constante y $c \leqslant y \leqslant d$. Por tanto,

TEC Visual 15.1 ilustra el teorema de Fubini mostrando una animación de las figuras 11 y 12.

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

y se tiene

$$\iint_R f(x, y) \, dA = V = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

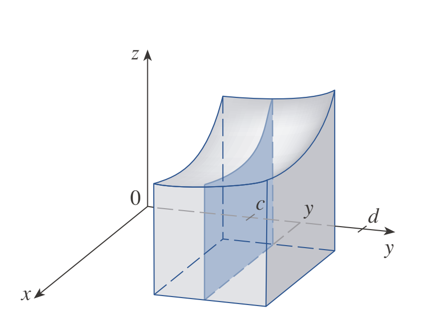


FIGURA 12

Un argumento similar, usando secciones transversales perpendiculares al eje y como el que se muestra en la figura 12, demuestra que

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

EJEMPLO 5 Evalúe la integral doble $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$. (Compare con el ejemplo 3.)

SOLUCIÓN El teorema de Fubini da

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx = \int_0^2 \Big[xy - y^3\Big]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^2 (x - 7)\, dx = \frac{x^2}{2} - 7x\Big]_0^2 = -12$$

SOLUCIÓN 2 Al aplicar de nuevo el teorema de Fubini, pero esta vez integrando primero con respecto a x, se tiene

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^2 (2 - 6y^2)\, dy = 2y - 2y^3\Big]_1^2 = -12$$ ■

Note la respuesta negativa en el ejemplo 5; no hay nada incorrecto en ella. La función f no es una función positiva, así que su integral no representa un volumen. De la figura 13 se deduce que f siempre es negativa en R, de manera que el valor de la integral es la *negativa* del volumen que está *sobre* la gráfica de f y *bajo* R.

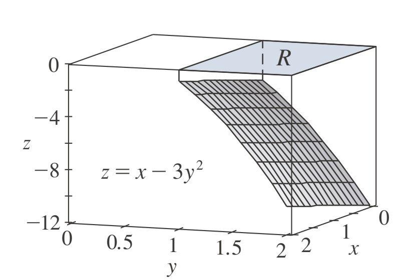


FIGURA 13

Para una función f que adopta valores tanto positivos como negativos, $\iint_R f(x, y)\, dA$ es una diferencia de volúmenes: $V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen sobre R y bajo la gráfica de f y V_2 es el volumen bajo R y sobre la gráfica. El hecho de que la integral del ejemplo 6 sea 0 significa que ambos volúmenes V_1 y V_2 son iguales. (Véase la figura 14.)

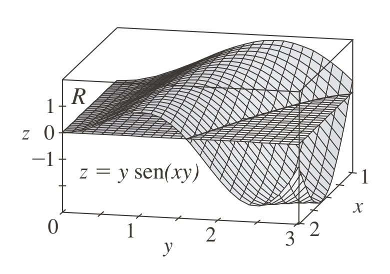


FIGURA 14

EJEMPLO 6 Evalúe $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

SOLUCIÓN Si se integra primero con respecto a x, se obtiene

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \Big[-\cos(xy)\Big]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^{\pi} (-\cos 2y + \cos y)\, dy$$

$$= -\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} y\Big]_0^{\pi} = 0$$ ■

NOTA Si se invierte el orden de integración y se integra primero con respecto a y en el ejemplo 6, se obtiene

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_1^2 \int_0^{\pi} y \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx$$

pero este orden de integración es mucho más difícil que el método dado en el ejemplo, porque implica integración por partes dos veces. Así, al evaluar integrales dobles resulta prudente elegir el orden de integración que producirá integrales más simples.

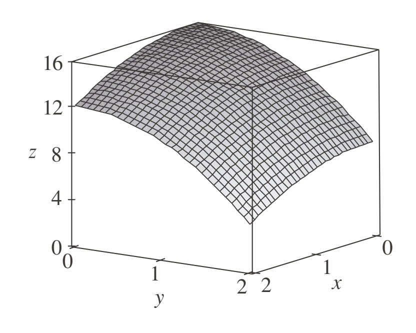


FIGURA 15

EJEMPLO 7 Determine el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$, y los tres planos de coordenadas.

SOLUCIÓN Se observa primeramente que S es el sólido que se encuentra bajo la superficie $z = 16 - x^2 - 2y^2$ y sobre el cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Véase la figura 15.) Este sólido se consideró en el ejemplo 1, pero ahora se está en condiciones de evaluar la integral doble usando el teorema de Fubini. Por tanto,

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\, dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 \Big[16x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2y^2x\Big]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^2 \left(\tfrac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \Big[\tfrac{88}{3}y - \tfrac{4}{3}y^3\Big]_0^2 = 48 \end{aligned}$$

■

En el caso especial en que $f(x, y)$ pueda factorizarse como el producto únicamente de una función de x y solamente una función de y, la integral doble de f puede escribirse en una forma particularmente simple. En específico, suponga que $f(x, y) = g(x)h(y)$ y $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces, el teorema de Fubini da

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\, dx\right] dy$$

En la integral interior, y es una constante, así que $h(y)$ es una constante y se puede escribir

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\, dx\right] dy = \int_c^d \left[h(y)\left(\int_a^b g(x)\, dx\right)\right] dy = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy$$

puesto que $\int_a^b g(x)\, dx$ es una constante. Así, en este caso la integral doble de f puede escribirse como el producto de dos integrales simples:

11 $$\iint_R g(x)\, h(y)\, dA = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy \qquad \text{donde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EJEMPLO 8 Si $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, entonces, por la ecuación 11,

$$\begin{aligned} \iint_R \operatorname{sen} x \cos y\, dA &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx \int_0^{\pi/2} \cos y\, dy \\ &= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} \Big[\operatorname{sen} y\Big]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

■

La función $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ del ejemplo 8 es positiva en R, así que la integral representa el volumen del sólido sobre R y bajo la gráfica de f que aparece en la figura 16.

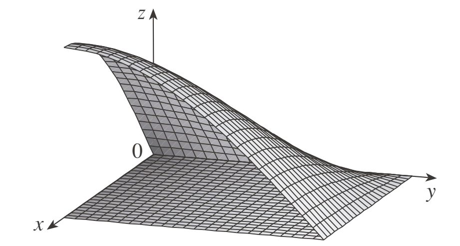


FIGURA 16

Valor promedio

Recuerde de la sección 6.5 que el valor promedio de una función f de una variable definida en un intervalo $[a, b]$ es

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

En forma similar, se define el **valor promedio** de una función f de dos variables delimitadas en un rectángulo R como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

donde $A(R)$ es el área de R.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, la ecuación

$$A(R) \times f_{\text{prom}} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

indica que la caja con base R y altura f_{prom} tiene el mismo volumen que el sólido bajo la gráfica de f. [Si $z = f(x, y)$ describe una región montañosa y se cortan las cimas de las montañas en la altura f_{prom}, se pueden usar para rellenar los valles a fin de que la región se vuelva completamente plana. Véase la figura 17.]

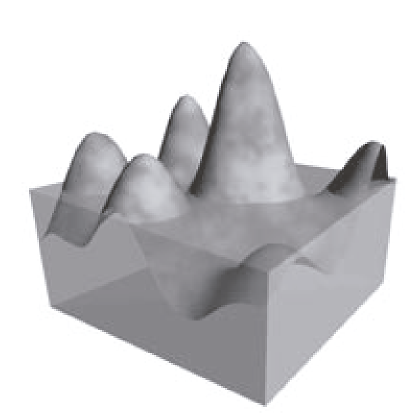


FIGURA 17

EJEMPLO 9 El mapa de contorno de la figura 18 muestra la altura en pulgadas de la nieve que cayó en el estado de Colorado durante el 20 y 21 de diciembre de 2006. (Ese estado tiene la forma de un rectángulo que mide 388 millas de oeste a este y 276 millas de sur a norte.) Use el mapa de contorno para estimar la nevada promedio en todo el estado de Colorado en esos días.

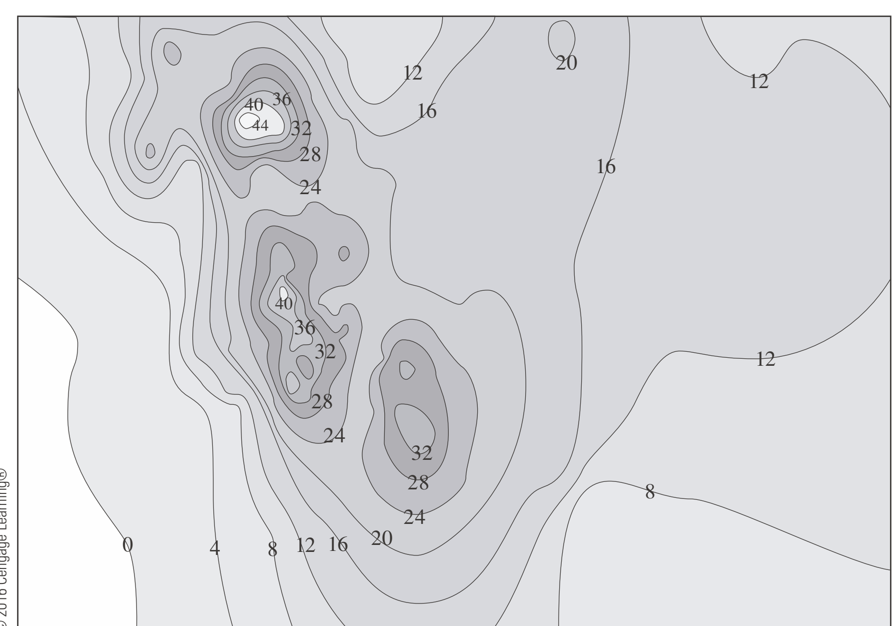


FIGURA 18

SOLUCIÓN Sitúe el origen en la esquina suroeste de ese estado. Entonces $0 \leqslant x \leqslant 388$, $0 \leqslant y \leqslant 276$ y $f(x, y)$ es la caída de nieve, en pulgadas, en un lugar a x millas al este y a y millas al norte del origen. Si R es el rectángulo que representa a Colorado, la nevada promedio para ese estado del 20 al 21 de diciembre fue

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

donde $A(R) = 388 \cdot 276$. Para estimar el valor de esta integral doble, se usa la regla del punto medio con $m = n = 4$. En otras palabras, se divide R en 16 subrectángulos de igual tamaño, como en la figura 19. El área de cada subrectángulo es

$$\Delta A = \frac{1}{16}(388)(276) = 6693 \text{ mi}^2$$

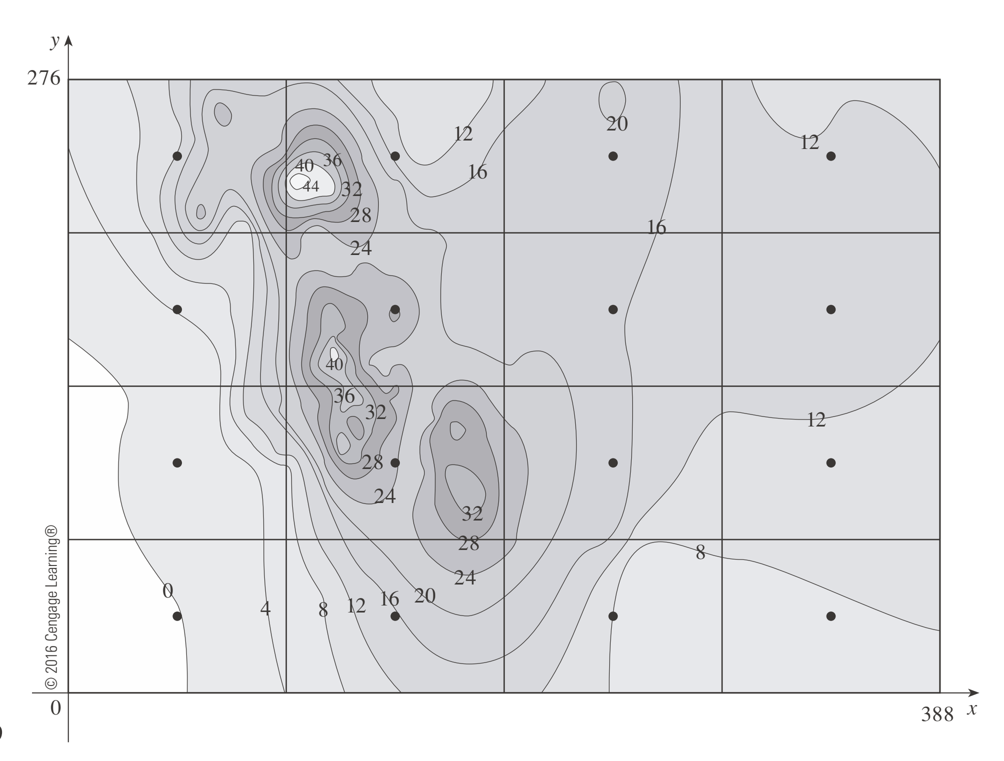


FIGURA 19

Usando el mapa de contorno para estimar el valor de f en el centro de cada subrectángulo, se obtiene

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

$$\approx \Delta A[0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18.5 + 11$$

$$+ 4.5 + 28 + 17 + 13.5 + 12 + 15 + 17.5 + 13]$$

$$= (6693)(207)$$

Por tanto, $$f_{\text{prom}} \approx \frac{(6693)(207)}{(388)(276)} \approx 12.9$$

El 20 y 21 de diciembre de 2006, Colorado recibió un promedio de aproximadamente 13 pulgadas de nieve. ■

15.1 EJERCICIOS

1. (a) Estime el volumen del sólido que se encuentra bajo la superficie $z = xy$ y sobre el rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 6, 0 \leqslant y \leqslant 4\}$$

Use la suma de Riemann con $m = 3$, $n = 2$ y elija como punto muestra la esquina superior derecha de cada cuadrado.

(b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del sólido del inciso (a).

2. Si $R = [0, 4] \times [-1, 2]$, use la suma de Riemann con $m = 2$, $n = 3$ para estimar el valor de $\iint_R (1 - xy^2)\, dA$. Elija como puntos muestra (a) las esquinas inferiores derechas y (b) las esquinas superiores izquierdas de los rectángulos.

3. (a) Use la suma de Riemann con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R xe^{-xy}\, dA$, donde $R = [0, 2] \times [0, 1]$. Elija como puntos muestra las esquinas superiores derechas.

(b) Use la regla del punto medio para estimar la integral en el inciso (a).

4. (a) Estime el volumen del sólido que se encuentra bajo la superficie $z = 1 + x^2 + 3y$ y sobre el rectángulo $R = [1, 2] \times [0, 3]$. Use la suma de Riemann con $m = n = 2$ y elija como puntos muestra las esquinas inferiores izquierdas.

(b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del inciso (a).

5. Sea V el volumen del sólido que se encuentra bajo la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ y sobre el rectángulo dado por $2 \leqslant x \leqslant 4$, $2 \leqslant y \leqslant 6$. Use las rectas $x = 3$ y $y = 4$ para dividir R en subrectángulos. Sean L y U las sumas de Riemann calculadas usando las esquinas inferiores izquierdas y las esquinas superiores derechas, respectivamente. Sin calcular los números V, L y U, dispóngalos en orden creciente y explique su razonamiento.

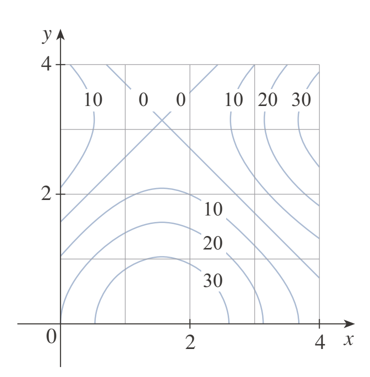
6. Una piscina de 8 por 12 metros está llena de agua. La profundidad se mide en intervalos de 2 m a partir de una esquina de la piscina y los valores se registran en la tabla. Estime el volumen de agua en la piscina.

	0	2	4	6	8	10	12
0	1	1.5	2	2.4	2.8	3	3
2	1	1.5	2	2.8	3	3.6	3
4	1	1.8	2.7	3	3.6	4	3.2
6	1	1.5	2	2.3	2.7	3	2.5
8	1	1	1	1	1.5	2	2

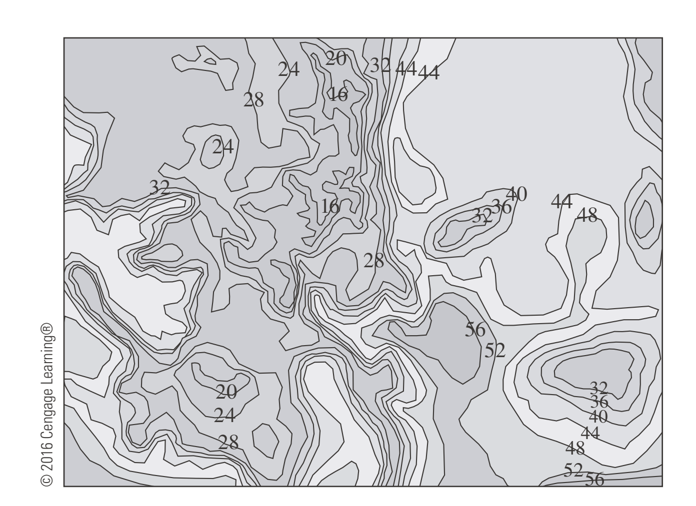
7. Se muestra un mapa de contorno para una función f en el cuadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.

(a) Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$.

(b) Estime el valor promedio de f.



8. El mapa de contorno muestra la temperatura, en grados Fahrenheit, a las cuatro de la tarde del 26 de febrero de 2007 en Colorado. (Este estado mide 388 millas de oeste a este y 276 millas de sur a norte.) Use la regla del punto medio con $m = n = 4$ para estimar la temperatura promedio en Colorado a esa hora.



9-11 Evalúe la integral doble identificándola primero como el volumen de un sólido.

9. $\iint_R \sqrt{2}\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 2 \leqslant x \leqslant 6, -1 \leqslant y \leqslant 5\}$

10. $\iint_R (2x + 1)\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 4\}$

11. $\iint_R (4 - 2y)\, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

12. La integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2}\, dA$, donde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa el volumen de un sólido. Trace el sólido.

13-14 Determine $\int_0^2 f(x, y)\, dx$ y $\int_0^3 f(x, y)\, dy$

13. $f(x, y) = x + 3x^2y^2$

14. $f(x, y) = y\sqrt{x + 2}$

15-26 Calcule la integral iterada.

15. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x)\, dy\, dx$

16. $\int_0^1 \int_0^1 (x + y)^2\, dx\, dy$



17. $\int_0^1 \int_1^2 (x + e^{-y})\,dx\,dy$

18. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\,dy\,dx$

19. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y\,dy\,dx$

20. $\int_1^3 \int_1^5 \frac{\ln y}{xy}\,dy\,dx$

21. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\,dx$

22. $\int_0^1 \int_0^2 y e^{x-y}\,dx\,dy$

23. $\int_0^3 \int_0^{\pi/2} t^2 \operatorname{sen}^3 \phi\,d\phi\,dt$

24. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y}\,dy\,dx$

25. $\int_0^2 \int_0^{\pi} r \operatorname{sen}^2 \theta\,d\theta\,dr$

26. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\,dx\,dy$

27-34 Calcule la integral doble.

27. $\iint_R x \sec^2 y\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant \pi/4\}$

28. $\iint_R (y + xy^{-2})\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

29. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

30. $\iint_R \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 - t^2}}\,dA, \quad R = \{(\theta, t) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\}$

31. $\iint_R x \operatorname{sen}(x + y)\,dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

32. $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

33. $\iint_R \operatorname{sen}(x - y)\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$

34. $\iint_R \frac{1}{1 + x + y}\,dA, \quad R = [1, 3] \times [1, 2]$

35-36 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

35. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dx\,dy$

36. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

37. Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el plano $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ y sobre el rectángulo $R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

38. Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ y sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [1, 2]$.

39. Determine el volumen del sólido que se tiende bajo el paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ y sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

40. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = x^2 + xy^2$ y los planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 5$ y $y = \pm 2$.

41. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + x^2 y e^y$ y los planos $z = 0$, $x = \pm 1$, $y = 0$ y $y = 1$.

42. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + e^x \operatorname{sen} y$ y los planos $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$ y $z = 0$.

43. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = x \sec^2 y$ y los planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = \pi/4$.

44. Grafique el sólido que se ubica entre la superficie $z = 2xy/(x^2 + 1) + 2y$ y el plano $z = x + 2y$ y es acotado por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 4$. Halle después su volumen.

SAC **45.** Use un sistema algebraico computacional para hallar el valor exacto de la integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\,dA$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Use después el SAC para dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral.

SAC **46.** Grafique el sólido que se ubica entre las superficies $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ y $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Use un sistema algebraico computacional para aproximar el volumen de este sólido con cuatro decimales.

47-48 Determine el valor promedio de f en el rectángulo dado.

47. $f(x, y) = x^2 y$, R tiene vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

48. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}, \quad R = [0, 4] \times [0, 1]$

49-50 Use simetría para evaluar la integral doble.

49. $\iint_R \frac{xy}{1 + x^4}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

50. $\iint_R (1 + x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x)\,dA, \quad R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

SAC **51.** Use un SAC para calcular las integrales iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\,dy\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\,dx\,dy$$

¿Las respuestas contradicen el teorema de Fubini? Explique lo que sucede.

52. (a) ¿En qué sentido son similares los teoremas de Fubini y de Clairaut?

(b) Si $f(x, y)$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$ y

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\,dt\,ds$$

para $a < x < b$, $c < y < d$, demuestre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.2 Integrales dobles en regiones generales

Para integrales simples, la región en la que se integra es siempre un intervalo. Pero para integrales dobles, debe ser capaz de integrar una función f no solo en rectángulos, sino también en regiones D de forma más general, como la que se ilustra en la figura 1. Se supone que D es una región acotada, lo que significa que D puede estar encerrada en una región rectangular R como en la figura 2. Luego se define una nueva función F con dominio R mediante

1 $$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

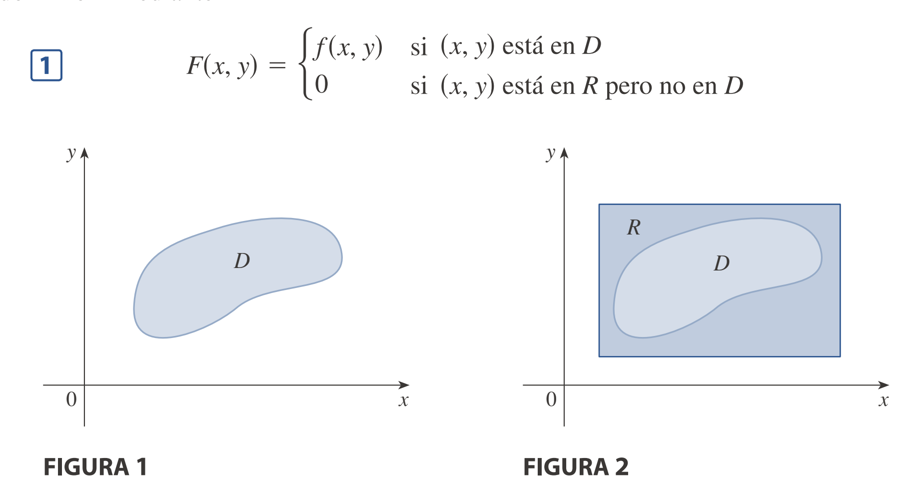


FIGURA 1 **FIGURA 2**

Si F es integrable en R, se define la **integral doble** de f sobre D mediante

2 $$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{donde } F \text{ está dada por la ecuación 1}$$

La definición 2 tiene sentido porque R es un rectángulo, así que $\iint_R F(x, y)\, dA$ fue previamente definida en la sección 15.1. El procedimiento que se ha usado es razonable porque los valores de $F(x, y)$ son de 0 cuando (x, y) se encuentra fuera de D y por tanto no hacen ninguna contribución a la integral. Esto significa que no importa qué rectángulo R se use mientras contenga D.

En el caso en el que $f(x, y) \geqslant 0$, aún se puede interpretar $\iint_D f(x, y)\, dA$ como el volumen del sólido que se encuentra sobre D y bajo la superficie $z = f(x, y)$ (la gráfica de f). Puede verse que esto es razonable comparando las gráficas de f y F en las figuras 3 y 4, respectivamente, y recordando que $\iint_R F(x, y)\, dA$ es el volumen bajo la gráfica de F.

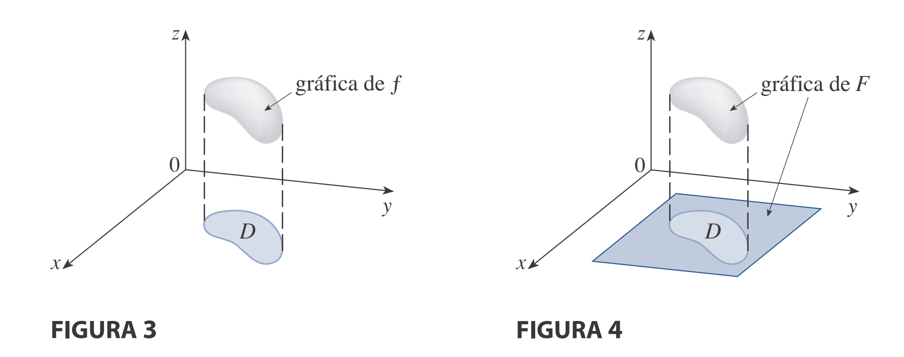


FIGURA 3 **FIGURA 4**

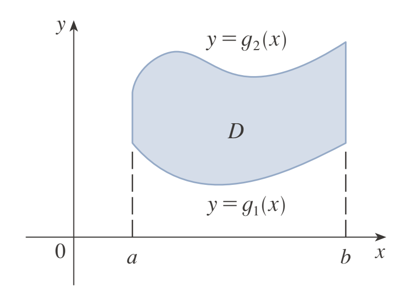
La figura 4 también muestra que es probable que F tenga discontinuidades en los puntos frontera de D. No obstante, si f es continua en D y la curva frontera de D "se porta bien" (en un sentido que está fuera del alcance de este libro), se puede demostrar que

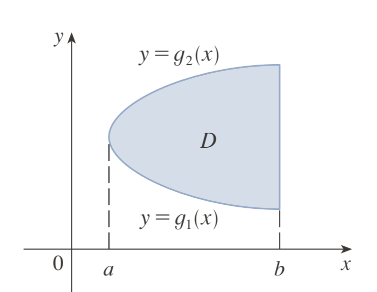
$\iint_R F(x, y)\, dA$ existe y por tanto que $\iint_D f(x, y)\, dA$ existe. En particular, este es el caso para los dos tipos de regiones siguientes.

Se dice que una región en un plano D es de **tipo I** si se ubica entre las gráficas de dos funciones continuas de x, es decir

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$. Algunos ejemplos de regiones tipo I aparecen en la figura 5.





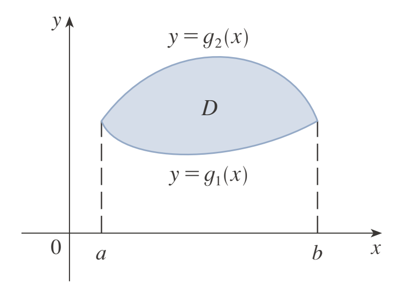


FIGURA 5
Algunas regiones tipo I

Para evaluar $\iint_D f(x, y)\, dA$ cuando D es una región de tipo I, se elige un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenga D, como en la figura 6, y se concede que F es la función dada por la ecuación 1; es decir, F coincide con f en D y F es de 0 fuera de D. Así, por el teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y)\, dy\, dx$$

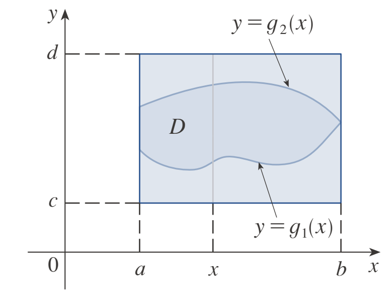


FIGURA 6

Observe que $F(x, y) = 0$ si $y < g_1(x)$ o $y > g_2(x)$ porque (x, y) reside entonces fuera de D. Por tanto,

$$\int_c^d F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ cuando $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$. Así se tiene la fórmula siguiente que permite evaluar la integral doble como una integral iterada.

3 Si f es continua en una región D tipo I, tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

entonces
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

La integral en el miembro derecho de (3) es una integral iterada similar a las que se consideran en la sección precedente, excepto que en la integral interior se considera a x como constante no solo en $f(x, y)$, sino también en los límites de integración, $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

También se consideran regiones en un plano de **tipo II**, que pueden expresarse como

4 $$D = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

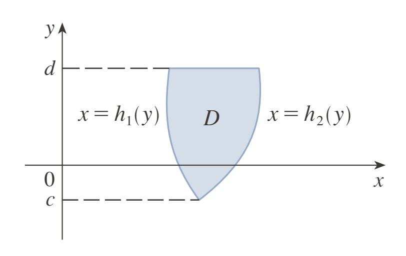


FIGURA 7
Algunas regiones tipo II

donde h_1 y h_2 son continuas. Dos de esas regiones se ilustran en la figura 7.

Usando los mismos métodos que se emplearon para establecer (3), se puede demostrar que

> **5** $$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$
>
> donde D es una región tipo II dada por la ecuación 4.

EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_D (x + 2y)\, dA$, donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

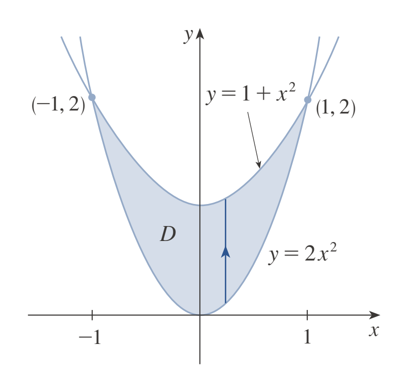


FIGURA 8

SOLUCIÓN Las parábolas intersecan cuando $2x^2 = 1 + x^2$, es decir $x^2 = 1$, así que $x = \pm 1$. Se advierte que la región D, representada en la figura 8, es una región tipo I y no una región tipo II y se puede escribir

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 2x^2 \leqslant y \leqslant 1 + x^2\}$$

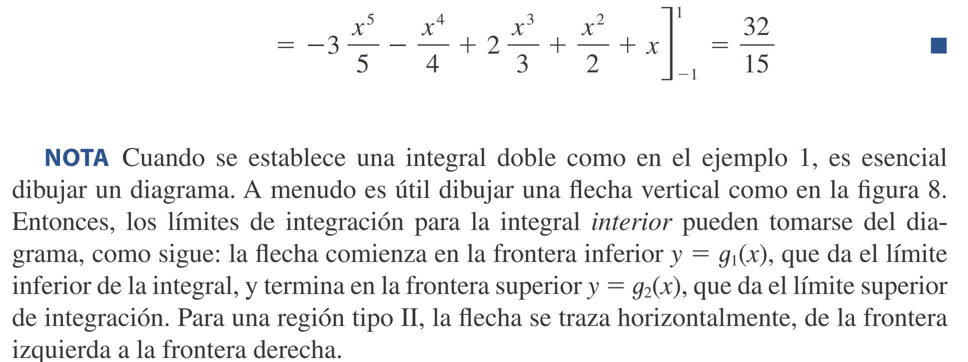
Como la frontera inferior es $y = 2x^2$ y la frontera superior es $y = 1 + x^2$, la ecuación 3 da

$$\iint_D (x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2\Big]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx$$



$$= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$ ■

NOTA Cuando se establece una integral doble como en el ejemplo 1, es esencial dibujar un diagrama. A menudo es útil dibujar una flecha vertical como en la figura 8. Entonces, los límites de integración para la integral *interior* pueden tomarse del diagrama, como sigue: la flecha comienza en la frontera inferior $y = g_1(x)$, que da el límite inferior de la integral, y termina en la frontera superior $y = g_2(x)$, que da el límite superior de integración. Para una región tipo II, la flecha se traza horizontalmente, de la frontera izquierda a la frontera derecha.

EJEMPLO 2 Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy acotado por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

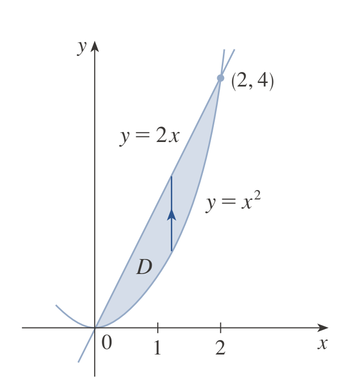


FIGURA 9
D como región tipo I

SOLUCIÓN En la figura 9 se ve que D es una región tipo I y

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2x\}$$

La figura 10 muestra el sólido cuyo volumen se calcula en el ejemplo 2. Este se halla sobre el plano xy, bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y entre el plano $y = 2x$ y el cilindro parabólico $y = x^2$.

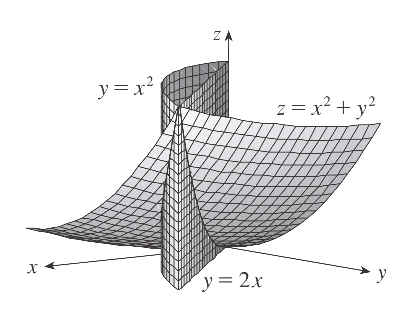


FIGURA 10

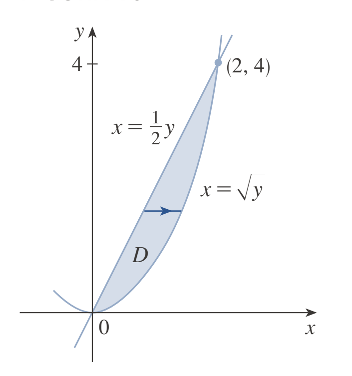


FIGURA 11
Representación de D como una región tipo II

Por tanto, el volumen bajo $z = x^2 + y^2$ y sobre D es

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx$$

$$= -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \Big]_0^2 = \frac{216}{35}$$

SOLUCIÓN 2 En la figura 11 se ve que D también puede escribirse como una región tipo II:

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4, \tfrac{1}{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\right\}$$

En consecuencia, otra expresión para V es

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

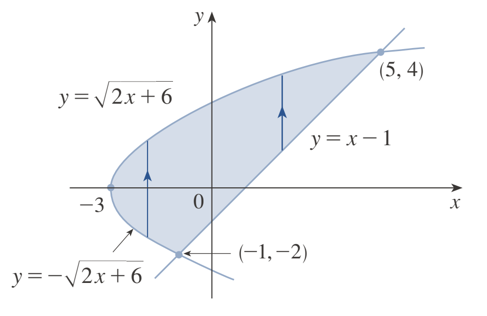
$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

$$= \tfrac{2}{15}y^{5/2} + \tfrac{2}{7}y^{7/2} - \tfrac{13}{96}y^4 \Big]_0^4 = \tfrac{216}{35}$$ ■

EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_D xy\, dA$, donde D es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN La región D se muestra en la figura 12. También en este caso, D es tanto tipo I como tipo II, aunque la descripción de D como una región tipo I es más complicada, porque la frontera inferior consta de dos partes. Por consiguiente, se prefiere expresar D como una región tipo II:

$$D = \left\{(x, y) \mid -2 \leqslant y \leqslant 4, \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \leqslant x \leqslant y + 1\right\}$$



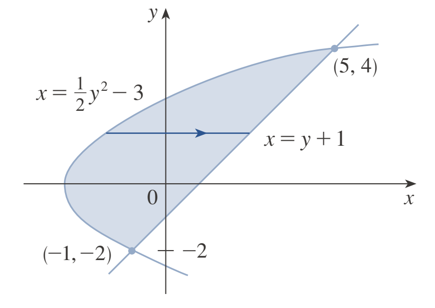


FIGURA 12 (a) Representación de D como una región tipo I (b) Representación de D como una región tipo II

Entonces, al utilizar la ecuación 5 se obtiene

$$\iint_D xy\, dA = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\, dx\, dy = \int_{-2}^{4} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{4} y\left[(y+1)^2 - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)^2\right] dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^{4} = 36$$

Si se hubiera expresado D como región tipo I usando la figura 12(a), se habría obtenido

$$\iint_D xy\, dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\, dy\, dx + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\, dy\, dx$$

pero esto habría implicado más trabajo que el otro método. ■

EJEMPLO 4 Determine el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, y $z = 0$.

SOLUCIÓN En una cuestión como esta, es prudente dibujar dos diagramas: uno del sólido tridimensional y otro de la región en un plano D en la que se encuentra. La figura 13 muestra el tetraedro T acotado por los planos de coordenadas $x = 0$, $z = 0$, el plano vertical $x = 2y$ y el plano $x + 2y + z = 2$. Como el plano $x + 2y + z = 2$ interseca el plano xy (cuya ecuación es $z = 0$) en la recta $x + 2y = 2$, se ve que T se sitúa sobre la región triangular D en el plano xy acotado por las rectas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ y $x = 0$. (Véase la figura 14.)

El plano $x + 2y + z = 2$ puede escribirse como $z = 2 - x - 2y$, así que el volumen requerido se tiende bajo la gráfica de la función $z = 2 - x - 2y$ y sobre

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x/2 \leqslant y \leqslant 1 - x/2\}$$

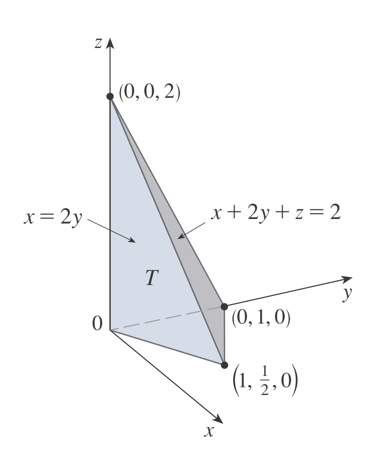


FIGURA 13

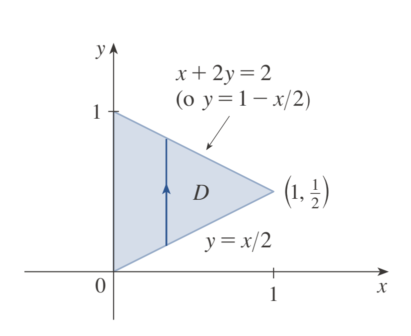


FIGURA 14

Por tanto,

$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right] dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x \Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$ ■

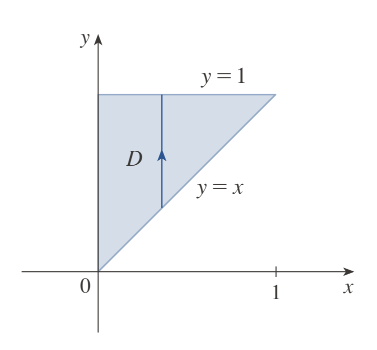


FIGURA 15
D como región tipo I

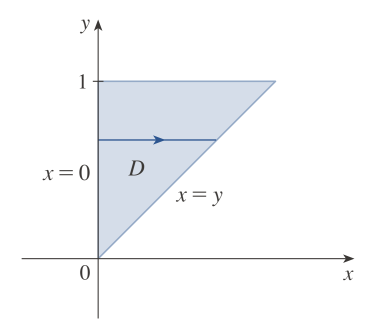


FIGURA 16
D como región tipo II

EJEMPLO 5 Evalúe la integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx$.

SOLUCIÓN Si se intenta evaluar la integral tal como está, se enfrenta a la tarea de evaluar primeramente $\int \operatorname{sen}(y^2)\, dy$. Pero esto es imposible de hacer en términos finitos, porque $\int \operatorname{sen}(y^2)\, dy$ no es una función elemental. (Véase el final de la sección 7.5.) Así, se debe cambiar el orden de integración. Esto se hace expresando primero la integral iterada dada como una integral doble. Si se escribe la ecuación 3 con el lado derecho a la izquierda, se tiene

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA$$

donde $$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\, x \leqslant y \leqslant 1\}$$

La región *D* se representa en la figura 15. En la figura 16 se ve que una descripción alternativa de *D* es

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\, 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

Esto permite usar (5) para expresar la integral doble como una integral iterada en el orden inverso:

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \Big[x \operatorname{sen}(y^2)\Big]_{x=0}^{x=y} dy$$

$$= \int_0^1 y \operatorname{sen}(y^2)\, dy = -\tfrac{1}{2}\cos(y^2)\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 1)$$ ■

Propiedades de las integrales dobles

Suponga que todas las integrales siguientes existen. Para regiones rectangulares *D*, las tres primeras prioridades pueden comprobarse de la misma manera que en la sección 5.2. Para regiones generales, las propiedades se desprenden de la definición 2.

6 $$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_D f(x, y)\, dA + \iint_D g(x, y)\, dA$$

7 $$\iint_D c f(x, y)\, dA = c \iint_D f(x, y)\, dA \qquad \text{donde } c \text{ es una constante}$$

Si $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para todas las (x, y) en *D*, entonces

8 $$\iint_D f(x, y)\, dA \geqslant \iint_D g(x, y)\, dA$$

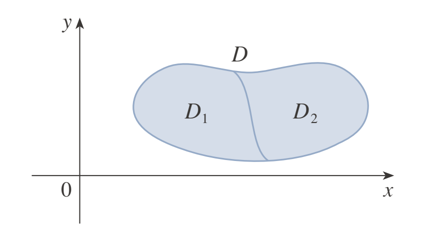
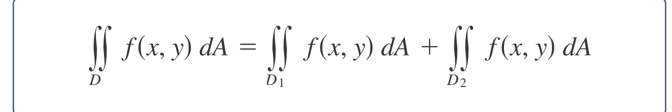


FIGURA 17

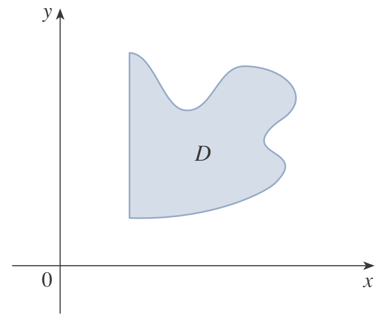
La propiedad de las integrales dobles siguiente es similar a la propiedad de las integrales simples dada por la ecuación $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se traslapan excepto quizá en sus fronteras (véase la figura 17), entonces

9


$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D_1} f(x, y)\, dA + \iint_{D_2} f(x, y)\, dA$$

La propiedad 9 puede usarse para evaluar integrales dobles en regiones D que no son del tipo I ni del tipo II pero que pueden expresarse como una unión de regiones del tipo I o el tipo II. La figura 18 ilustra este procedimiento. (Véase los ejercicios 57 y 58.)



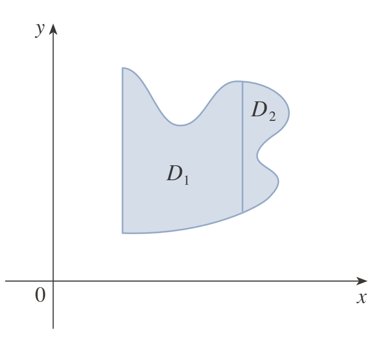


FIGURA 18

(a) D no es del Tipo I ni del tipo II.

(b) $D = D_1 < D_2$. D_1 es tipo I, D_2 es tipo II.

La propiedad de las integrales siguiente indica que si se integra la función constante $f(x, y) = 1$ en una región D, se obtiene el área de D:

10
$$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

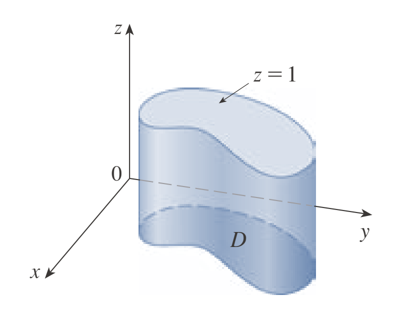


FIGURA 19
Cilindro con base D y altura $z = 1$

La figura 19 ilustra por qué la ecuación 10 es cierta: un cilindro sólido cuya base es D y cuya altura es 1 tiene volumen $A(D) \cdot 1 = A(D)$, pero se sabe que también se puede escribir su volumen como $\iint_D 1\, dA$.

Por último, se pueden combinar las propiedades 7, 8 y 10 para comprobar la propiedad siguiente. (Véase el ejercicio 63.)

11 Si $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todas las (x, y) en D, entonces

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

EJEMPLO 6 Use la propiedad 11 para estimar la integral $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 2.

SOLUCIÓN Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, se tiene $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \cos y \leqslant 1$, y por tanto

$$e^{-1} \leqslant e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leqslant e^1 = e$$

Así, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$, y $A(D) = \pi(2)^2$ en la propiedad 11, se obtiene

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA \leqslant 4\pi e$$ ■

15.2 EJERCICIOS

1-6 Evalúe la integral iterada.

1. $\int_1^5 \int_0^x (8x - 2y)\, dy\, dx$

2. $\int_0^2 \int_0^{y^2} x^2 y\, dx\, dy$

3. $\int_0^1 \int_0^y x e^{y^3}\, dx\, dy$

4. $\int_0^{\pi/2} \int_0^x x \operatorname{sen} y\, dy\, dx$

5. $\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3)\, dt\, ds$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

7-10 Evalúe la integral doble.

7. $\iint_D \frac{y}{x^2 + 1}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$

8. $\iint_D (2x + y)\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant y \leqslant 2, y - 1 \leqslant x \leqslant 1\}$

9. $\iint_D e^{-y^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 3, 0 \leqslant x \leqslant y\}$

10. $\iint_D y\sqrt{x^2 - y^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant x\}$

11. Dibuje un ejemplo de una región que sea
(a) tipo I pero no tipo II
(b) tipo II pero no tipo I

12. Dibuje un ejemplo de una región que sea
(a) tanto tipo I como tipo II
(b) ni tipo I ni tipo II

13-14 Exprese D como una región de tipo I y también como una región de tipo II. Evalúe después la integral doble de las dos maneras.

13. $\iint_D x\, dA$, D está encerrada por las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$

14. $\iint_D xy\, dA$, D está encerrada por las curvas $y = x^2$, $y = 3x$

15-16 Establezca integrales iteradas para ambos órdenes de integración. Evalúe después la integral doble usando el orden más fácil y explique por qué es más fácil.

15. $\iint_D y\, dA$, D está acotada por $y = x - 2$, $x = y^2$

16. $\iint_D y^2 e^{xy}\, dA$, D está acotada por $y = x$, $y = 4$, $x = 0$

17-22 Evalúe la integral doble.

17. $\iint_D x \cos y\, dA$, D está acotada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

18. $\iint_D xy^2\, dA$, D está acotada por $x = 0$ y $x = \sqrt{1 - y^2}$

19. $\iint_D y^2\, dA$, D es la región triangular con vértices (0, 1), (1, 2), (4, 1)

20. $\iint_D xy\, dA$, D está encerrada por el cuarto de círculo $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \geqslant 0$ y los ejes

21. $\iint_D (2x - y)\, dA$, D está acotada por el círculo con centro en el origen y radio 2

22. $\iint_D y\, dA$, D es la región triangular con vértices (0, 0), (1, 1) y (4, 0)

23-32 Halle el volumen del sólido dado.

23. Bajo el plano $3x + 2y - z = 0$ y sobre la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$

24. Bajo la superficie $z = 2x + y^2$ y sobre la región acotada por $x = y^2$ y $x = y^3$

25. Bajo la superficie $z = xy$ y sobre el triángulo con vértices (1, 1), (4, 1) y (1, 2)

26. Encerrado por el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = 2$

27. El tetraedro encerrado por los planos de coordenadas y el plano $2x + y + z = 4$

28. Encerrado por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ y los planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$

29. Acotado por los planos de coordenadas y el plano $3x + 2y + z = 6$

30. Acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante

31. Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante

32. Acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$

33. Use una calculadora graficadora o computadora para estimar las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = x^4$ y $y = 3x - x^2$. Si D es la región acotada por estas curvas, estime $\iint_D x\, dA$.

34. Determine el volumen aproximado del sólido en el primer octante acotado por los planos $y = x$, $z = 0$ y $z = x$ y el cilindro $y = \cos x$. (Use un dispositivo de graficación para estimar los puntos de intersección.)

35-38 Determine el volumen del sólido restando dos volúmenes.

35. El sólido encerrado por los cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ y los planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$

36. El sólido encerrado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $z = 3y$, $z = 2 + y$

37. El sólido bajo el plano $z = 3$, sobre el plano $z = y$, y entre los cilindros parabólicos $y = x^2$ y $y = 1 - x^2$

38. El sólido en el primer octante bajo el plano $z = x + y$, sobre la superficie $z = xy$, y encerrado por las superficies $x = 0$, $y = 0$ y $x^2 + y^2 = 4$

39-40 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

39. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx$

40. $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x)\, dy\, dx$

SAC **41-44** Use un sistema algebraico computacional para hallar el volumen exacto del sólido.

41. Bajo la superficie $z = x^3y^4 + xy^2$ y sobre la región acotada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 + x$ para $x \geqslant 0$

42. Entre los paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ y $z = 8 - x^2 - 2y^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

43. Encerrado por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 0$

44. Encerrado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2y$

45-50 Trace la región de integración y cambie el orden de integración.

45. $\int_0^1 \int_0^y f(x, y)\, dx\, dy$

46. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y)\, dy\, dx$

47. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y)\, dy\, dx$

48. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$

49. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$

50. $\int_0^1 \int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$

51-56 Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración.

51. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx\, dy$

52. $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y}\, \operatorname{sen} y\, dy\, dx$

53. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3 + 1}\, dy\, dx$

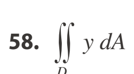
54. $\int_0^2 \int_{y/2}^1 y \cos(x^3 - 1)\, dx\, dy$

55. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \dfrac{1}{y^3 + 1}\, dy\, dx$

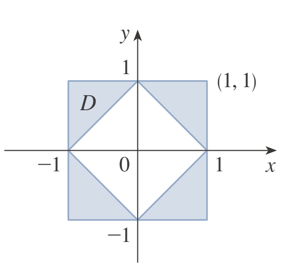
56. $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dy\, dx$

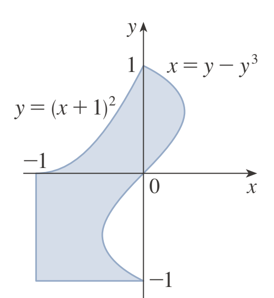
57-58 Exprese D como una unión de regiones de tipo I o tipo II y evalúe la integral.

57. $\iint_D x^2\, dA$



58. $\iint_D y\, dA$





59-60 Use la propiedad 11 para estimar el valor de la integral.

59. $\iint_S \sqrt{4 - x^2y^2}\, dA$, $\quad S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}$

60. $\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA$, Q es el cuarto de círculo con centro en el origen y radio $\frac{1}{2}$ en el primer cuadrante

61-62 Halle el valor promedio de f en la región D.

61. $f(x, y) = xy$, D es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 3)

62. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, D está encerrada por las curvas $y = 0$, $y = x^2$ y $x = 1$

63. Compruebe la propiedad 11.

64. Al evaluar una integral doble en una región D, se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Trace la región D y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.

65-69 Use geometría o simetría, o ambas, para evaluar la integral doble.

65. $\displaystyle\iint_D (x + 2)\, dA$,

$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2}\}$

66. $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dA$, D es el disco con centro en el origen y radio R

67. $\displaystyle\iint_D (2x + 3y)\, dA$, D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$

68. $\displaystyle\iint_D (2 + x^2y^3 - y^2 \operatorname{sen} x)\, dA$,

$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$

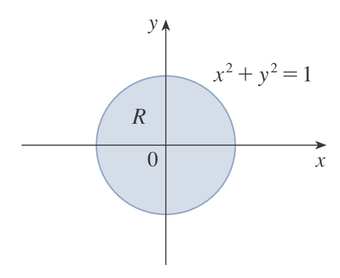
69. $\displaystyle\iint_D \left(ax^3 + by^3 + \sqrt{a^2 - x^2}\right) dA$,

$D = [-a, a] \times [-b, b]$

SAC **70.** Grafique el sólido acotado por el plano $x + y + z = 1$ y el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y determine su volumen exacto. (Use su SAC para hacer la graficación, hallar las ecuaciones de las curvas frontera de la región de integración y evaluar la integral doble.)

15.3 Integrales dobles en coordenadas polares

Suponga que se quiere evaluar una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$, donde R es una de las regiones que aparecen en la figura 1. En cualquier caso, la descripción de R en términos de coordenadas rectangulares es bastante complicada, pero R es fácil de describir usando coordenadas polares.



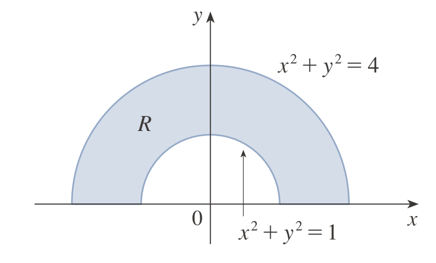


FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

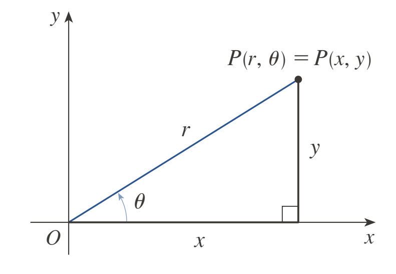


FIGURA 2

Recuerde de la figura 2 que las coordenadas polares (r, θ) de un punto se relacionan con las coordenadas rectangulares (x, y) mediante las ecuaciones

$$r^2 = x^2 = y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

(Véase la sección 10.3.)

Las regiones en la figura 1 son casos especiales de un **rectángulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$$

el cual se muestra en la figura 3. Para calcular la integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$, donde R es un rectángulo polar, se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de igual ancho $\Delta r = (b - a)/m$ y se divide el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de igual ancho $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Entonces los círculos $r = r_i$ y los rayos $\theta = \theta_j$ dividen el rectángulo polar R en los más pequeños rectángulos polares R_{ij} que aparecen en la figura 4.

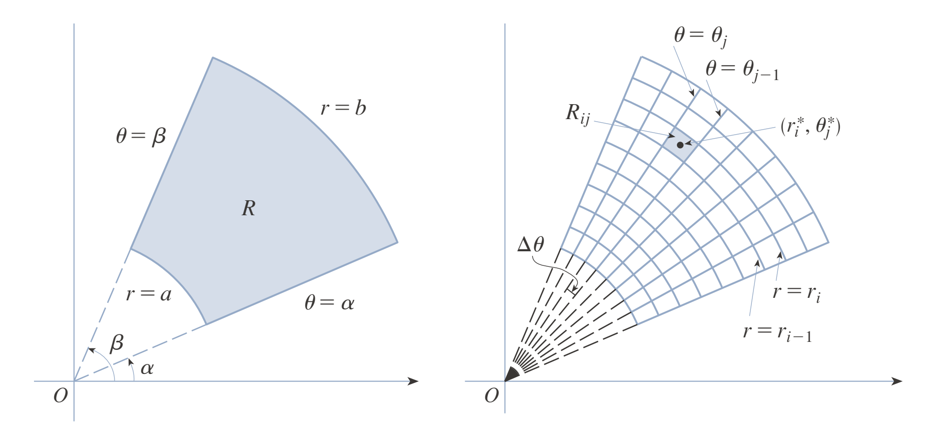


FIGURA 3 Rectángulo polar

FIGURA 4 División de R en subrectángulos polares

El "centro" del subrectángulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i, \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$

tiene coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Se calcula el área de R_{ij} usando el hecho de que el área de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ es $\frac{1}{2}r^2\theta$. Restando las áreas de dos de esos sectores, cada uno de los cuales tiene ángulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, se determina que el área de R_{ij} es

$$\Delta A_i = \tfrac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Aunque se ha definido la integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ en términos de rectángulos ordinarios, se puede demostrar que, para funciones continuas f, siempre se obtiene la misma respuesta usando rectángulos polares. Las coordenadas rectangulares del centro de R_{ij} son $(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)$, así que una típica suma de Riemann es

1 $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\operatorname{sen}\theta_j^*)\,r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Si se escribe $g(r, \theta) = rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, la suma de Riemann de la ecuación 1 puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta$$

la cual es una suma de Riemann para la integral doble

$$\int_\alpha^\beta\int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta$$

Por tanto se tiene

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i$$

$$= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta = \int_\alpha^\beta\int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

2 Cambio a coordenadas polares en una integral doble Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, donde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

La fórmula en (2) establece que se convierten coordenadas rectangulares a polares en una integral doble escribiendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, usando los límites de integración apropiados para r y θ y reemplazando dA por $r\, dr\, d\theta$. **Tenga cuidado de no olvidar el factor adicional r en el miembro derecho de la fórmula 2.** Un método clásico para recordar esto se muestra en la figura 5, donde el rectángulo polar "infinitesimal" puede concebirse como un rectángulo ordinario con dimensiones $r\, d\theta$ y dr y que por tanto tiene un área $dA = r\, dr\, d\theta$.

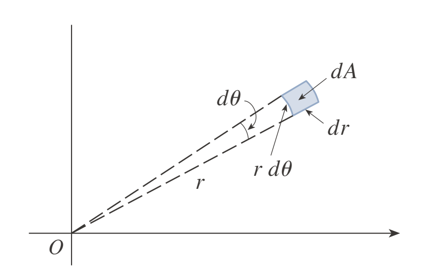


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, donde R es la región en el semiplano superior acotado por los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCIÓN La región R puede describirse como

$$R = \{(x, y) \mid y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

Este es el semianillo que se mostró en la figura 1(b), y en coordenadas polares está dado por $1 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Así, por la fórmula 2,

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x + 4y^2)\, dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\,\text{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\,\text{sen}^2\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \Big[r^3\cos\theta + r^4\,\text{sen}^2\theta\Big]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^\pi (7\cos\theta + 15\,\text{sen}^2\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \Big[7\cos\theta + \tfrac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\Big] d\theta \\
&= 7\,\text{sen}\,\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\,\text{sen}\,2\theta\Big]_0^\pi = \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}$$

Aquí se usa la identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Véase la sección 7.2 para consejos sobre la integración de funciones trigonométricas.

EJEMPLO 2 Halle el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUCIÓN Si se pone $z = 0$ en la ecuación del paraboloide, se obtiene $x^2 + y^2 = 1$. Esto significa que el plano interseca el paraboloide en el círculo $x^2 + y^2 = 1$, así que el sólido reside bajo el paraboloide y sobre el disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$ [véase las figuras 6 y 1(a)]. En coordenadas polares, D está dado por $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Puesto que $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, el volumen es

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

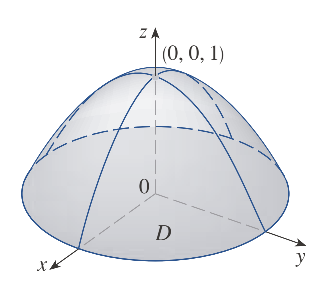


FIGURA 6

Si hubiera usado coordenadas rectangulares en vez de coordenadas polares, habría obtenido

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

lo cual no es fácil de evaluar porque implica determinar $\int (1 - x^2)^{3/2}\, dx$. ■

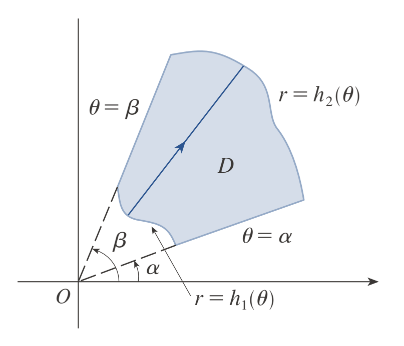


FIGURA 7
$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$

Lo que se ha hecho hasta aquí puede prolongarse al tipo de región, más complicado, que se muestra en la figura 7. Este tipo es similar a las regiones rectangulares tipo II consideradas en la sección 15.2. De hecho, al combinar la fórmula 2 de esta sección con la fórmula 15.2.5, se obtiene la fórmula siguiente.

3 Si f es continua en una región polar de la forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

entonces
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

En particular, al tomar $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ y $h_2(\theta) = h(\theta)$ en esta fórmula, se ve que el área de la región D acotada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, y $r = h(\theta)$ es

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[h(\theta)]^2\, d\theta$$

y esto coincide con la fórmula 10.4.3.

EJEMPLO 3 Use una integral doble para encontrar el área encerrada por un lazo de la rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN En el trazo de la curva en la figura 8 se advierte que un lazo está dado por la región

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$$

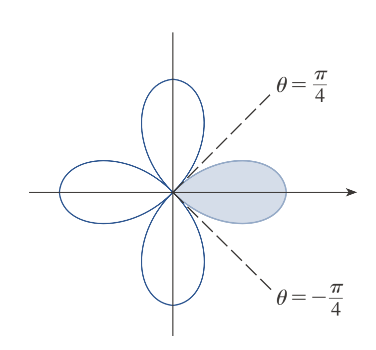


FIGURA 8

Así, el área es

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{4}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$ ■

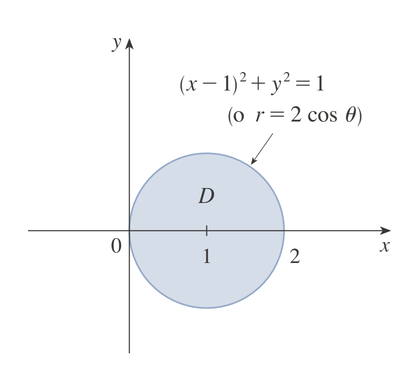


FIGURA 9

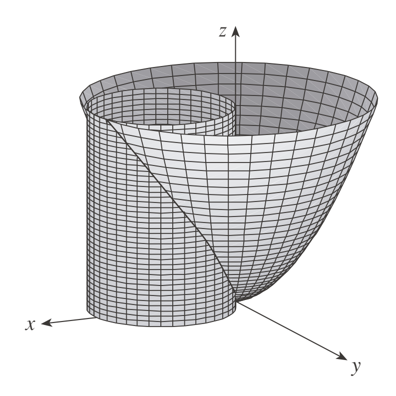


FIGURA 10

EJEMPLO 4 Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$, sobre el plano xy, y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUCIÓN El sólido se tiende arriba del disco D cuyo círculo frontera tiene ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ o, tras completar el cuadrado,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(Véase las figuras 9 y 10.)

En coordenadas polares se tiene $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = r\cos\theta$, así que el círculo frontera se convierte en $r^2 = 2r\cos\theta$, o $r = 2r\cos\theta$. De este modo, el disco D está dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\}$$

y, por la fórmula 3, se tiene

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

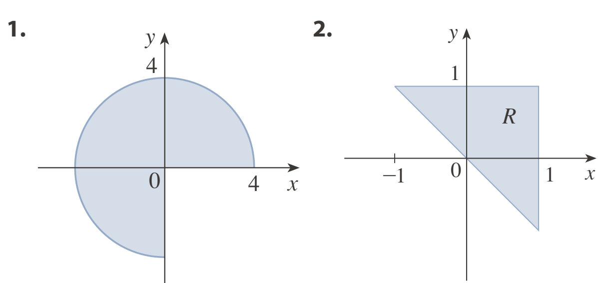
$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right] d\theta$$

$$= 2\left[\tfrac{3}{2}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$ ■

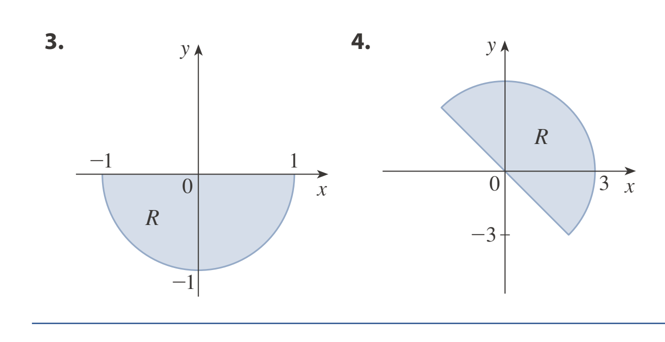
15.3 EJERCICIOS

1-4 Se muestra una región R. Decida si usar coordenadas polares o coordenadas rectangulares y escriba $\iint_R f(x, y)\, dA$ como una integral iterada, donde f es una función continua arbitraria en R.

1. **2.**



3. **4.**



5-6 Trace la región cuya área está dada por la integral y evalúe la integral.

5. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r\, dr\, d\theta$ **6.** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r\, dr\, d\theta$

7-14 Evalúe la integral dada cambiando a coordenadas polares.

7. $\iint_D x^2 y\, dA$, donde D es la mitad superior del disco con centro en el origen y radio 5

8. $\iint_R (2x - y)\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante encerrada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$ y las rectas $x = 0$ y $y = x$

9. $\iint_R \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante entre los círculos con centro en el origen y radios 1 y 3

10. $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{x^2 + y^2}\, dA$, donde R es la región que se encuentra entre los círculos $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$ con $0 < a < b$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA$, donde D es la región acotada por el semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y

12. $\iint_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 2

13. $\iint_R \arctan(y/x)\, dA$, donde
$R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$

14. $\iint_D x\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante que se encuentra entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$

15-18 Use una integral doble para hallar el área de la región.

15. Un lazo de la rosa $r = \cos 3\theta$

16. La región encerrada por los dos cardioides $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 1 - \cos\theta$

17. La región dentro del círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$

18. La región dentro del cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera del círculo $r = 3\cos\theta$

19-27 Use coordenadas polares para determinar el volumen del sólido dado.

19. Bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 25$

20. Bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y sobre el anillo $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$

21. Bajo el plano $2x + y + z = 4$ y sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$

22. Bajo el paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y sobre el plano xy

23. Una esfera de radio a

24. Acotado por los paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$

25. Sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Acotado por los paraboloides $z = 6 - x^2 - y^2$ y $z = 2x^2 + 2y^2$

27. Dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

28. (a) Un taladro cilíndrico con radio r_1 se usa para perforar un agujero en el centro de una esfera de radio r_2. Determine el volumen del sólido en forma de anillo que resta.
(b) Exprese el volumen del inciso (a) en términos de la altura h del anillo. Note que el volumen depende solo de h, no de r_1 ni r_2.

29-32 Evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

29. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2}\, dy\, dx$

30. $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} (2x + y)\, dx\, dy$

31. $\int_0^{1/2} \int_{\sqrt{3}\,y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\, dx\, dy$

32. $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y\, dx\, dy$

33-34 Exprese la integral doble en términos de una integral simple con respecto a r. Use después su calculadora para evaluar la integral con cuatro decimales.

33. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\, dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 1

34. $\iint_D xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dA$, donde D es la porción del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ que está en el primer cuadrante

35. Una piscina es circular con un diámetro de 10 metros. La profundidad es constante a lo largo de las rectas este-oeste y aumenta linealmente de 1 m en el extremo sur a 2 m en el extremo norte. Determine el volumen de agua en la piscina.

36. Un aspersor agrícola distribuye agua en un patrón circular de 50 m de radio. Suministra agua a una profundidad de e^{-r} metros por hora a una distancia de r metros desde el aspersor.
(a) Si $0 < R \leqslant 50$, ¿cuál es la cantidad total de agua suministrada por hora a la región dentro del círculo de radio R centrado en el aspersor?
(b) Determine una expresión para la cantidad promedio de agua por hora por metro cuadrado suministrada a la región dentro del círculo de radio R.

37. Halle el valor promedio de la función $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ en la región anular $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$, donde $0 < a < b$.

38. Sea D el disco con centro en el origen y radio a. ¿Cuál es la distancia promedio de los puntos en D al origen?

39. Use coordenadas polares para combinar la suma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\, dy\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\, dy\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\, dy\, dx$$

en una integral doble. Evalúe después la integral doble.

40. (a) Se define la integral impropia (en la totalidad del plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

donde D_a es el disco con radio a y centro en el origen. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \pi$$

(b) Una definición equivalente de la integral impropia del inciso (a) es

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

donde S_a es el cuadrado con vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esto para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \pi$$

(c) Deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{2}$, demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

(Este es un resultado fundamental en probabilidad y estadística.)

41. Use el resultado del ejercicio 40, inciso (c), para evaluar las integrales siguientes.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx$

15.4 Aplicaciones de las integrales dobles

Ya se ha visto una aplicación de las integrales dobles: calcular volúmenes. Otra aplicación geométrica es determinar áreas de superficies, y esto se hará en la sección siguiente. En esta sección se exploran aplicaciones físicas como el cálculo de masa, carga eléctrica, centro de masa y momento de inercia. Se verá que estas ideas físicas también son importantes cuando se aplican a funciones de densidad de probabilidad de dos variables aleatorias.

Densidad y masa

En la sección 8.3 fue capaz de usar integrales simples para calcular momentos y el centro de masa de una placa o lámina delgada con densidad constante. Pero ahora, equipado con la integral doble, se puede considerar una lámina con densidad variable. Suponga que la lámina ocupa una región D del plano xy y que su **densidad** (en unidades de masa por unidad de área) en un punto (x, y) en D está dada por $\rho(x, y)$, donde ρ es una función continua en D. Esto significa que

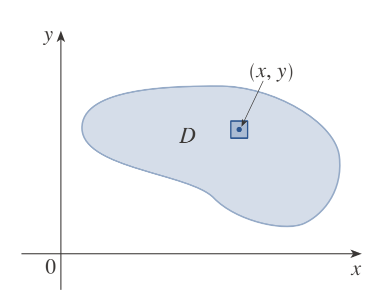


FIGURA 1

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

donde Δm y ΔA son la masa y el área de un rectángulo pequeño que contiene (x, y) y el límite se toma como las dimensiones del rectángulo cerca de 0. (Véase la figura 1.)

Para determinar la masa total m de la lámina, se divide un rectángulo R que contiene a D en subrectángulos R_{ij} del mismo tamaño (como en la figura 2) y se considera que $\rho(x, y)$ es 0 fuera de D. Si se elige un punto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}, la masa de la parte de la lámina que ocupa R_{ij} es aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$, donde ΔA es el área de R_{ij}. Si se suman todas las masas, se obtiene una aproximación de la masa total:

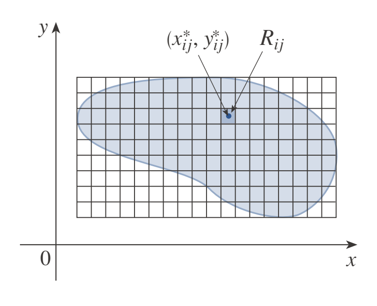


FIGURA 2

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

Si ahora se incrementa el número de subrectángulos, se obtiene la masa total m de la lámina como el valor limitante de las aproximaciones:

1
$$m = \lim_{k,\, l\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

Los físicos también consideran otros tipos de densidad que pueden tratarse de la misma manera. Por ejemplo, si una carga eléctrica se distribuye en una región D y la densidad de

carga (en unidades de carga por unidad de área) está dada por $\sigma(x, y)$ en un punto (x, y) en D, la carga total Q está dada por

2 $$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA$$

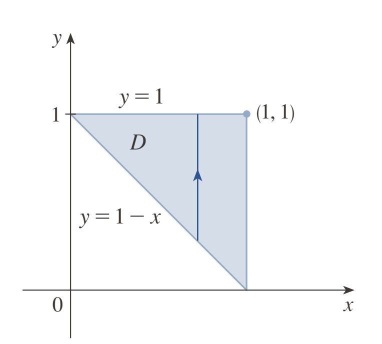


FIGURA 3

EJEMPLO 1 La carga se distribuye en la región triangular D de la figura 3 de tal forma que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = xy$, medida en coulombs por metro cuadrado (C/m²). Determine la carga total.

SOLUCIÓN De la ecuación 2 y la figura 3 se tiene

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}[1^2 - (1 - x)^2]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24}$$

Así, la carga total es $\frac{5}{24}$ C. ■

■ Momentos y centros de masa

En la sección 8.3 se determinó el centro de masa de una lámina con densidad constante; aquí se considera una lámina con densidad variable. Suponga que la lámina ocupa la región D y tiene función de densidad $\rho(x, y)$. Recuerde que en el capítulo 8 se definió el momento de una partícula alrededor de un eje como el producto de su masa y su distancia dirigida desde el eje. Se dividió D en pequeños rectángulos como en la figura 2. Entonces, la masa de R_{ij} es aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$, así que se puede aproximar el momento de R_{ij} con respecto al eje x mediante

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A] y_{ij}^*$$

Si se suman ahora estas cantidades y se toma el límite conforme el número de subrectángulos aumenta, se obtiene el **momento** de la lámina entera **alrededor del eje *x***:

3 $$M_x = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y\, \rho(x, y)\, dA$$

De igual manera, el **momento alrededor del eje *y*** es

4 $$M_y = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x\, \rho(x, y)\, dA$$

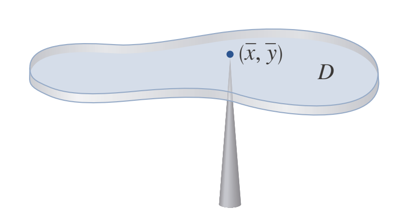


FIGURA 4

Como en el caso anterior, se define el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de tal modo que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$. El significado físico es que la lámina se comporta como si su masa entera se concentrara en su centro de masa. Así, la lámina se balancea horizontalmente cuando es sostenida en su centro de masa (véase la figura 4).

5 Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa de la lámina que ocupa la región D y con función de densidad $\rho(x, y)$ son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x, y)\, dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x, y)\, dA$$

donde la masa m está dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

EJEMPLO 2 Halle la masa y centro de masa de una lámina triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 2) si la función de densidad es $\rho(x, y) = 1 + 3y + y$.

SOLUCIÓN El triángulo aparece en la figura 5. (Note que la ecuación de la frontera superior es $y = 2 - 2x$.) La masa de la lámina es

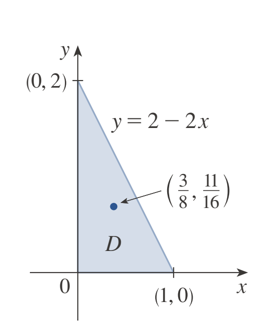
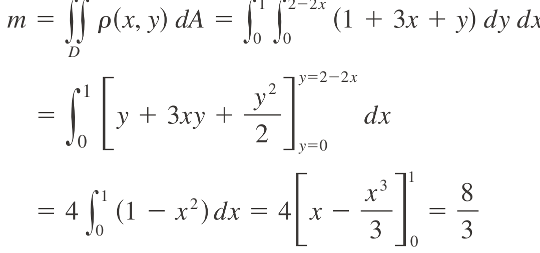


FIGURA 5



$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= 4\int_0^1 (1 - x^2)\, dx = 4\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

Así, las fórmulas en (5) dan

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x, y)\, dA = \tfrac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)\, dy\, dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[xy + 3x^2y + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (x - x^3)\, dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x, y)\, dA = \tfrac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \tfrac{1}{4}\int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[7x - 9\frac{x^2}{2} - x^3 + 5\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16}$$

El centro de masa está en el punto $\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$. ■

EJEMPLO 3 La densidad en cualquier punto en una lámina semicircular es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Encuentre el centro de masa de la lámina.

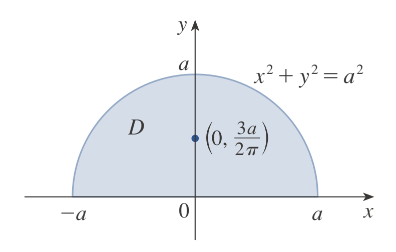


FIGURA 6

SOLUCIÓN Si se concibe la lámina como la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$. (Véase la figura 6.) Entonces, la distancia de un punto (x, y) al centro del círculo (el origen) es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, la función de densidad es

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

donde K es una constante. Tanto la función de densidad como la forma de la lámina sugieren que se conviertan a coordenadas polares. Entonces, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ y la región D está dada por $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Así, la masa de la lámina es

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA$$

$$= \int_0^\pi \int_0^a (Kr)\, r\, dr\, d\theta = K \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2\, dr$$

$$= K\pi \frac{r^3}{3}\bigg]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}$$

Tanto la lámina como la función de densidad son simétricas con respecto al eje y, así que el centro de masa debe estar en el eje y, es decir $\bar{x} = 0$. La coordenada y está dada por

Compare la ubicación del centro de masa del ejemplo 3 con el ejemplo 8.3.4, donde se determinó que el centro de masa de una lámina con la misma forma pero con densidad uniforme se localiza en el punto $(0, 4a/(3\pi))$.

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)\, dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \operatorname{sen}\theta\, (Kr)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^a r^3\, dr = \frac{3}{\pi a^3} \Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}$$

En consecuencia, el centro de masa se localiza en el punto $(0, 3a/(2\pi))$. ■

Momento de inercia

El **momento de inercia** (también llamado **segundo momento**) de una partícula de masa m alrededor de un eje se define como mr^2, donde r es la distancia de la partícula al eje. Se prolongará este concepto a una lámina con función de densidad $\rho(x, y)$ y que ocupa una región D procediendo como lo hizo para los momentos ordinarios. Divida D en pequeños rectángulos, aproxime el momento de inercia de cada subrectángulo alrededor del eje x y tome el límite de la suma cuando el número de subrectángulos aumente. El resultado es el **momento de inercia** de la lámina **alrededor del eje *x***:

6
$$I_x = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA$$

De igual manera, el **momento de inercia alrededor del eje *y*** es:

7
$$I_y = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA$$

También es de interés considerar el **momento de inercia alrededor del origen**, llamado asimismo **momento polar de inercia**:

8 $$I_0 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2\right] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2)\,\rho(x, y)\, dA$$

Nótese que $I_0 = I_x + I_y$.

EJEMPLO 4 Encuentre los momentos de inercia I_x, I_y, e I_0 de un disco homogéneo D con densidad $\rho(x, y) = \rho$, centro en el origen y radio a.

SOLUCIÓN La frontera de D es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y en coordenadas polares D es descrita por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant a$. Calcule primero I_0:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho\, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3\, dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

En vez de calcular I_x e I_y directamente, se usa los hechos de que $I_x + I_y = I_0$ e $I_x = I_y$ (de la simetría del problema). Así,

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}$$ ■

En el ejemplo 4 se advierte que la masa del disco es

$$m = \text{densidad} \times \text{área} = \rho(\pi a^2)$$

así que el momento de inercia del disco alrededor del origen (como una rueda alrededor de su eje) puede escribirse como

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \tfrac{1}{2}(\rho\pi a^2)a^2 = \tfrac{1}{2}ma^2$$

Así, si se aumenta la masa o el radio del disco, se incrementa el momento de inercia. En general, el momento de inercia desempeña casi el mismo papel en el movimiento rotacional que el que desempeña la masa en el movimiento lineal. El momento de inercia de una rueda es lo que dificulta iniciar o detener la rotación de la rueda, así como la masa de un automóvil es lo que dificulta iniciar o detener el movimiento del vehículo.

El **radio de giro de una lámina alrededor de un eje** es el número R, tal que

9 $$mR^2 = I$$

donde m es la masa de la lámina e I es el momento de inercia alrededor del eje dado. La ecuación 9 indica que si la masa de la lámina se concentrara en una distancia R desde el eje, el momento de inercia de esta "masa de punto" sería igual al momento de inercia de la lámina.

En particular, el radio de giro $\bar{\bar{y}}$ con respecto al eje x y el radio de giro $\bar{\bar{x}}$ con respecto al eje y están dados por las ecuaciones

10 $$m\bar{\bar{y}}^2 = I_x \qquad m\bar{\bar{x}}^2 = I_y$$

Así, $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ es el punto en el que la masa de la lámina puede concentrarse sin cambiar los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas. (Note la analogía con el centro de masa.)

EJEMPLO 5 Determine el radio de giro alrededor del eje x del disco del ejemplo 4.

SOLUCIÓN Como se indicó, la masa del disco es $m = \rho\pi a^2$, así que de las ecuaciones 10 se tiene

$$\bar{\bar{y}}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Por tanto, el radio de giro alrededor del eje x es $\bar{\bar{y}} = \frac{1}{2}a$, lo cual es la mitad del radio del disco. ■

Probabilidad

En la sección 8.5 se considera la *función de densidad de probabilidad* f de una variable aleatoria continua X. Esto significa que $f(x) \geqslant 0$ para todas las x, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, y la probabilidad de que X se halle entre a y b se determina integrando f de a a b:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Ahora se considera un par de variables aleatorias continuas X y Y, como el período de vida de dos componentes de una máquina o la altura y peso de una mujer adulta elegidos al azar. La **función de densidad conjunta** de X y Y es una función f de dos variables tales que la probabilidad de que (X, Y) esté en una región D es

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA$$

En particular, si la región es un rectángulo, la probabilidad de que X se ubique entre a y b, y Y se ubique entre c y d es

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

(Véase la figura 7.)

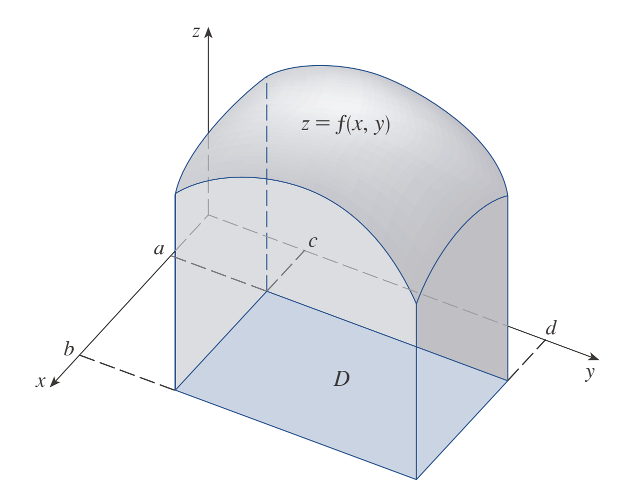


FIGURA 7
La probabilidad de que X se ubique entre a y b, y Y se ubique entre c y d, es el volumen que reside sobre el rectángulo $D = [a, b] \times [c, d]$ y bajo la gráfica de la función de densidad conjunta.

Como las probabilidades no son negativas y se miden en una escala de 0 a 1, la función de densidad conjunta tiene las propiedades siguientes:

$$f(x, y) \geqslant 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$$

Al igual que en el ejercicio 15.3.40, la integral doble en $\mathbb{R}^2$ es una integral impropia definida como el límite de las integrales dobles en círculos o cuadrados en expansión, y se puede escribir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

EJEMPLO 6 Si la función de densidad conjunta para X y Y está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

determine el valor de la constante C. Determine después $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

SOLUCIÓN Encuentre el valor de C cerciorándose de que la integral doble de f sea igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ fuera del rectángulo $[0, 10] \times [0, 10]$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{10}\int_0^{10} C(x + 2y)\, dy\, dx = C\int_0^{10} \Big[xy + y^2\Big]_{y=0}^{y=10} dx$$

$$= C\int_0^{10} (10x + 100)\, dx = 1500C$$

Por tanto, 1500C = 1, así que $C = \frac{1}{1500}$.

Ahora es posible calcular la probabilidad de que X sea a lo sumo de 7 y Y al menos de 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7}\int_{2}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^7\int_2^{10} \tfrac{1}{1500}(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{1500}\int_0^7 \Big[xy + y^2\Big]_{y=2}^{y=10} dx = \tfrac{1}{1500}\int_0^7 (8x + 96)\, dx$$

$$= \tfrac{868}{1500} \approx 0.5787$$

Suponga que X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_1(x)$ y Y una variable aleatoria con función de densidad $f_2(y)$. Entonces, X y Y se llaman **variables aleatorias independientes** si su función de densidad conjunta es el producto de sus funciones de densidad particulares:

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

En la sección 8.5 se modelaron tiempos de espera usando funciones exponenciales de densidad

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

donde μ es la media del tiempo de espera. En el ejemplo siguiente se considerará una situación con dos tiempos de espera independientes.

EJEMPLO 7 El gerente de una sala de cine determina que el tiempo promedio que los cinéfilos esperan en fila para comprar un boleto y ver la película de esta semana es de 10 minutos, y que el tiempo promedio que esperan para comprar palomitas es

de 5 minutos. Suponiendo que los tiempos de espera son independientes, determine la probabilidad de que un cinéfilo espere un total de menos de 20 minutos antes de ocupar su asiento.

SOLUCIÓN Suponiendo que tanto el tiempo de espera X para la compra de boletos como el tiempo de espera Y en la fila de la dulcería son modelados por funciones exponenciales de densidad de probabilidad, se pueden escribir las funciones de densidad particulares como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-y/5} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

Puesto que X y Y son independientes, la función de densidad conjunta es el producto:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} & \text{si } x \geqslant 0,\, y \geqslant 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se pide determinar la probabilidad de que $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

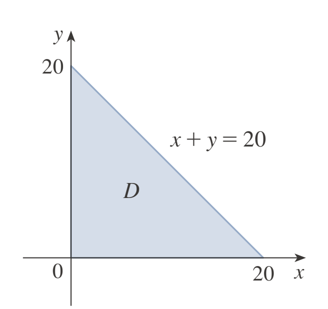


FIGURA 8

donde D es la región triangular que aparece en la figura 8. Así,

$$\begin{aligned} P(X + Y < 20) &= \iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^{20}\int_0^{20-x} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5}\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{50}\int_0^{20} \Big[e^{-x/10}(-5)e^{-y/5}\Big]_{y=0}^{y=20-x} dx \\ &= \frac{1}{10}\int_0^{20} e^{-x/10}(1 - e^{(x-20)/5})\, dx \\ &= \frac{1}{10}\int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4}e^{x/10})\, dx \\ &= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476 \end{aligned}$$

Esto significa que aproximadamente 75% de los cinéfilos esperan menos de 20 minutos antes de ocupar su asiento. ■

Valores esperados

Recuerde de la sección 8.5 que si X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f, su *media* es

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Ahora bien, si X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta f, defina la **media de X** y la **media de Y**, también llamadas **valores esperados** de X y Y, como

11 $$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y)\, dA \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y)\, dA$$

Observe qué parecidas son las expresiones para μ_1 y μ_2 en (11) los momentos M_x y M_y de una lámina con función de densidad ρ en las ecuaciones 3 y 4. De hecho, se puede concebir la probabilidad como una masa continuamente distribuida. Se calcula la probabilidad como se calculó la masa, integrando una función de densidad. Y como la "masa de probabilidad" total es 1, las expresiones para $\bar{x}$ y $\bar{y}$ en (5) indican que se pueden concebir los valores esperados de X y Y, μ_1 y μ_2, como las coordenadas del "centro de masa" de la distribución de probabilidad.

En el ejemplo siguiente se tratará con distribuciones normales. Como en la sección 8.5, una variable aleatoria está *normalmente distribuida* si su función de densidad de probabilidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

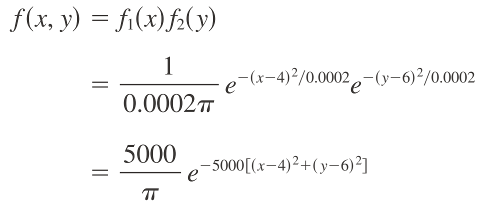
donde μ es la media y σ la desviación estándar.

EJEMPLO 8 Una fábrica produce cojinetes de rodillos (de forma cilíndrica) que se venden con un diámetro de 4.0 cm y una longitud de 6.0 cm. De hecho, los diámetros X están normalmente distribuidos con una media de 4.0 cm y desviación estándar de 0.01 cm; mientras que las longitudes Y están normalmente distribuidas con una media de 6.0 cm y desviación estándar de 0.01 cm. Suponiendo que X y Y son independientes, escriba la función de densidad conjunta y grafíquela. Halle la probabilidad de que un cojinete aleatoriamente seleccionado de la línea de producción tenga una longitud o diámetro que difiera de la media en más de 0.02 cm.

SOLUCIÓN Se da que X y Y están normalmente distribuidas con $\mu_1 = 4.0$, $\mu_2 = 6.0$, y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.01$. Así, las funciones de densidad particulares para X y Y son

$$f_1(x) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/0.0002} \qquad f_2(y) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-(y-6)^2/0.0002}$$

Como X y Y son independientes, la función de densidad conjunta es el producto:



$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_1(x)f_2(y) \\ &= \frac{1}{0.0002\pi} e^{-(x-4)^2/0.0002} e^{-(y-6)^2/0.0002} \\ &= \frac{5000}{\pi} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]} \end{aligned}$$

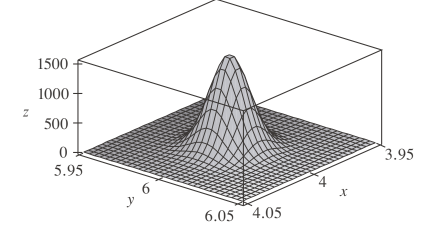


FIGURA 9
Gráfica de la función de densidad conjunta bivariada normal del ejemplo 8

Una gráfica de esta función se presenta en la figura 9.

Calcule primeramente la probabilidad de que tanto X como Y difieran de sus medias en menos de 0.02 cm. Al usar una calculadora o computadora para estimar la integral, se tiene

$$\begin{aligned} P(3.98 < X < 4.02, 5.98 < Y < 6.02) &= \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} f(x, y)\, dy\, dx \\ &= \frac{5000}{\pi} \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}\, dy\, dx \\ &\approx 0.91 \end{aligned}$$

Entonces, la probabilidad de que X o Y difiera de su media en más de 0.02 cm es de aproximadamente

$$1 - 0.91 = 0.09$$ ■

15.4 EJERCICIOS

1. La carga eléctrica se distribuye en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 5$, $2 \leqslant y \leqslant 5$ de tal forma que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Determine la carga total en el rectángulo.

2. La carga eléctrica se distribuye en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ de tal forma que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Determine la carga total en el disco.

3-10 Halle la masa y centro de masa de la lámina que ocupa la región D y que tiene la función de densidad ρ dada.

3. $D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3, 1 \leqslant y \leqslant 4\}$; $\rho(x, y) = ky^2$



4. D es la región triangular encerrada por las rectas $x = 0$, $y = x$, y $2x + y = 6$; $\rho(x, y) = x^2$

5. D es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$

6. D es la región triangular encerrada por las rectas $y = 0$, $y = 2x$, y $x + 2y = 1$; $\rho(x, y) = x$

7. D está acotada por $y = 1 - x^2$ y $y = 0$; $\rho(x, y) = ky$

8. D está acotada por $y = x + 2$ y $y = x^2$; $\rho(x, y) = kx^2$

9. D está acotada por las curvas $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; $\rho(x, y) = xy$

10. D está encerrada por las curvas $y = 0$, y $y = \cos x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$; $\rho(x, y) = y$

11. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en el primer cuadrante. Determine su centro de masa si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia del eje x.

12. Determine el centro de masa de la lámina del ejercicio 11 si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de su distancia del origen.

13. La frontera de una lámina consta de los semicírculos $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = \sqrt{4 - x^2}$ junto con las porciones del eje x que los unen. Determine el centro de masa de la lámina si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia del origen.

14. Determine el centro de masa de la lámina del ejercicio 13 si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia del origen.

15. Determine el centro de masa de una lámina en forma de un triángulo rectángulo isósceles con lados iguales de longitud a si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el vértice opuesto de la hipotenusa.

16. Una lámina ocupa la región dentro del círculo $x^2 + y^2 = 2y$ pero fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Halle el centro de masa si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia del origen.

17. Halle los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio 3.

18. Halle los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio 6.

19. Halle los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio 15.

20. Considere una aspa de ventilador cuadrada con lados de longitud 2 y la esquina inferior izquierda ubicada en el origen. Si la densidad del aspa es $\rho(x, y) = 1 + 0.1x$, ¿es más difícil rotar el aspa alrededor del eje x o alrededor del eje y?

21-24 Una lámina con densidad constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa la región dada. Halle los momentos de inercia I_x y I_y y los radios de giro $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{\bar{y}}$.

21. El rectángulo $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant h$

22. El triángulo con vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$ y $(0, h)$

23. La parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ en el primer cuadrante

24. La región bajo la curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi$

SAC **25-26** Use un sistema algebraico computacional para determinar la masa, centro de masa y momentos de inercia de la lámina que ocupa la región D y tiene la función de densidad dada.

25. D está encerrada por el lazo derecho de la rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$; $\rho(x, y) = x^2 + y^2$

26. $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant xe^{-x}, 0 \leqslant x \leqslant 2\}$; $\rho(x, y) = x^2y^2$

27. La función de densidad conjunta para un par de variables aleatorias X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{en caso contario} \end{cases}$$

(a) Determine el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y \leqslant 1)$.

28. (a) Verifique que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es una función de densidad conjunta.
(b) Si X y Y son variables aleatorias cuya función de densidad conjunta es la función f del inciso (a), halle
(i) $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}\right)$ (ii) $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}, Y \leqslant \frac{1}{2}\right)$
(c) Halle los valores esperados de X y Y.

29. Suponga que X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)} & \text{si } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ 0 & \text{en caso contario} \end{cases}$$

(a) Verifique que f es en efecto una función de densidad conjunta.
(b) Encuentre las probabilidades siguientes.
(i) $P(Y \geqslant 1)$ (ii) $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 4)$
(c) Encuentre los valores esperados de X y Y.

30. (a) Una lámpara tiene dos focos, cada uno de un tipo con período de vida promedio de 1000 horas. Suponiendo que se puede calcular la probabilidad de falla de un foco mediante una función exponencial de densidad con media $\mu = 1000$, halle la probabilidad de que ambos focos de la lámpara fallen en menos de 1000 horas.
(b) Otra lámpara tiene un solo foco del mismo tipo que en el inciso (a). Si un foco se funde y es reemplazado por otro del mismo tipo, encuentre la probabilidad de que los dos focos fallen en menos de un total de 1000 horas.

SAC **31.** Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes, donde X está normalmente distribuida con una media de 45 y la desviación estándar de 0.5, y Y está normalmente distribuida con una media de 20 y desviación estándar de 0.1.
(a) Determine $P(40 \leqslant X \leqslant 50, 20 \leqslant Y \leqslant 25)$.
(b) Determine $P(4(X - 45)^2 + 100(Y - 20)^2 \leqslant 2)$.

32. Xavier y Yolanda tienen clases que terminan al mediodía y convienen en reunirse todos los días después de clases. Llegan a la cafetería en forma independiente. La hora de llegada de Xavier es X y la hora de llegada de Yolanda es Y, donde X y Y se miden en minutos después del mediodía. Las funciones de densidad particulares son

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(Xavier llega un poco después de mediodía y es más probable que llegue a tiempo que tarde. Yolanda siempre llega a las 12:10 de la tarde y es más probable que llegue tarde que a tiempo.) Después de su llegada, Yolanda espera a Xavier hasta media hora, pero él no la esperará. Determine la probabilidad de que se encuentren.

33. Cuando se estudia la propagación de una epidemia, se supone que la probabilidad de que un individuo contagiado propague la enfermedad a otro individuo no contagiado es una función de distancia entre ellos. Considere una ciudad circular con 10 km de radio, donde la población está uniformemente distribuida. Para un individuo no contagiado en un punto fijo $A(x_0, y_0)$, suponga que la función de probabilidad está dada por

$$f(P) = \tfrac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

donde $d(P, A)$ denota la distancia entre los puntos P y A.
(a) Suponga que la exposición de una persona a la enfermedad es la suma de las probabilidades de contraer la enfermedad por parte de todos los miembros de la población. Suponga que las personas contagiadas están uniformemente distribuidas en la ciudad, con k individuos contagiados por kilómetro cuadrado. Halle una integral doble que represente la exposición de una persona residente en A.
(b) Evalúe la integral para el caso en el que A es el centro de la ciudad y para el caso en que A se localiza en el extremo de la ciudad. ¿Dónde preferiría vivir usted?

15.5 Área de una superficie

En la sección 16.6 se tratará con áreas de superficies más generales, llamadas superficies paramétricas, así que esta sección no necesita ser cubierta si se cubre aquella.

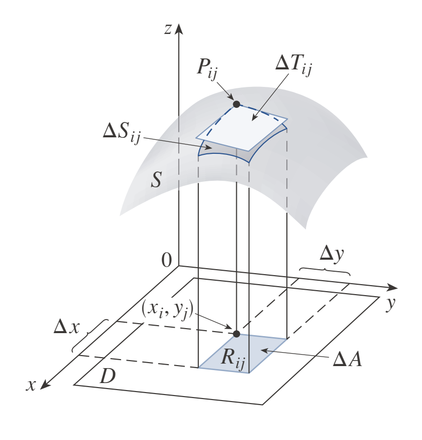


FIGURA 1

En esta sección se aplican las integrales dobles al problema de calcular el área de una superficie. En la sección 8.2 se determinó el área de un tipo muy especial de superficie (una superficie de revolución) por los métodos del cálculo de una variable. Aquí se calculará el área de una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, la gráfica de una función de dos variables.

Sea S una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, donde f tiene derivadas parciales continuas. Para mayor facilidad en la derivación de la fórmula del área de superficie, se supondrá que $f(x, y) \geqslant 0$ y el dominio D de f es un rectángulo. Se divide D en pequeños rectángulos R_{ij} con área $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$. Si (x_i, y_j) es la esquina de R_{ij} más cercana al origen, sea $P_{ij}(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ el punto en S directamente arriba de él (véase la figura 1). El plano tangente a S en P_{ij} es una aproximación de S cerca de P_{ij}. Así, el área ΔT_{ij} de la parte de este plano tangente (un paralelogramo) que se halla directamente arriba de R_{ij} es una aproximación del área ΔS_{ij} de la parte de S que se halla directamente arriba de R_{ij}. De este modo, la suma $\Sigma\Sigma\, \Delta T_{ij}$ es una aproximación del área total de S, y esta aproximación parece mejorar conforme aumenta el número de rectángulos. En consecuencia, se define el **área de superficie** de S como

1
$$A(S) = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

Para determinar una fórmula más conveniente que la ecuación 1 con fines de cálculo, sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ los vectores que parten de P_{ij} y se tienden a lo largo de los lados del paralelogramo con área ΔT_{ij}. (Véase la figura 2.) Entonces, $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Recuerde de la sección 14.3 que $f_x(x_i, y_j)$ y $f_y(x_i, y_j)$ son las pendientes de las rectas tangentes que pasan por P_{ij} en las direcciones de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Por tanto,

$$\mathbf{a} = \Delta x\, \mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\, \Delta x\, \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y\, \mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\, \Delta y\, \mathbf{k}$$

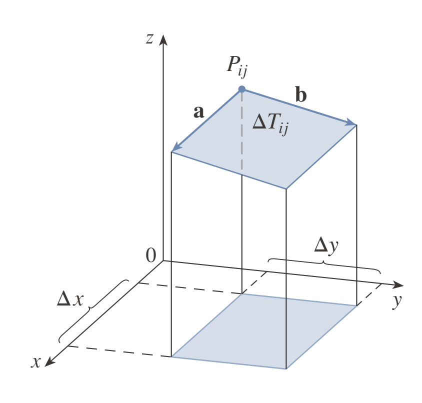


FIGURA 2

y

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\,\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\,\Delta y \end{vmatrix}$$

$$= -f_x(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y\,\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y\,\mathbf{j} + \Delta x\,\Delta y\,\mathbf{k}$$

$$= [-f_x(x_i, y_j)\,\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,\Delta A$$

Así,
$$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\,\Delta A$$

De la definición 1 se tiene entonces

$$A(S) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\,\Delta A$$

y por la definición de una integral doble se obtiene la fórmula siguiente.

2 El área de la superficie con ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde f_x y f_y son continuas, es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\; dA$$

En la sección 16.6 se verificará que esta fórmula es congruente con la fórmula previa para el área de una superficie de revolución. Si se usa la notación alternativa para derivadas parciales, es posible reescribir la fórmula 2 como sigue:

3
$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\; dA$$

Nótese la semejanza entre la fórmula de área de superficie en la ecuación 3 y la fórmula de longitud de arco de la sección 8.1:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área de la superficie $z = x^2 + 2y$ que se encuentra sobre la región triangular T en el plano xy con vértices (0. 0), (1, 0) y (1, 1).

SOLUCIÓN La región T aparece en la figura 3 y está descrita por

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

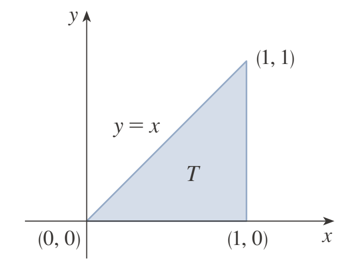


FIGURA 3



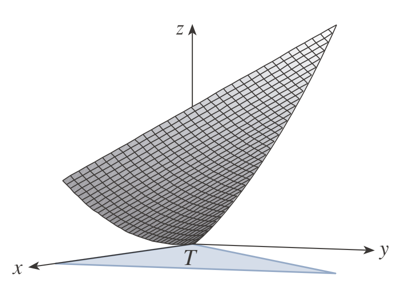


FIGURA 4

Usando la fórmula 2 con $f(x, y) = x^2 + 2y$ se obtiene

$$A = \iint_T \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1}\, dA = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 5}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 5}\, dx = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{2}{3}(4x^2 + 5)^{3/2}\Big]_0^1 = \tfrac{1}{12}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$$

La figura 4 muestra la porción de la superficie cuya área se acaba de calcular. ■

EJEMPLO 2 Halle el área del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra bajo el plano $z = 9$.

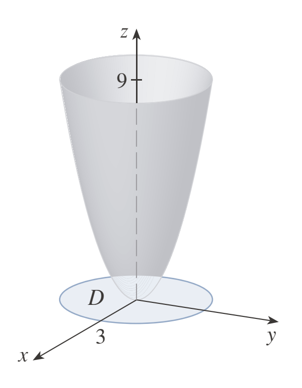


FIGURA 5

SOLUCIÓN El plano interseca el paraboloide en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Así, la superficie dada se encuentra sobre el disco D con centro en el origen y radio 3. (Véase la figura 5.) Usando la fórmula 5 se tiene

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Al convertir a coordenadas polares se obtiene

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \tfrac{1}{8}\sqrt{1 + 4r^2}\,(8r)\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$ ■

15.5 EJERCICIOS

1-12 Determine el área de la superficie.

1. La parte del plano $5x + 3y - z + 6 = 0$ que está sobre el rectángulo $[1, 4] \times [2, 6]$
2. La parte del plano $6x + 4y + 2z = 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 25$
3. La parte del plano $3x + 2y - z = 6$ que está en el primer octante
4. La parte de la superficie $2y + 4z - x^2 = 5$ que está sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(2, 4)$
5. La parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano $z = -2$
6. La parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que está sobre el cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$
7. La parte del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está sobre el rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$ y $(4, 2)$
8. La parte de la superficie $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(2, 1)$
9. La parte de la superficie $z = xy$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
10. La parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy
11. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y sobre el plano xy
12. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$

13-14 Determine el área de la superficie con cuatro decimales expresando el área en términos de una integral simple y usando su calculadora para estimar la integral.

13. La parte de la superficie $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$ que está sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$
14. La parte de la superficie $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

15. (a) Use la regla del punto medio para integrales dobles (véase la sección 15.1) con cuatro cuadrados para estimar la porción del área de la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está sobre el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar el área de superficie del inciso (a) con cuatro decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).

16. (a) Use la regla del punto medio para integrales dobles con $m = n = 2$ para estimar el área de la superficie $z = xy + x^2 + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar el área de superficie del inciso (a) con cuatro decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).

SAC **17.** Determine el área exacta de la superficie $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

SAC **18.** Determine el área exacta de la superficie

$$z = 1 + x + y + x^2 \qquad -2 \leqslant x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant y \leqslant 1$$

Ilustre graficando la superficie.

SAC **19.** Determine con cuatro decimales el área de la parte de la superficie $z = 1 + x^2y^2$ que está sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

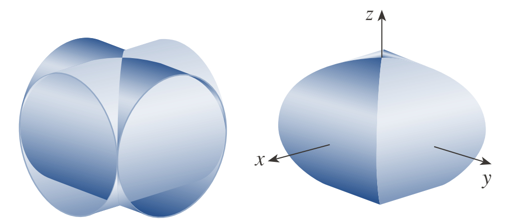
SAC **20.** Determine con cuatro decimales el área de la parte de la superficie $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está sobre el cuadrado $|x| + |y| \leqslant 1$. Ilustre graficando esta parte de la superficie.

21. Demuestre que el área de la parte del plano $z = ax + by + c$ que se proyecta en la región D en el plano xy con área $A(D)$ es $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\, A(D)$.

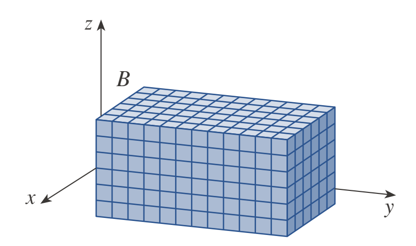
22. Si usted intenta usar la fórmula 2 para hallar el área de la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, tiene un pequeño problema, porque la integral doble es impropia. De hecho, el integrando tiene una discontinuidad infinita en cada punto del círculo frontera $x^2 + y^2 = a^2$. Sin embargo, la integral puede calcularse como el límite de la integral en el disco $x^2 + y^2 \leqslant t^2$ cuando $t \to a^-$. Use este método para demostrar que el área de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.

23. Determine el área de la parte finita del paraboloide $y = x^2 + z^2$ cortado por el plano $y = 25$. [*Sugerencia*: proyecte la superficie en el plano xz.]

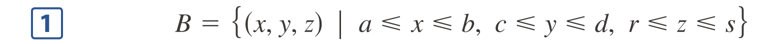
24. La figura muestra la superficie creada cuando el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ interseca el cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Determine el área de esta superficie.



15.6 Integrales triples



Así como se definieron las integrales simples para funciones de una variable y las integrales dobles para funciones de dos variables, se pueden definir integrales triples para funciones de tres variables. Se tratará primero el caso más simple, en el que f es definida en una caja rectangular:



$$\boxed{1} \qquad B = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ r \leqslant z \leqslant s\}$$

El primer paso es dividir B en subcajas. Esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho Δx, dividiendo $[c, d]$ en m subintervalos de ancho Δy y dividiendo $[r, s]$ en n subintervalos de ancho Δz. Los planos que pasan por los puntos extremos de estos subintervalos paralelos a los planos de coordenadas dividen la caja B en lmn subcajas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

que aparecen en la figura 1. Cada subcaja tiene volumen $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$.

Luego se forma la **triple suma de Riemann**

$$\boxed{2} \qquad \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

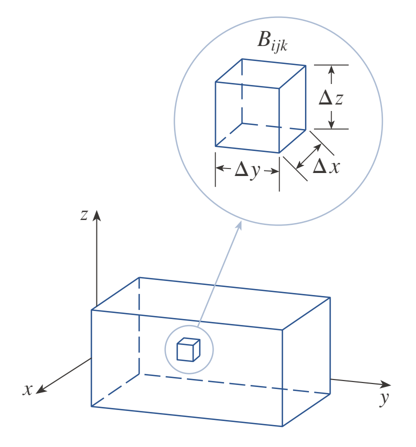


FIGURA 1

donde el punto muestra $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está en B_{ijk}. Por analogía con la definición de la integral doble (15.1.5), se define la integral triple como el límite de las triples sumas de Riemann en (2).

3 Definición La integral triple de f en la caja B es

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

si este límite existe.

Otra vez, la integral triple siempre existe si f es continua. Se puede elegir como punto muestra cualquier punto en la subcaja, pero si se escoge el punto (x_i, y_j, z_k) se obtiene una expresión de apariencia más simple para la integral triple:

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V$$

Lo mismo que en el caso de las integrales dobles, el método práctico para evaluar las integrales triples es expresarlas como integrales iteradas, de esta manera.

4 Teorema de Fubini para integrales triples Si f es continua en la caja rectangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, entonces

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

La integral iterada del miembro derecho del teorema de Fubini significa que primero se integra con respecto a x (manteniendo fijas a y y z), luego se integra con respecto a y (manteniendo fija z) y finalmente se integra con respecto a z. Hay otros cinco órdenes posibles en que se puede integrar, todos los cuales dan el mismo valor. Por ejemplo, si se integra con respecto a y, luego a z y después a x, se tiene

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

EJEMPLO 1 Evalúe la integral triple $\iiint_B xyz^2\, dV$, donde B es la caja rectangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$$

SOLUCIÓN Se podría usar cualesquiera de los seis posibles órdenes de integración. Si se decide integrar con respecto a x, luego a y, y después a z, se obtiene

$$\iiint_B xyz^2\, dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy\, dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\, dy\, dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\, dz = \frac{z^3}{4}\Bigg]_0^3 = \frac{27}{4}$$

Ahora se define **la integral triple en una región acotada general *E*** en el espacio tridimensional (un sólido) siguiendo casi el mismo procedimiento que se usó para las integrales dobles (15.2.2). Se encierra E en una caja B del tipo dado por la ecuación 1. Luego se define F de tal forma que coincida con f en E, aunque sea 0 para puntos en B fuera de E. Por definición,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_B F(x, y, z)\, dV$$

Esta integral existe si f es continua y la frontera de E es "razonablemente suave". La integral triple tiene en esencia las mismas propiedades que la integral doble (propiedades 6-9 de la sección 15.2).

Se restringe la atención a funciones continuas f y a ciertos tipos simples de regiones. Se dice que una región sólida E es de **tipo 1** si se sitúa entre las gráficas de dos funciones continuas de x y y, es decir

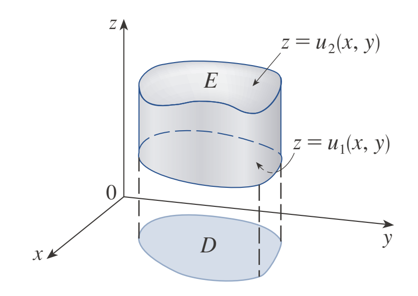


FIGURA 2
Región sólida tipo 1

5 $$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xy, como se muestra en la figura 2. Note que la frontera superior del sólido E es la superficie con ecuación $z = u_2(x, y)$, mientras que la frontera inferior es la superficie $z = u_1(x, y)$.

Por el mismo tipo de argumento que llevó a (15.2.3), se puede demostrar que si E es una región tipo 1 dada por la ecuación 5, entonces

6 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

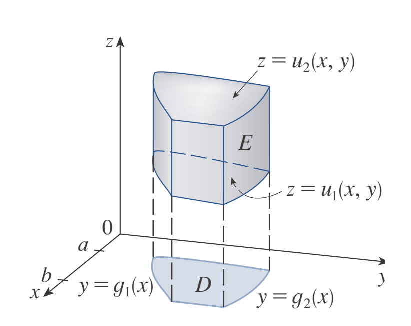


FIGURA 3
Región sólida tipo 1 donde la proyección D es una región plana tipo 1

El significado de la integral interior en el miembro derecho de la ecuación 6 es que x y y se mantienen fijas, y por tanto $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$ se consideran constantes, mientras que $f(x, y, z)$ se integra con respecto a z.

En particular, si la proyección D de E en el plano xy es una región plana tipo 1 (como en la figura 3), entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

y la ecuación 6 se convierte en

7 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

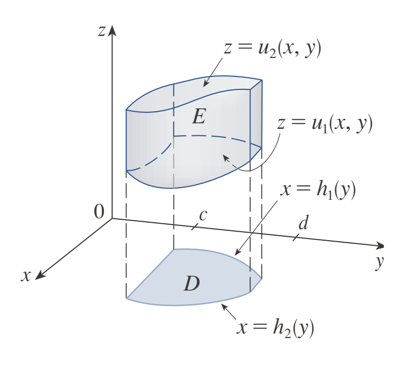
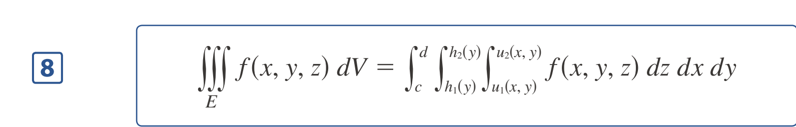


FIGURA 4
Región sólida tipo 1 con una proyección tipo II

Si por otro lado, D es una región plana tipo II (como en la figura 4), entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

y la ecuación 6 se convierte en

8

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$



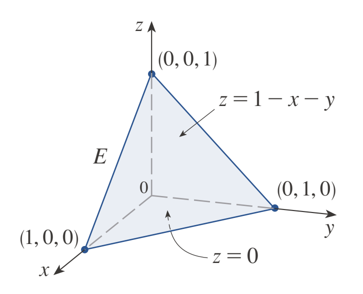


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Evalúe $\iiint_B z\,dV$, donde E es el tetraedro sólido acotado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

SOLUCIÓN Cuando se establece una integral triple, es prudente dibujar dos diagramas: uno de la región sólida E (véase la figura 5) y otro de su proyección D en el plano xy (véase la figura 6). La frontera inferior del tetraedro es el plano $z = 0$ y la frontera superior es el plano $x + y + z = 1$ (o $z = 1 - x - y$), así que se usa $u_1(x, y) = 0$ y $u_2(x, y) = 1 - x - y$ en la fórmula 7. Observe que los planos $x + y + z = 1$ y $z = 0$ intersecan en la recta $x + y = 1$ (o $y = 1 - x$) en el plano xy. Así, la proyección de E es la región triangular que aparece en la figura 6, y se tiene

9 $$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$$

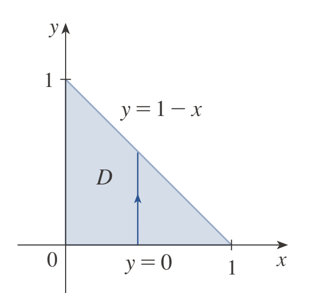


FIGURA 6

Esta descripción de E como región tipo 1 permite evaluar la integral como sigue:

$$\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\,dy\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \tfrac{1}{6}\int_0^1 (1 - x)^3\,dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1 - x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$ ■

Una región sólida E es de **tipo 2** si es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leqslant x \leqslant u_2(y, z)\}$$

Donde, esta vez, D es la proyección de E en el plano yz (véase la figura 7). La superficie posterior es $x = u_1(y, z)$, la superficie anterior es $x = u_2(y, z)$ y se tiene

10 $$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z)\,dx\right] dA$$

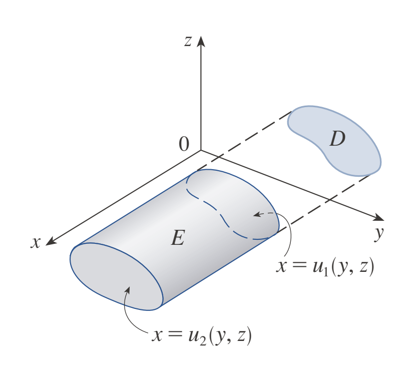


FIGURA 7
Región tipo 2

Por último, una región **tipo 3** es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leqslant y \leqslant u_2(x, z)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xz, $y = u_1(x, z)$ es la superficie izquierda y $y = u_2(x, z)$ es la superficie derecha (véase la figura 8). Para este tipo de región se tiene

11 $$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z)\,dy\right] dA$$

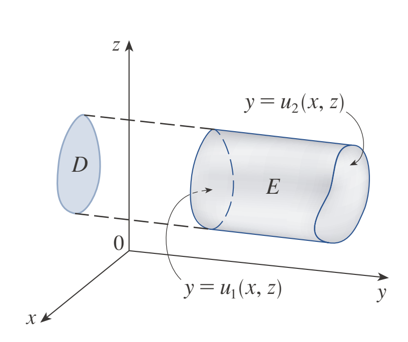


FIGURA 8
Región tipo 3

En cada una de las ecuaciones 10 y 11 hay dos posibles expresiones para la integral, dependiendo de si D es una región plana tipo I o tipo II (en correspondencia con las ecuaciones 7 y 8).

EJEMPLO 3 Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\,dV$, donde E es la región acotada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$.

SOLUCIÓN El sólido E se muestra en la figura 9. Si se considera una región tipo 1, se debe considerar su proyección D_1 en el plano xy, que es la región parabólica en la figura 10. (La traza de $y = x^2 + z^2$ en el plano $z = 0$ es la parábola $y = x^2$.)

TEC Visual 15.6 ilustra cómo regiones sólidas (incluida la de la figura 9) se proyectan en planos de coordenadas.

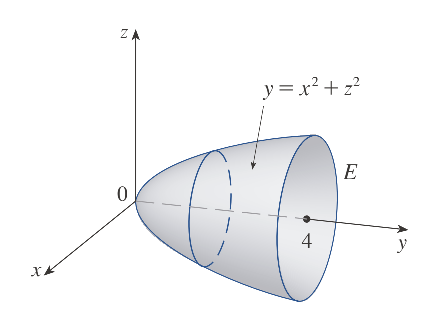


FIGURA 9
Región de integración

FIGURA 10
Proyección en el plano xy

De $y = x^2 + z^2$ se obtiene $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, así que la superficie frontera inferior de E es $z = -\sqrt{y - x^2}$ y la superficie superior es $z = \sqrt{y - x^2}$. Por tanto, la descripción de E como región tipo 1 es

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4,\ -\sqrt{y - x^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{y - x^2}\right\}$$

y se obtiene

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$$

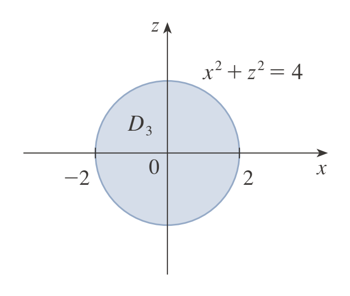


FIGURA 11
Proyección en el plano xz

Aunque esta expresión es correcta, es extremadamente difícil de evaluar. Así, se considera en su lugar a E como región tipo 3. En este caso, su proyección D_3 en el plano xz es el disco $x^2 + z^2 \leqslant 4$ que aparece en la figura 11.

Entonces la frontera izquierda de E es el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y la frontera derecha es el plano $y = 4$, así que si se toma $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ y $u_2(x, z) = 4$ en la ecuación 11 se tiene

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy\right] dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

Aunque esta integral podría escribirse como

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

es más fácil convertir a coordenadas polares en el plano xz: $x = r\cos\theta$, $z = r\,\text{sen}\,\theta$. Esto da

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\, dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}$$

■

El paso más difícil para evaluar una integral triple es establecer una expresión para la región de integración (como la ecuación 9 del ejemplo 2). Recuerde que los límites de integración en la integral interior contienen a lo sumo dos variables, los límites de integración en la integral intermedia contienen a lo sumo una variable y los límites de integración en la integral exterior deben ser constantes.

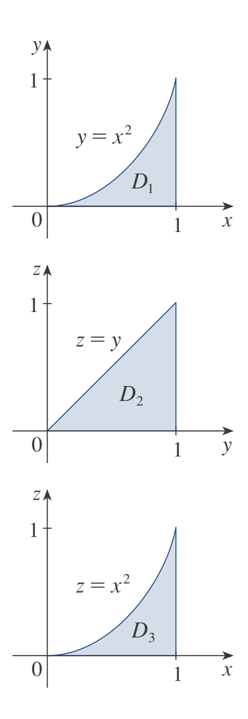


FIGURA 12
Proyecciones de E

EJEMPLO 4 Exprese la integral iterada $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$ como una integral triple y después reescríbala como integral iterada en un orden diferente, integrando primero con respecto a x, luego a z y después a y.

SOLUCIÓN Se puede escribir

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

donde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2, 0 \leqslant z \leqslant y\}$. Esta descripción de E nos permite escribir proyecciones en los tres planos de coordenadas, como sigue:

en el plano xy: $\quad D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$

$$= \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 1\}$$

en el plano yz: $\quad D_2 = \{(y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant y\}$

en el plano xz: $\quad D_3 = \{(x, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x^2\}$

De los trazos resultantes de las proyecciones en la figura 12 se obtiene el sólido E de la figura 13. Se ve que este es el sólido encerrado por los planos $z = 0$, $x = 1$, $y = z$, y el cilindro parabólico $y = x^2$ (o $x = \sqrt{y}$).

Si se integra primero con respecto a x, luego a z y después a y, se usa una descripción alterna de E:

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant y, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 1\}$$

Así,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$$

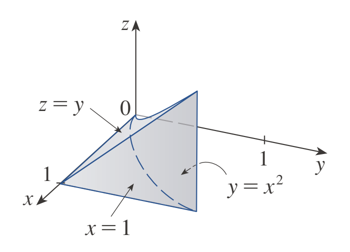


FIGURA 13
El sólido E

Aplicaciones de integrales triples

Recuerde que si $f(x) \geqslant 0$, la integral simple $\int_a^b f(x)\, dx$ representa el área bajo la curva, $y = f(x)$ de a a b, y si $f(x, y) \geqslant 0$, la integral doble $\iint_D f(x, y)\, dA$ representa el volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre D. La correspondiente interpretación de la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$, donde $f(x, y, z) \geqslant 0$, no es muy útil, porque sería el "hipervolumen" de un objeto tetradimensional y, desde luego, eso es muy difícil de visualizar. (Recuerde que E es solo el *dominio* de la función f; la gráfica de f reside en el espacio tetradimensional.) No obstante, la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ puede interpretarse de diferentes maneras en diversas situaciones físicas, dependiendo de las interpretaciones físicas de x, y, z y $f(x, y, z)$.

Comience con el caso especial en el que $f(x, y, z) = 1$ para todos los puntos en E. La integral triple representa entonces el volumen de E:

12
$$V(E) = \iiint_E dV$$

Por ejemplo, esto puede verse en el caso de una región tipo 1 poniendo $f(x, y, z) = 1$ en la fórmula 6:

$$\iiint_E 1\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} dz \right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)]\, dA$$

y por la sección 15.2 se sabe que esto representa el volumen que se encuentra entre las superficies $z = u_1(x, y)$ y $z = u_2(x, y)$.

EJEMPLO 5 Use una integral triple para determinar el volumen del tetraedro T acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, y $z = 0$.

SOLUCIÓN El tetraedro T y su proyección D en el plano xy aparecen en las figuras 14 y 15, respectivamente. La frontera inferior de T es el plano $z = 0$ y la frontera superior es el plano $x + 2y + z = 2$, es decir $z = 2 - x - 2y$.

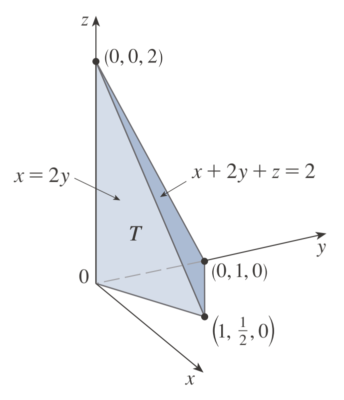


FIGURA 14

FIGURA 15

Por tanto, se tiene

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx = \tfrac{1}{3}$$

por el mismo cálculo del ejemplo 15.2.4.

(Adviértase que no es necesario usar integrales triples para calcular volúmenes. Simplemente ofrecen un método alternativo para establecer el cálculo.) ■

Todas las aplicaciones de las integrales dobles de la sección 15.4 pueden prolongarse inmediatamente a las integrales triples. Por ejemplo, si la función de densidad de un objeto sólido que ocupa la región E es $\rho(x, y, z)$, en unidades de masa por unidad de volumen, en cualquier punto dado (x, y, z), entonces su **masa** es

13 $$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

y sus **momentos** alrededor de los tres planos de coordenadas son

14 $$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\, dV \qquad M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\, dV$$

El **centro de masa** se localiza en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

15 $$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$



Si la densidad es constante, el centro de masa del sólido se llama **centroide** de E. Los **momentos de inercia** alrededor de los tres ejes de coordenadas son

16
$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,dV \qquad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,dV$$
$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\,\rho(x, y, z)\,dV$$

Como en la sección 15.4, la **carga eléctrica** total en un objeto sólido que ocupa una región E y con densidad de carga $\sigma(x, y, z)$ es

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)\,dV$$

Si se tienen tres variables aleatorias continuas X, Y y Z, su **función de densidad conjunta** es una función de tres variables tal que la probabilidad de que (X, Y, Z) resida en E es

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z)\,dV$$

En particular,

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d,\ r \leqslant Z \leqslant s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

La función de densidad conjunta satisface

$$f(x, y, z) \geqslant 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx = 1$$

EJEMPLO 6 Halle el centro de masa de un sólido de densidad constante acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN El sólido E y su proyección en el plano xy aparecen en la figura 16. Las superficies inferior y superior de E son los planos $z = 0$ y $z = x$, así que se describe E como una región tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1,\ y^2 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant x\}$$

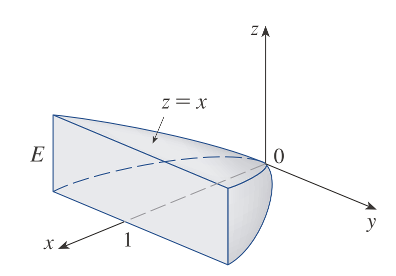
Entonces, si la densidad es $\rho(x, y, z) = \rho$, la masa es

$$m = \iiint_E \rho\,dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x \rho\,dz\,dx\,dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x\,dx\,dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} (1 - y^4)\,dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4)\,dy$$

$$= \rho\left[y - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4\rho}{5}$$



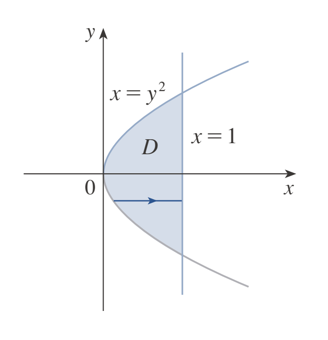


FIGURA 16

Debido a la simetría de E y ρ respecto al plano xz, se puede decir de inmediato que $M_{xz} = 0$, y por tanto $\bar{y} = 0$. Los otros momentos son

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x\rho\, dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} x\rho\, dz\, dx\, dy \\ &= \rho\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\, dx\, dy = \rho\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{2\rho}{3}\int_0^1 (1 - y^6)\, dy = \frac{2\rho}{3}\left[y - \frac{y^7}{7}\right]_0^1 = \frac{4\rho}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_E z\rho\, dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} z\rho\, dz\, dx\, dy \\ &= \rho\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x} dx\, dy = \frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\, dx\, dy \\ &= \frac{\rho}{3}\int_0^1 (1 - y^6)\, dy = \frac{2\rho}{7} \end{aligned}$$

En consecuencia, el centro de masa es

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\tfrac{5}{7}, 0, \tfrac{5}{14}\right)$$ ■

15.6 EJERCICIOS

1. Evalúe la integral del ejemplo 1 integrando primero con respecto a y, luego a z y después a x.

2. Evalúe la integral $\iiint_E (xz - y^3)\, dV$, donde

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

usando tres diferentes órdenes de integración.

3-8 Evalúe la integral iterada.

3. $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y)\, dx\, dy\, dz$

4. $\int_0^1 \int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy\, dz\, dx\, dy$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y} \int_0^{x} \cos(x + y + z)\, dz\, dx\, dy$

6. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \int_0^{xz} x^2 \operatorname{sen} y\, dy\, dz\, dx$

7. $\int_0^{\pi} \int_0^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \operatorname{sen} x\, dy\, dz\, dx$

8. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\, dz\, dy\, dx$

9-18 Evalúe la integral triple.

9. $\iiint_E y\, dV$, donde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant x, x - y \leqslant z \leqslant x + y\}$$

10. $\iiint_E e^{z/y}\, dV$, donde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant xy\}$$

11. $\iiint_E 2x\, dV$, donde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2}, 0 \leqslant z \leqslant y\}$$

12. $\iiint_E xy\, dV$, donde E está acotado por los cilindros parabólicos $y = x^2$ y $x = y^2$ y los planos $z = 0$ y $z = x + y$

13. $\iiint_E 6xy\, dV$, donde E reside bajo el plano $z = 1 + x + y$, y sobre la región en el plano xy acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, y $x = 1$

14. $\iiint_E (x - y)\, dV$, donde E está encerrado por las superficies $z = x^2 - 1$, $z = 1 - x^2$, $y = 0$, y $y = 2$

15. $\iiint_T y^2\, dV$, donde T es el tetraedro sólido con vértices (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 2)

16. $\iiint_T xz\,dV$, donde T es el tetraedro sólido con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(0, 0, 1)$

17. $\iiint_E x\,dV$, donde E está acotado por el paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$

18. $\iiint_E z\,dV$, donde E está acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 3x$ y $z = 0$ en el primer octante

19-22 Use una integral triple para hallar el volumen del sólido dado.

19. El tetraedro encerrado por los planos de coordenadas y el plano $2x + y + z = 4$

20. El sólido encerrado por los paraboloides $y = x^2 + z^2$ y $y = 8 - x^2 + z^2$

21. El sólido encerrado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $z = 0$ y $y + z = 1$

22. El sólido encerrado por el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y los planos $y = -1$, y $y + z = 4$

23. (a) Exprese el volumen de la cuña en el primer octante cortada del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ por los planos $y = x$ y $x = 1$ como una integral triple.

SAC (b) Use la tabla de integrales (en las páginas de referencia 6-10) o un sistema algebraico computacional para determinar el valor exacto de la integral triple del inciso (a).

24. (a) En la **regla del punto medio para integrales triples** se usa una triple suma de Riemann para aproximar una integral triple en una caja B, donde $f(x, y, z)$ se evalúa en el centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ de la caja B_{ijk}. Use la regla del punto medio para estimar $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV$, donde B es el cubo definido por $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant 4$. Divida B en ocho cubos de igual tamaño.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar la integral del inciso (a) al entero más cercano. Compare con la respuesta del inciso (a).

25-26 Use la regla del punto medio para integrales triples (ejercicio 24) para estimar el valor de la integral. Divida B en ocho subcajas de igual tamaño.

25. $\iiint_B \cos(xyz)\,dV$, donde $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$

26. $\iiint_B \sqrt{x}\,e^{xyz}\,dV$, donde $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2\}$

27-28 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

27. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\,dz\,dx$

28. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\,dz\,dy$

29-32 Exprese la integral $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ como una integral iterada de seis maneras diferentes, donde E es el sólido acotado por las superficies dadas.

29. $y = 4 - x^2 - 4z^2, \quad y = 0$

30. $y^2 + z^2 = 9, \quad x = -2, \quad x = 2$

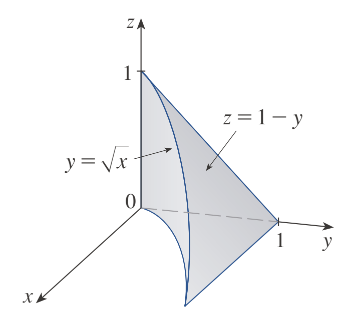
31. $y = x^2, \quad z = 0, \quad y + 2z = 4$

32. $x = 2, \quad y = 2, \quad z = 0, \quad x + y - 2z = 2$

33. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

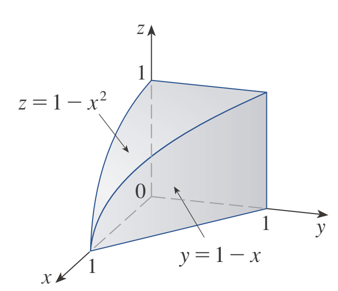
Reescriba esta integral como una integral iterada equivalente en los otros cinco órdenes.



34. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx$$

Reescriba esta integral como una integral iterada equivalente en los otros cinco órdenes.



35-36 Escriba otras cinco integrales iteradas iguales a la integral iterada dada.

35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$

36. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$

37-38 Evalúe la integral triple usando solo interpretación geométrica y simetría.

37. $\iiint_C (4 + 5x^2yz^2)\,dV$, donde C es la región cilíndrica $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $-2 \leqslant z \leqslant 2$

38. $\iiint_B (z^3 + \operatorname{sen} y + 3)\,dV$, donde B es la pelota unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$

39-42 Determine la masa y el centro de masa del sólido E con la función de densidad ρ dada.

39. E se encuentra sobre el plano xy y bajo el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$; $\rho(x, y, z) = 3$

40. E está acotado por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $x + z = 1$, $x = 0$ y $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$

41. E es el cubo dado por $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

42. E es el tetraedro acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

43-46 Suponga que el sólido tiene densidad constante k

43. Determine los momentos de inercia para un cubo cuyos lados miden L si un vértice se localiza en el origen y tres aristas se tienden a lo largo de los ejes de coordenadas.

44. Determine los momentos de inercia para un ladrillo rectangular con dimensiones a, b y c, y masa M si el centro del ladrillo está situado en el origen y las aristas son paralelas a los ejes de coordenadas.

45. Determine el momento de inercia alrededor del eje z del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

46. Determine el momento de inercia alrededor del eje z del cono sólido $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h$.

47-48 Establezca, pero no evalúe, expresiones integrales para (a) la masa, (b) el centro de masa y (c) el momento de inercia alrededor del eje z.

47. El sólido del ejercicio 21; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

48. El hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

SAC **49.** Sea E el sólido en el primer octante acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$ y $z = 0$ con la función de densidad $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use un sistema algebraico computacional para hallar los valores exactos de las cantidades para E siguientes.
(a) La masa
(b) El centro de masa
(c) El momento de inercia alrededor del eje z

SAC **50.** Si E es el sólido del ejercicio 18 con función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine las cantidades siguientes, con tres decimales.
(a) La masa
(b) El centro de masa
(c) El momento de inercia alrededor del eje z

51. La función de densidad conjunta para las variables aleatorias X, Y y Z es $f(x, y, z) = Cxyz$ si $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$, y $f(x, y, z) = 0$, en caso contrario.
(a) Determine el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y + Z \leqslant 1)$.

52. Suponga que X, Y y Z son variables aleatorias con función de densidad conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0.5x+0.2y+0.1z)}$ si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, y $f(x, y, z) = 0$, en caso contrario.
(a) Determine el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.

53-54 El **valor promedio** de una función $f(x, y, z)$ en una región sólida E se define como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\,dV$$

donde $V(E)$ es el volumen de E. Por ejemplo, si ρ es una función de densidad, entonces ρ_{prom} es la densidad promedio de E.

53. Halle el valor promedio de la función $f(x, y, z) = xyz$ en el cubo con longitud de lados L que reside en el primer octante con un vértice en el origen y aristas paralelas a los ejes de coordenadas.

54. Halle la altura promedio de los puntos en el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$

---

55. (a) Encuentre la región E para la integral triple

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\,dV$$

es un máximo.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para calcular el valor máximo exacto de la integral triple del inciso (a).

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO VOLÚMENES DE HIPERESFERAS

En este proyecto se determinarán fórmulas para el volumen encerrado por una hiperesfera en el espacio n dimensional.

1. Use una integral doble y sustitución trigonométrica, junto con la fórmula 64 de la tabla de integrales, para determinar el área de un círculo con radio r.
2. Use una integral triple y sustitución trigonométrica para determinar el volumen de una esfera con radio r.
3. Use una integral cuádruple para determinar el volumen (tetradimensional) encerrado por la hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ en $\mathbb{R}^4$. (Use solo sustitución trigonométrica y las fórmulas de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ o $\int \cos^n x\, dx$.)
4. Use una integral de múltiple para determinar el volumen encerrado por una hiperesfera de radio r en el espacio n dimensional $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: las fórmulas son diferentes para n pares y n impares.]

15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas

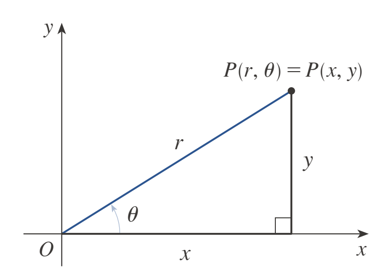


FIGURA 1

En geometría plana, el sistema de coordenadas polares se usa para dar una descripción conveniente de ciertas curvas y regiones. (Véase la sección 10.3.) La figura 1 permite recordar la relación entre coordenadas polares y cartesianas. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), de la figura se deduce que

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

En tres dimensiones hay un sistema de coordenadas, llamado *coordenadas cilíndricas*, que es similar a las coordenadas polares y da descripciones convenientes de algunas superficies y sólidos de ocurrencia común. Como se verá, algunas integrales triples son mucho más fáciles de evaluar en coordenadas cilíndricas.

Coordenadas cilíndricas

En el **sistema de coordenadas cilíndricas**, un punto P en el espacio tridimensional es representado por la terna ordenada (r, θ, z), donde r y θ son coordenadas polares de la proyección de P en el plano xy, y z es la distancia dirigida del plano xy a P. (Véase la figura 2.)

Para convertir de coordenadas cilíndricas a rectangulares, se usan las ecuaciones

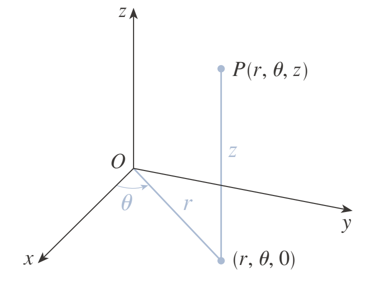


FIGURA 2
Las coordenadas cilíndricas de un punto

1 $$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

mientras que para convertir de coordenadas rectangulares a cilíndricas se usan

2 $$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

EJEMPLO 1
(a) Trace el punto con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ y determine sus coordenadas rectangulares.
(b) Encuentre las coordenadas cilíndricas del punto con coordenadas rectangulares $(3, -3, -7)$.

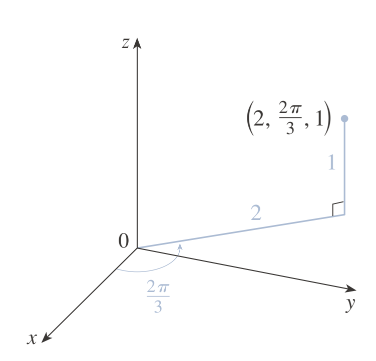


FIGURA 3

SOLUCIÓN
(a) El punto con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ se traza en la figura 3. De las ecuaciones 1, sus coordenadas rectangulares son

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

Así, el punto es $\left(-1, \sqrt{3}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares.

(b) De las ecuaciones 2 se tiene

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \text{de modo que} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Por tanto, un conjunto de coordenadas cilíndricas es $\left(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7\right)$. Otro es $\left(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7\right)$. Como en el caso de las coordenadas polares, las opciones son infinitas. ■

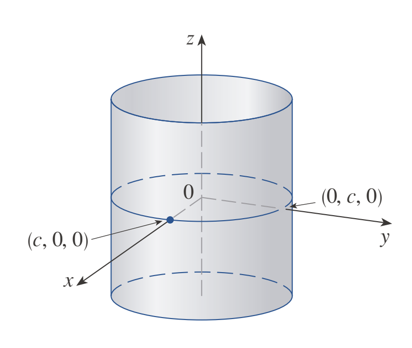


FIGURA 4
$r = c$, un cilindro

Las coordenadas cilíndricas son útiles en problemas que implican simetría alrededor de un eje, y se escoge el eje z para coincidir con este eje de simetría. Por ejemplo, el eje del cilindro circular con ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ es el eje z. En coordenadas cilíndricas este cilindro tiene la simple ecuación $r = c$. (Véase la figura 4.) Esta es la razón del nombre coordenadas "cilíndricas".



EJEMPLO 2 Describa la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = r$.

SOLUCIÓN La ecuación indica que el valor z, o altura, de cada punto en la superficie es el mismo que r, la distancia desde el punto al eje z. Como θ no aparece, puede variar. Así, cualquier traza horizontal en el plano $z = k$ $(k > 0)$ es un círculo de radio k. Estas trazas sugieren que la superficie es un cono. Esta predicción puede confirmarse convirtiendo la ecuación a coordenadas rectangulares. De esta primera ecuación en (2) se tiene

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

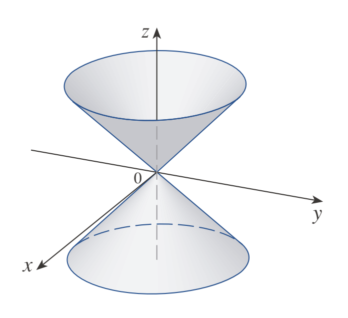


FIGURA 5
$z = r$, un cono

Se reconoce la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ (en comparación con la tabla 1 de la sección 12.6) como un cono circular cuyo eje está en el eje z (véase la figura 5). ■

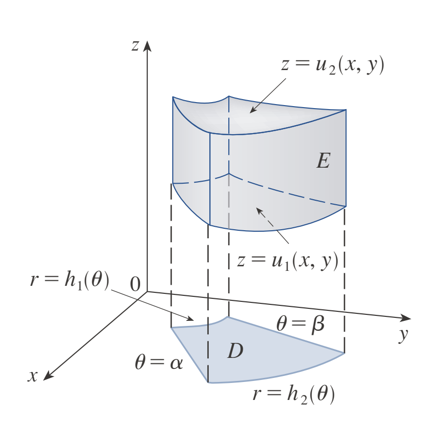


FIGURA 6

Evaluación de integrales triples con coordenadas cilíndricas

Suponga que E es una región tipo 1 cuya proyección D en el plano xy es convenientemente descrita en coordenadas polares (véase la figura 6). En particular, suponga que f es continua y

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

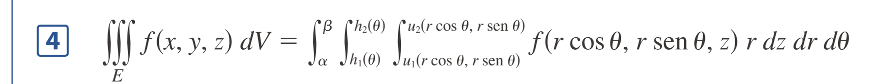
donde D está dada en coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

Por la ecuación 15.6.6 se sabe que

3 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right] dA$$

Pero también se sabe cómo evaluar integrales dobles en coordenadas polares. De hecho, al combinar la ecuación 3 con la ecuación 15.3.3 se obtiene



4 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

La fórmula 4 es la **fórmula para la integración triple en coordenadas cilíndricas**. Establece que se convierte una integral triple de coordenadas rectangulares a cilíndricas escribiendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, dejando z como está, usando los límites de integración apropiados para z, r y θ, y reemplazando dV por $r\,dz\,dr\,d\theta$. (La figura 7 muestra cómo recordar esto.) Vale la pena usar esta fórmula cuando E es una región sólida fácil de describir en coordenadas cilíndricas, y especialmente cuando la función $f(x, y, z)$ implica la expresión $x^2 + y^2$.

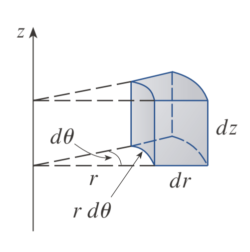


FIGURA 7
Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

EJEMPLO 3 Un sólido E se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, bajo el plano $z = 4$ y sobre el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Véase la figura 8.) La densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje del cilindro. Determine la masa de E.

SOLUCIÓN En coordenadas cilíndricas, el cilindro es $r = 1$ y el paraboloide es $z = 1 - r^2$, así que se puede escribir

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 1 - r^2 \leqslant z \leqslant 4\}$$

Como la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia desde el eje z, la función de densidad es

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

donde K es la constante de proporcionalidad. Por tanto, con base en la fórmula 15.6.13, la masa de E es

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r_2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta = K\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr$$

$$= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$ ■

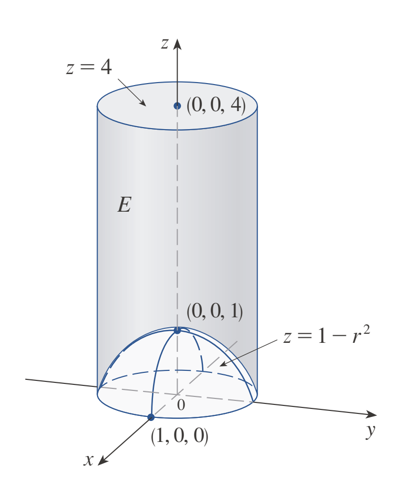


FIGURA 8

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$.

SOLUCIÓN Esta integral iterada es una integral triple en la región sólida

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

y la proyección de E en el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$. La superficie inferior de E es el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y su superficie superior es el plano $z = 2$. (Véase la figura 9.) Esta región tiene una descripción mucho más simple en coordenadas cilíndricas:

$$E = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 2,\ r \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

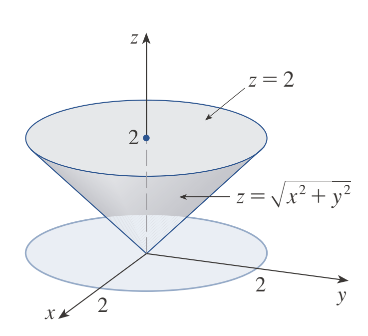


FIGURA 9

Por tanto, se tiene

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx = \iiint_E (x^2+y^2)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r)\,dr$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi$$

■

15.7 EJERCICIOS

1-2 Trace el punto cuyas coordenadas cilíndricas se dan. Determine después las coordenadas rectangulares del punto.

1. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$

2. (a) $\left(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2\right)$ (b) $(1, 1, 1)$

3-4 Cambie de coordenadas rectangulares a cilíndricas.

3. (a) $\left(1, \sqrt{3}, -1\right)$ (b) $\left(3, -3, 2\right)$

4. (a) $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right)$ (b) $(2, 2, 2)$

5-6 Describa con palabras la superficie cuya ecuación se da.

5. $r = 2$ **6.** $\theta = \pi/6$

7-8 Identifique la superficie cuya ecuación se da.

7. $r^2 + z^2 = 4$ **8.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

9-10 Escriba las ecuaciones en coordenadas cilíndricas.

9. (a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ (b) $z = x^2 - y^2$

10. (a) $2x^2 - 2y^2 - z^2 = 4$ (b) $2x - y + z = 1$

11-12 Trace el sólido descrito por las desigualdades dadas.

11. $r^2 \leqslant z \leqslant 8 - r^2$

12. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad r \leqslant z \leqslant 2$

13. Un proyectil cilíndrico es de 20 cm de largo, con radio interno de 6 cm y radio externo de 7 cm. Escriba desigualdades que describan el proyectil en un sistema de coordenadas apropiado. Explique cómo posicionó el sistema de coordenadas con respecto al proyectil.

14. Use un dispositivo de graficación para dibujar el sólido encerrado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 5 - x^2 - y^2$.

15-16 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúe la integral.

15. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$ **16.** $\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^r r\,dz\,d\theta\,dr$

17-28 Use coordenadas cilíndricas.

17. Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, donde E es la región que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y entre los planos $z = -5$ y $z = 4$.

18. Evalúe $\iiint_E z\,dV$, donde E está encerrado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

19. Evalúe $\iiint_E (x + y + z)\, dV$, donde E es el sólido en el primer octante que está bajo el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

20. Evalúe $\iiint_E (x - y)\, dV$, donde E es el sólido que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 16$, sobre el plano xy, y bajo el plano $z = y + 4$.

21. Evalúe $\iiint_E x^2\, dV$, donde E es el sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sobre el plano $z = 0$ y bajo el cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

22. Evalúe $\iiint_E x dV$, donde E está encerrado por los planos $z = 0$ y $z = x + y + 5$, y por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

23. Determine el volumen del sólido encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

24. Determine el volumen del sólido que está entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

25. (a) Determine el volumen de la región E que está entre el paraboloide $z = 24 - x^2 - y^2$ y el cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
(b) Determine el centroide de E (el centro de masa en el caso en que la densidad es constante).

26. (a) Determine el volumen del sólido que el cilindro $r = a \cos \theta$ corta de la esfera de radio a centrada en el origen.
(b) Ilustre el sólido del inciso (a) graficando la esfera y el cilindro en la misma pantalla.

27. Determine la masa y el centro de masa del sólido S acotado por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ y el plano $z = a$ $(a > 0)$ si S tiene densidad constante K.

28. Determine la masa de una pelota B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a$ si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde del eje z.

29-30 Evalúe la integral cambiando a coordenadas cilíndricas.

29. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\, dz\, dx\, dy$

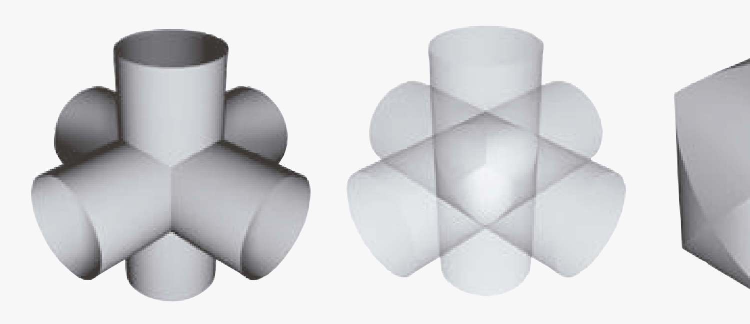
30. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

31. Cuando estudian la formación de cadenas montañosas, los geólogos estiman la cantidad de trabajo requerido para levantar una montaña desde el nivel del mar. Considere una montaña que tiene esencialmente la forma de un cono circular recto. Suponga que la densidad de peso del material alrededor de un punto P es $g(P)$ y la altura $h(P)$.
(a) Determine una integral definida que represente el trabajo total efectuado para formar la montaña.
(b) Suponga que el Monte Fuji en Japón tiene la forma de un cono circular recto con radio 19 000 m, altura 3800 m y densidad constante 3200 kg/m^3. ¿Cuánto trabajo se hizo para formar el Monte Fuji si el terreno estaba inicialmente al nivel del mar?


© S.R. Lee Photo Traveller / Shutterstock.com

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO — LA INTERSECCIÓN DE TRES CILINDROS

La figura muestra el sólido encerrado por tres cilindros circulares con el mismo diámetro que intersecan en ángulos rectos. En este proyecto se calculará su volumen y se determinará cómo cambia su forma si los cilindros tienen diámetros diferentes.



1. Trace cuidadosamente el sólido encerrado por los tres cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$. Indique las posiciones de los ejes de coordenadas y rotule las caras con las ecuaciones de los cilindros correspondientes.

2. Determine el volumen del sólido del problema 1.

SAC 3. Use un sistema algebraico computacional para dibujar las aristas del sólido.

4. ¿Qué sucede con el sólido del problema 1 si el radio del primer cilindro es diferente a 1? Ilustre con un diagrama a mano o una gráfica por computadora.

5. Si el primer cilindro es $x^2 + y^2 = a^2$, donde $a < 1$, establezca pero no evalúe una integral doble para el volumen del sólido. ¿Y si $a > 1$?

15.8 Integrales triples en coordenadas esféricas

Otro sistema de coordenadas en tres dimensiones útil es el sistema de coordenadas esféricas. Este sistema simplifica la evaluación de integrales triples en regiones acotadas por esferas y conos.

Coordenadas esféricas

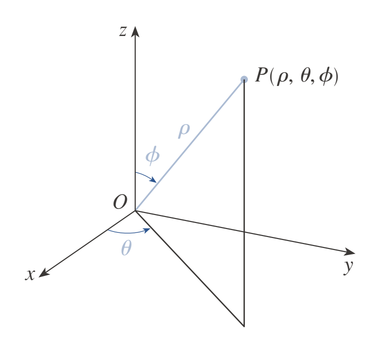


FIGURA 1
Coordenadas esféricas del punto P en el espacio

Las **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) de un punto P en el espacio se muestran en la figura 1, donde $\rho = |OP|$ es la distancia del origen a P, θ es el mismo ángulo que en las coordenadas cilíndricas y ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de recta OP. Note que

$$\rho \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil en problemas en los que hay simetría en torno a un punto y el origen se encuentra en ese punto. Por ejemplo, la esfera con centro en el origen y radio c tiene la ecuación simple $\rho = c$ (véase la figura 2); esta es la razón del nombre coordenadas "esféricas". La gráfica de la ecuación $\theta = c$ es un semiplano vertical (véase la figura 3) y la ecuación $\phi = c$ representa un semicono con el eje z como su eje (véase la figura 4).

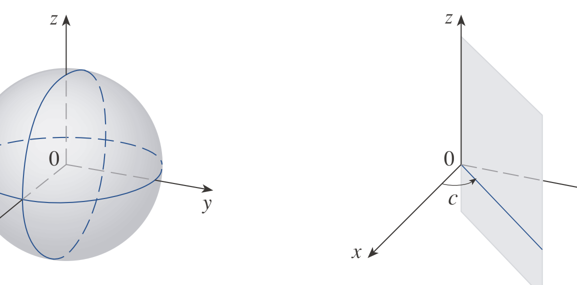


FIGURA 2 $\rho = c$, una esfera

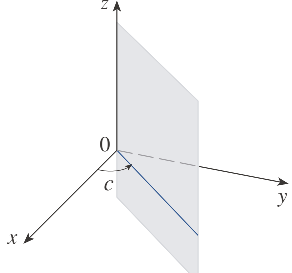


FIGURA 3 $\theta = c$, un semiplano

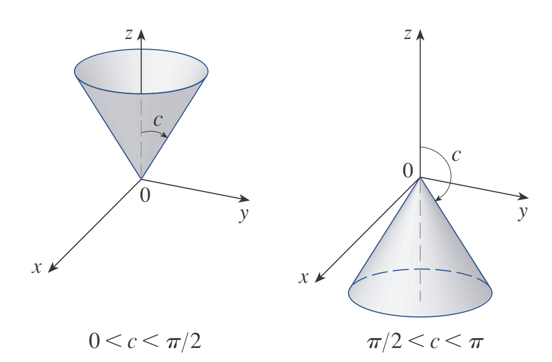


FIGURA 4 $\phi = c$, un semicono

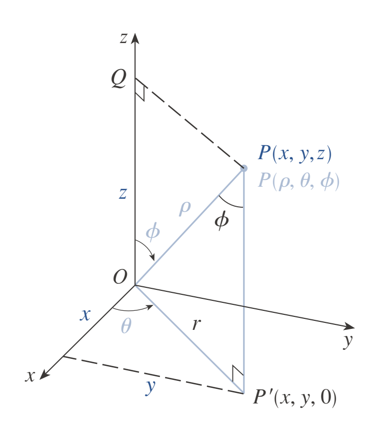


FIGURA 5

La relación entre las coordenadas rectangulares y esféricas puede verse en la figura 5. De los triángulos OPQ y OPP' se tiene

$$z = \rho \cos \phi \qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Pero, $x = r \cos \theta$, y $y = r \operatorname{sen} \theta$, así que para convertir de coordenadas esféricas a rectangulares se usan las ecuaciones

1
$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

Asimismo, la fórmula de la distancia indica que

2
$$\rho = x^2 + y^2 + z^2$$

Se usa esta ecuación para convertir de coordenadas rectangulares a esféricas.

EJEMPLO 1 El punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ se da en coordenadas esféricas. Trace el punto y determine sus coordenadas rectangulares.

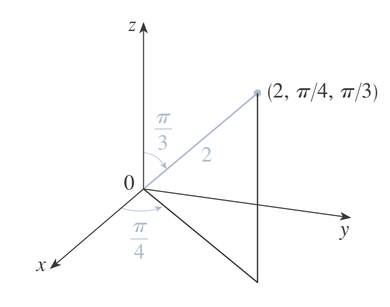


FIGURA 6

SOLUCIÓN Trace el punto en la figura 6. De las ecuaciones 1 se tiene

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Así, el punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ es $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares. ■

EJEMPLO 2 El punto $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ se da en coordenadas rectangulares. Halle las coordenadas esféricas de este punto.

ADVERTENCIA No existe acuerdo universal sobre la notación para coordenadas esféricas. En la mayoría de los libros de física se invierten los significados de θ y ϕ y se usa r en lugar de ρ.

SOLUCIÓN De la ecuación 2 se tiene

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

así que las ecuaciones 1 dan

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen} \phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

TEC En Module 15.8 usted puede investigar familias de superficies en coordenadas cilíndricas y esféricas.

(Note que $\theta \neq 3\pi/2$ porque $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Por tanto, las coordenadas esféricas del punto dado son $(4, \pi/2, 2\pi/3)$. ■

Evaluación de integrales triples con coordenadas esféricas

En el sistema de coordenadas esféricas la contraparte de una caja rectangular es una **cuña esférica**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

donde $a \geqslant 0$ y $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$ y $d - c \leqslant \pi$. Aunque se definen integrales triples dividiendo sólidos en pequeñas cajas, se puede demostrar que dividir un sólido en pequeñas cuñas esféricas siempre da el mismo resultado. Así, se divide E en cuñas esféricas menores E_{ijk} por medio de esferas igualmente espaciadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$, y semiconos $\phi = \phi_k$. La figura 7 muestra que E_{ijk} es aproximadamente una caja rectangular con dimensiones $\Delta\rho$, $\rho_i\,\Delta\phi$ (arco de un círculo con radio ρ_i, ángulo $\Delta\phi$) y ρ_i sen $\phi_k\,\Delta\theta$ (arco de un círculo con radio ρ_i sen ϕ_k, ángulo $\Delta\theta$). Así, una aproximación del volumen de E_{ijk} está dada por

FIGURA 7

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i\,\Delta\phi)(\rho_i \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\theta) = \rho_i^2 \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

De hecho, se puede demostrar, con la ayuda del teorema del valor medio (ejercicio 49), que el volumen de E_{ijk} está dado exactamente por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

donde $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ es algún punto en E_{ijk}. Sean $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ las coordenadas rectangulares de este punto. Entonces,

$$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\,\Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \cos\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \operatorname{sen}\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos\tilde{\phi}_k)\,\tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k\,\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

Pero esta suma es una suma de Riemann para la función

$$F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

En consecuencia, se ha llegado a la **fórmula para la integración triple con coordenadas esféricas** siguiente.

3 $$\iiint_E f(x, y, z)\,dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

donde E es una cuña esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

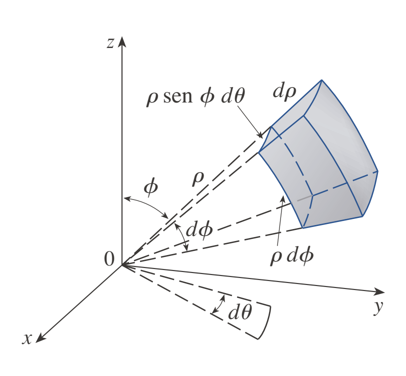


FIGURA 8
Elemento de volumen en coordenadas esféricas: $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

La fórmula 3 indica que se convierte una integral triple de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas escribiendo

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

usando los límites apropiados de integración y reemplazando dV por ρ^2 sen $\phi\ dp\ d\theta\ d\phi$. Esto se ilustra en la figura 8.

Esta fórmula puede prolongarse para incluir regiones esféricas más generales, como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d,\ g_1(\theta, \phi) \leqslant \rho \leqslant g_2(\theta, \phi)\}$$

En este caso, la fórmula es la misma que en (3), excepto que los límites de integración para ρ son $g_1(\theta, \phi)$ y $g_2(\theta, \phi)$.

Por lo común, las coordenadas esféricas se usan en integrales triples cuando superficies como conos y esferas forman la frontera de la región de integración.

EJEMPLO 3 Evalúe $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, donde B es la pelota unitaria:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

SOLUCIÓN Como la frontera de B es una esfera, se usan coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi\}$$

Además, las coordenadas esféricas son apropiadas porque

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Así, (3) da

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} e^{(\rho^2)^{3/2}}\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} \rho^2 e^{\rho^3} d\rho$$

$$= \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi}(2\pi)\Big[\tfrac{1}{3}e^{\rho^3}\Big]_0^{1} = \tfrac{4}{3}\pi(e-1)$$

■

NOTA Habría sido extremadamente insensato evaluar la integral del ejemplo 3 sin coordenadas esféricas. En coordenadas rectangulares la integral iterada habría sido

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dz\, dy\, dx$$

EJEMPLO 4 Use coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido que se encuentra sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Véase la figura 9.)

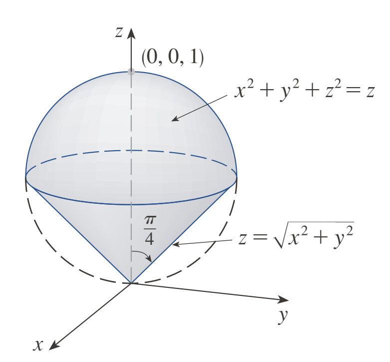


FIGURA 9

La figura 10 da otra vista (esta vez dibujada por Maple) del sólido del ejemplo 4.

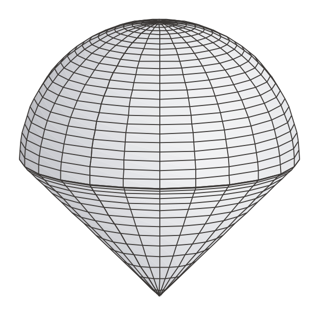


FIGURA 10

SOLUCIÓN Note que la esfera pasa por el origen y tiene centro $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Se escribe la ecuación de la esfera en coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \qquad \text{o} \qquad \rho = \rho \cos \phi$$

La ecuación del cono puede escribirse como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Esto da sen $\phi = \cos \phi$, o $\phi = \pi/4$. Por tanto, la descripción del sólido E en coordenadas esféricas es

$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi\right\}$$

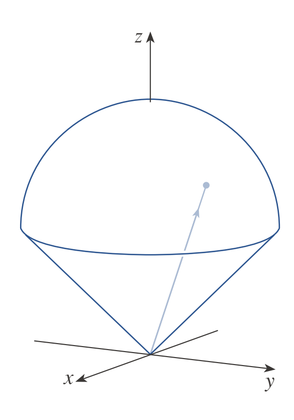
La figura 11 muestra cómo se recorre E si se integra primero con respecto a ρ, luego a ϕ y después a θ. El volumen de E es

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \ d\rho \, d\phi \, d\theta$$

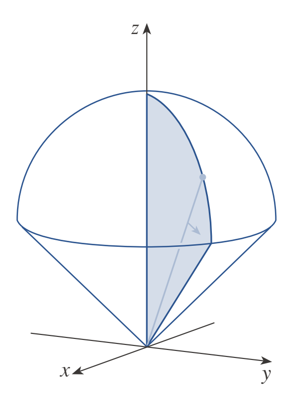
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

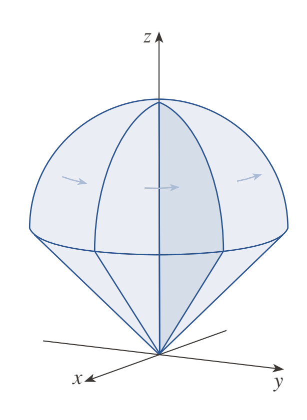
TEC Visual 15.8 muestra una animación de la figura 11.



ρ varía de 0 a cos ϕ, mientras ϕ y θ son constantes.



ϕ varía de 0 a $\pi/4$, mientras θ es constante.



θ varía de 0 a 2π.

FIGURA 11

■

15.8 EJERCICIOS

1-2 Trace el punto cuyas coordenadas esféricas se dan. Determine después las coordenadas rectangulares del punto.

1. (a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(3, \pi/2, 3\pi/4)$

2. (a) $(2, \pi/2, \pi/2)$ (b) $(4, -\pi/4, \pi/3)$

3-4 Cambie de coordenadas rectangulares a esféricas.

3. (a) $(1, 0, -1)$ (b) $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$

4. (a) $\left(1, 0, \sqrt{3}\right)$ (b) $\left(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3}\right)$

5-6 Describa con palabras la superficie cuya ecuación se da.

5. $\phi = \pi/3$

6. $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$

7-8 Identifique la superficie cuya ecuación se da.

7. $\rho \cos \phi = 1$

8. $\rho = \cos \phi$

9-10 Escriba la ecuación en coordenadas esféricas.

9. (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (b) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

10. (a) $z = x^2 + y^2$ (b) $z = x^2 - y^2$

11-14 Trace el sólido descrito por las desigualdades dadas.

11. $\rho \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/6, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $1 \leqslant \rho \leqslant 2, \quad \pi/2 \leqslant \phi \leqslant \pi$

13. $2 \leqslant \rho \leqslant 4, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/3, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

14. $1 \leqslant \rho \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$

---

15. Un sólido se encuentra sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escriba una descripción del sólido en términos de desigualdades que impliquen coordenadas esféricas.

16. (a) Determine desigualdades que describan una pelota hueca con diámetro de 30 cm y grosor de 0.5 cm. Explique cómo posicionó el sistema de coordenadas que eligió.
(b) Suponga que la pelota está cortada por la mitad. Escriba desigualdades que describan una de las mitades.

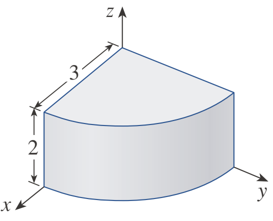
17-18 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúe la integral.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi$

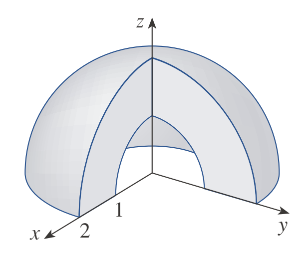
18. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

19-20 Establezca la integral triple de una función continua arbitraria $f(x, y, z)$ en coordenadas cilíndricas y esféricas en el sólido que se muestra.









21-34 Use coordenadas esféricas.

21. Evalúe $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$, donde B es la pelota con centro en el origen y radio 5.

22. Evalúe $\iiint_E y^2 z^2 \, dV$, donde E está sobre el cono $\phi = \pi/3$ y bajo la esfera $\rho = 1$.

23. Evalúe $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dV$, donde E está entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

24. Evalúe $\iiint_H (9 - x^2 - y^2) \, dV$, donde H es el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

25. Evalúe $\iiint_E x e^{x^2+y^2+z^2} \, dV$, donde E es la porción de la pelota unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ que está en el primer octante.

26. Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV$, donde E está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

27. Determine el volumen de la parte de la pelota $\rho \leqslant a$ que está entre los conos $\phi = \pi/6$ y $\phi = \pi/3$.

28. Determine la distancia promedio de un punto en la pelota de radio a a su centro.

29. (a) Determine el volumen del sólido que está sobre el cono $\phi = \pi/3$ y bajo la esfera $\rho = 4 \cos \phi$.
(b) Determine el centroide del sólido del inciso (a).

30. Determine el volumen del sólido que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, sobre el plano xy y bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

31. (a) Halle el centroide del sólido del ejemplo 4. (Suponga densidad constante K.)
(b) Halle el momento de inercia alrededor del eje z para este sólido.

32. Sea H un hemisferio sólido de radio a cuya densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia del centro de la base.
(a) Halle la masa de H.
(b) Halle el centro de masa de H.
(c) Halle el momento de inercia de H alrededor de su eje.

33. (a) Halle el centroide de un hemisferio sólido homogéneo de radio a.
(b) Halle el momento de inercia del sólido del inciso (a) respecto a un diámetro de su base.

34. Halle la masa y el centro de masa de un hemisferio sólido de radio a si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia de la base.

35-40 Use coordenadas cilíndricas o esféricas, lo que parezca más apropiado.

35. Determine el volumen y centroide del sólido E que está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

36. Determine el volumen de la pequeña cuña cortada de la esfera de radio a por dos planos que intersecan a lo largo de un diámetro en un ángulo de $\pi/6$.

37. Un cilindro sólido con densidad constante tiene radio de base a y altura h.
(a) Determine el momento de inercia del cilindro alrededor de su eje.
(b) Determine el momento de inercia del cilindro respecto a un diámetro de su base.

38. Un cono circular recto sólido con densidad constante tiene radio de base a y altura h.
(a) Determine el momento de inercia del cono alrededor de su eje.
(b) Determine el momento de inercia del cono respecto a un diámetro de su base.

SAC **39.** Evalúe $\iiint_E z\,dV$, donde E está sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y bajo el plano $z = 2y$. Use la tabla de integrales (en las páginas de referencia 6-10) o un sistema algebraico computacional para evaluar la integral.

SAC **40.** (a) Determine el volumen encerrado por el toro $\rho = \text{sen}\,\phi$.
(b) Use una computadora para dibujar el toro.

41-43 Evalúe la integral cambiando a coordenadas esféricas.

41. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$

42. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z + y^2z + z^3)\,dz\,dx\,dy$

43. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$

44. Un modelo para la densidad δ de la atmósfera de la Tierra cerca de su superficie es

$$\delta = 619.09 - 0.000097\rho$$

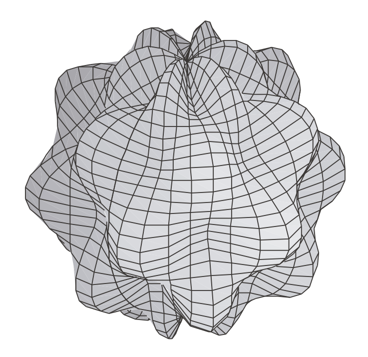
donde ρ (la distancia desde el centro de la Tierra) se mide en metros y δ en kilogramos por metro cúbico. Si se toma la superficie de la Tierra como una esfera con radio 6370 km, este modelo es razonable para $6.370 \times 10^6 \leqslant \rho \leqslant 6.375 \times 10^6$. Use este modelo para estimar la masa de la atmósfera entre el suelo y una altitud de 5 km.

45. Use un dispositivo de graficación para dibujar un silo que conste de un cilindro con radio 3 y altura 10 rematado por una media esfera.

46. La latitud y longitud de un punto P en el hemisferio norte se relacionan con las coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como sigue. Se toma el centro de la Tierra como el origen y el eje z positivo pasa por el Polo Norte. El eje x positivo pasa por el punto donde el primer meridiano (el meridiano que pasa por Greenwich, Inglaterra) interseca el ecuador. Entonces, la latitud de P es $\alpha = 90° - \phi°$ y la longitud es $\beta = 360° - \theta°$. Determine la distancia de gran círculo de Los Angeles (lat. 34.06 °N, long. 118.25 °O) a Montreal (lat. 45.50 °N, long. 73.60 °O). Tome el radio de la Tierra como 6370 km.

(Un *gran círculo* es el círculo de intersección de una esfera y un plano que pasa por el centro de la esfera.)

SAC **47.** Las superficies $\rho = 1 + \frac{1}{5}\,\text{sen}\,m\theta\,\text{sen}\,n\phi$ se han usado como modelos para tumores. Se muestra la "esfera con protuberancias" con $m = 6$ y $n = 5$. Use un sistema algebraico computacional para determinar el volumen que encierra.



48. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\; e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

(La integral triple impropia se define como el límite de una integral triple en una esfera sólida conforme el radio de la esfera aumenta indefinidamente.)

49. (a) Use coordenadas cilíndricas para demostrar que el volumen de un sólido acotado arriba por la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y abajo del cono $z = r\cot\phi_0$ (o $\phi = \phi_0$), donde $0 < \phi_0 < \pi/2$, es

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$$

(b) Deduzca que el volumen de la cuña esférica dado por $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ es

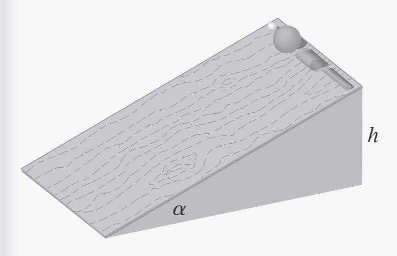
$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Use el teorema del valor medio para demostrar que el volumen del inciso (b) puede escribirse como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2\,\text{sen}\,\tilde{\phi}\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

donde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 y ρ_2, $\tilde{\phi}$ entre ϕ_1 y ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, y $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

PROYECTO DE APLICACION CARRERA SOBRE RUEDAS



Suponga que una pelota sólida (una canica), una pelota hueca (una pelota de squash), un cilindro sólido (una barra de acero) y un cilindro hueco (un tubo de plomo) ruedan por una pendiente. ¿Cuál de estos objetos llegará primero al suelo? (Haga una conjetura antes de proceder.)

Para responder esta pregunta, se considera una pelota o cilindro con masa m, radio r y momento de inercia I (alrededor del eje de rotación). Si la caída vertical es h, la energía potencial en la punta es mgh. Suponga que el objeto llega al suelo con velocidad v y velocidad angular ω, así que $v = \omega r$. La energía cinética en la base consta de dos partes: $\frac{1}{2}mv^2$ de traslación (bajar la pendiente) y $\frac{1}{2}I\omega^2$ de rotación. Si se supone que la pérdida de energía por la fricción de rodamiento es insignificante, la conservación de energía da

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

1. Demuestre que

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + I^*} \qquad \text{donde } I^* = \frac{I}{mr^2}$$

2. Si $y(t)$ es la distancia vertical recorrida en el momento t, el mismo razonamiento que se usó en el problema 1 indica que $v^2 = 2gy/(1 + I^*)$ en cualquier momento t. Use este resultado para demostrar que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1 + I^*}}\,(\operatorname{sen}\alpha)\sqrt{y}$$

donde α es el ángulo de inclinación del plano.

3. Resolviendo la ecuación diferencial del problema 2, demuestre que el tiempo de recorrido total es

$$T = \sqrt{\frac{2h(1 + I^*)}{g\,\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

Esto demuestra que el objeto con menor valor de I^* gana la carrera.

4. Demuestre que $I^* = \frac{1}{2}$ para un cilindro sólido y $I^* = 1$ para un cilindro hueco.

5. Calcule I^* para una pelota parcialmente hueca con radio interno a y radio externo r. Exprese su respuesta en términos de $b = a/r$. ¿Qué sucede cuando $a \to 0$ y cuando $a \to r$?

6. Demuestre que $I^* = \frac{2}{5}$ para una pelota sólida y $I^* = \frac{2}{3}$ para una pelota hueca. Así, los objetos terminan en el orden siguiente: pelota sólida, cilindro sólido, pelota hueca, cilindro hueco.

15.9 Cambio de variables en integrales múltiples

En cálculo unidimensional a menudo se usa un cambio de variable (una sustitución) para simplificar una integral. Invirtiendo los papeles de x y u, se puede escribir la regla de sustitución (5.5.6) como

1 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\,g'(u)\,du$$

donde $x = g(u)$ y $a = g(c)$, $b = g(d)$. Otra manera de escribir la fórmula 1 es como sigue:

2 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du$$

Un cambio de variables también puede ser útil en integrales dobles. Ya se vio un ejemplo de esto: la conversión a coordenadas polares. Las nuevas variables r y θ se relacionan con las antiguas variables x y y mediante las ecuaciones

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

y la fórmula para el cambio de variables (15.3.2) puede escribirse como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

donde S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a la región R en el plano xy.

En términos más generales, se considera un cambio de variables dado por una **transformación** T del plano uv al plano xy:

$$T(u, v) = (x, y)$$

donde x y y se relacionan con u y v por medio de las ecuaciones

3 $$x = g(u, v) \qquad y = h(u, v)$$

o, como a veces se escribe,

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

Usualmente se supone que T es una **transformación C^1**, lo que significa que g y h tienen derivadas parciales continuas de primer orden.

Una transformación T es en realidad sencillamente una función cuyo dominio y rango son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Si $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, el punto (x_1, y_1) se llama **imagen** del punto (u_1, v_1). Si no hay dos puntos con la misma imagen, T se llama **inyectiva**. La figura 1 muestra el efecto de una transformación T sobre una región S en el plano uv. T transforma S en una región R en el plano xy llamado la **imagen de S**, la cual consta de las imágenes de todos los puntos en S.

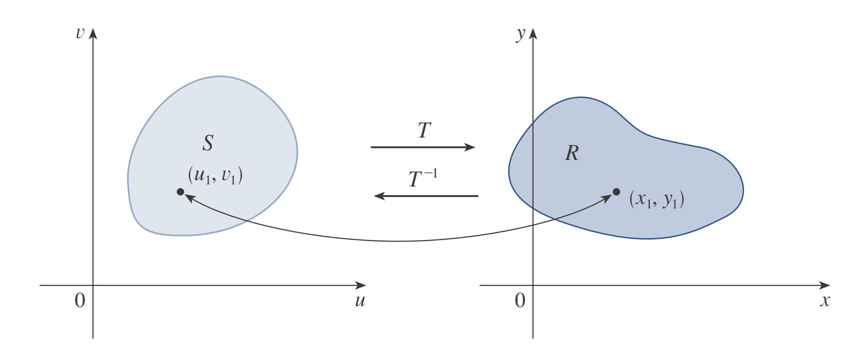


FIGURA 1

Si T es una transformación inyectiva, tiene una **transformación inversa** T^{-1} del plano xy al plano uv y quizá sea posible resolver las ecuaciones 3 para u y v en términos de x y y:

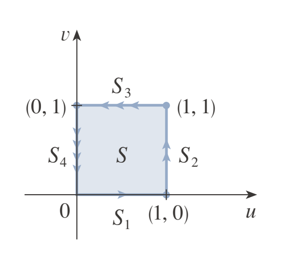
$$u = G(x, y) \qquad v = H(x, y)$$

EJEMPLO 1 Una transformación es definida por las ecuaciones

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

Determine la imagen del cuadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$.

SOLUCIÓN La transformación traza la frontera de S en la frontera de la imagen. Así, se comienza determinando las imágenes de los lados de S. El primer lado, S_1, está dado



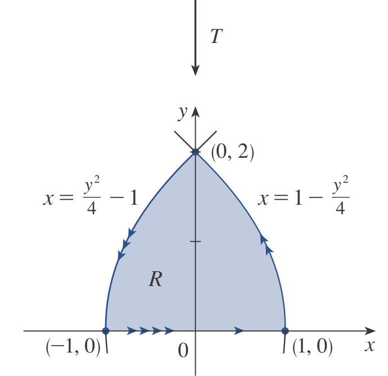


FIGURA 2

por $v = 0$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$. (Véase la figura 2.) De las ecuaciones dadas se tiene $x = u^2$, $y = 0$, así que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Por tanto, S_1 se convierte en el segmento de recta de (0, 0) a (1, 0) en el plano xy. El segundo lado, S_2, es $u = 1$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$ y al poner $u = 1$ en las ecuaciones dadas se obtiene

$$x = 1 - v^2 \qquad y = 2v$$

Eliminando v se obtiene

$$\boxed{4} \qquad x = 1 - \frac{y^2}{4} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

la cual es parte de una parábola. De igual forma, S_3 está dado por $v = 1$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, cuya imagen es el arco parabólico

$$\boxed{5} \qquad x = \frac{y^2}{4} - 1 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0$$

Por último, S_4 está dado por $u = 0$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$, cuya imagen es $x = -v^2$, $y = 0$, es decir $-1 \leqslant x \leqslant 0$. (Note que al desplazarse por el cuadrado en sentido contrario a las manecillas del reloj, se desplaza por la región parabólica en la misma dirección.) La imagen de S es la región R (la cual se muestra en la figura 2) acotada por el eje x y las parábolas dadas por las ecuaciones 4 y 5. ■

Se verá ahora cómo un cambio de variables afecta a la integral doble. Se comienza con un pequeño rectángulo S en el plano uv cuya esquina inferior derecha es el punto (u_0, v_0) y cuyas dimensiones son Δu y Δv. (Véase la figura 3.)

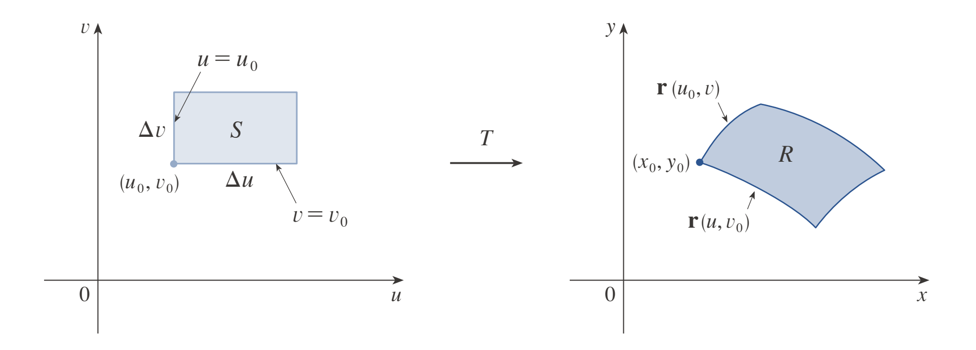


FIGURA 3

La imagen de S es una región R en el plano xy, uno de cuyos puntos frontera es $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. El vector

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\,\mathbf{i} + h(u, v)\,\mathbf{j}$$

es el vector de posición de la imagen del punto (u, v). La ecuación del lado menor de S es $v = v_0$, cuya curva imagen está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. El vector tangente en (x_0, y_0) a esta curva imagen es

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j}$$

De igual forma, el vector tangente en (x_0, y_0) a la curva imagen del lado izquierdo de S (es decir, $u = u_0$) es

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j}$$

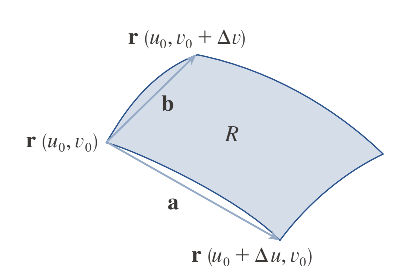


FIGURA 4

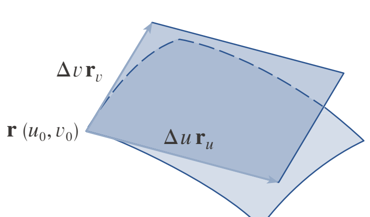


FIGURA 5

Se puede aproximar la región imagen $R = T(S)$ con un paralelogramo determinado por los vectores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \qquad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

que aparecen en la figura 4. Pero

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

y entonces $$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u\,\mathbf{r}_u$$

De igual manera, $$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v\,\mathbf{r}_v$$

Esto significa que se puede aproximar R con un paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u\,\mathbf{r}_u$ y $\Delta v\,\mathbf{r}_v$. (Véase la figura 5.) Así, se puede aproximar el área de R mediante el área de ese paralelogramo, la que, con base en la sección 12.4, es

6 $$|(\Delta u\,\mathbf{r}_u) \times (\Delta v\,\mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v$$

Al calcular el producto cruzado se obtiene

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

El determinante que surge de este cálculo se llama *jacobiano* de la transformación y recibe una notación especial.

El jacobiano debe su nombre al matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Aunque el matemático francés Cauchy fue el primero en emplear estos determinantes especiales que implican derivadas parciales, Jacobi las convirtió en un método para evaluar integrales múltiples.

7 Definición El **jacobiano** de la transformación T dada por $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Con esta notación puede usarse la ecuación 6 para dar una aproximación del área ΔA de R:

8 $$\Delta A \approx \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u\,\Delta v$$

donde el jacobiano se evalúa en (u_0, v_0).



Luego se divide una región S en el plano uv en rectángulos S_{ij} y se llama R_{ij} a sus imágenes en el plano xy. (Véase la figura 6.)

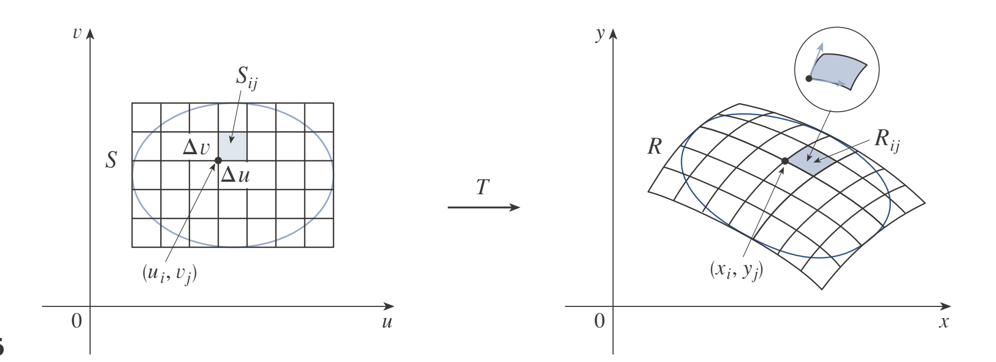


FIGURA 6

Al aplicar la aproximación (8) a cada R_{ij}, se aproxima la integral doble de f en R como sigue:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v$$

donde el jacobiano se evalúa en (u_i, v_j). Nótese que esta doble suma es una suma de Riemann para la integral

$$\iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

El argumento previo sugiere que el teorema siguiente es cierto. (Una comprobación completa se da en libros de cálculo avanzado.)

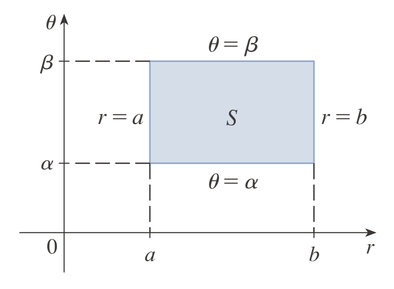
9 Cambio de variables en una integral doble Suponga que T es una transformación C^1 cuyo jacobiano es diferente de cero y que T convierte una región S en el plano uv en una región R en el plano xy. Suponga que f es continua en R y que R y S son regiones planas tipo I o tipo II. Suponga también que T es inyectiva, excepto quizá en la frontera de S. Así,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

El teorema 9 indica que se cambia de una integral en x y y a una integral en u y v, expresando x y y en términos de u y v, y escribiendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Observe la semejanza entre el teorema 9 y la fórmula unidimensional de la ecuación 2. En vez de la derivada dx/du, se tiene el valor absoluto del jacobiano, es decir $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$.



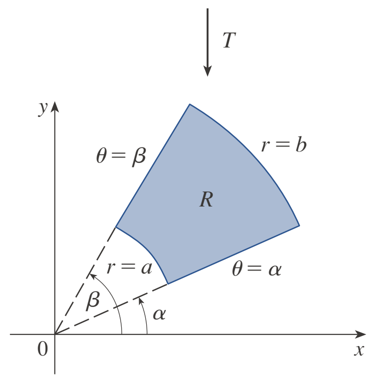


FIGURA 7
La transformación en coordenadas polares

Como una primera ilustración del teorema 9, se demuestra que la fórmula para la integración en coordenadas polares es sencillamente un caso especial. Aquí la transformación T del plano $r\theta$ al plano xy está dada por

$$x = g(r, \theta) = r\cos\theta \qquad y = h(r, \theta) = r\,\text{sen}\,\theta$$

y la geometría de la transformación aparece en la figura 7. T convierte un rectángulo ordinario en el plano $r\theta$ en un rectángulo polar en el plano xy. El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta = r > 0$$

Así, el teorema 9 da

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

lo cual es igual a la fórmula 15.3.2.

EJEMPLO 2 Use el cambio de variables $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para evaluar la integral $\iint_R y\,dA$, donde R es la región acotada por el eje x y las parábolas $y^2 = 4 - 4x$ y $y^2 = 4 + 4x$, $y \geqslant 0$.

SOLUCIÓN La región R se representa en la figura 2 (en la página 1054). En el ejemplo 1 se descubrió que $T(S) = R$, donde S es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. En realidad, la razón de hacer el cambio de variables para evaluar la integral es que S es una región mucho más simple que R. Primero se tiene que calcular el jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Así, por el teorema 9,

$$\iint_R y\,dA = \iint_S 2uv\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dA = \int_0^1\int_0^1 (2uv)4(u^2 + v^2)\,du\,dv$$

$$= 8\int_0^1\int_0^1 (u^3v + uv^3)\,du\,dv = 8\int_0^1 \left[\tfrac{1}{4}u^4v + \tfrac{1}{2}u^2v^3\right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$= \int_0^1 (2v + 4v^3)\,dv = \left[v^2 + v^4\right]_0^1 = 2$$

■

NOTA El ejemplo 2 no fue un problema muy difícil de resolver porque se dio un adecuado cambio de variables. De no haberse proporcionado la transformación, el primer paso sería pensar en un apropiado cambio de variables. Si $f(x, y)$ es difícil de integrar, la forma de $f(x, y)$ puede sugerir una transformación. Si la región de integración R es

incómoda, debe optarse por la transformación, para que la correspondiente región S en el plano uv tenga una descripción conveniente.

EJEMPLO 3 Evalúe la integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA$, donde R es la región trapezoidal con vértices (1, 0), (2, 0), (0, –2) y (0, –1).

SOLUCIÓN Como no es fácil integrar $e^{(x+y)/(x-y)}$, se hace un cambio de variables sugerido por la forma de esta función:

$$u = x + y \qquad v = x - y \tag{10}$$

Estas ecuaciones definen una transformación T^{-1} del plano xy al plano uv. El teorema 9 se refiere a una transformación del plano uv al plano xy. Eso se obtiene despejando x y y en las ecuaciones 10:

$$x = \tfrac{1}{2}(u + v) \qquad y = \tfrac{1}{2}(u - v) \tag{11}$$

El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}$$

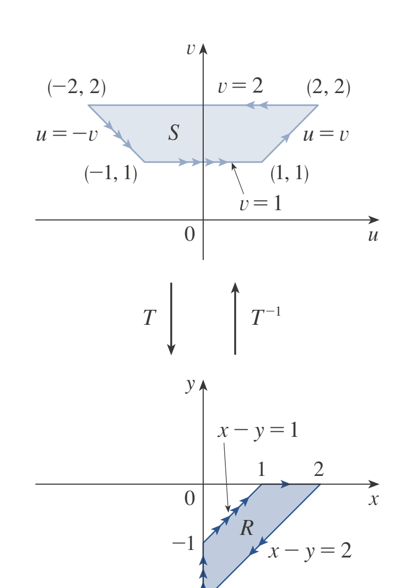


FIGURA 8

Para hallar la región S en el plano uv correspondiente a R, se advierte que los lados de R se tienden en las rectas

$$y = 0 \qquad x - y = 2 \qquad x = 0 \qquad x - y = 1$$

y, de las ecuaciones 10 u 11, las líneas que son su imagen en el plano uv son

$$u = v \qquad v = 2 \qquad u = -v \qquad v = 1$$

Así, la región S es la región trapezoidal con vértices (1, 1), (2, 2), (–2, 2) y (–1, 1) que aparece en la figura 8. Como

$$S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant v \leqslant 2,\ -v \leqslant u \leqslant v\}$$

el teorema 9 da

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA = \iint_S e^{u/v}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

$$= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v}\left(\tfrac{1}{2}\right) du\,dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \Big[ve^{u/v}\Big]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 (e - e^{-1})v\,dv = \tfrac{3}{4}(e - e^{-1}) \quad \blacksquare$$

Integrales triples

Hay una fórmula similar de cambio de variables para las integrales triples. Sea T la transformación que convierte una región S en el espacio uvw en una región R en el espacio xyz por medio de las ecuaciones

$$x = g(u, v, w) \qquad y = h(u, v, w) \qquad z = k(u, v, w)$$

El **jacobiano** de T es el determinante 3×3 siguiente:

12
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Con hipótesis similares a las del teorema 9, se tiene la fórmula siguiente para integrales triples:

13
$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

EJEMPLO 4 Use la fórmula 13 para derivar la fórmula para la integración triple en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN Aquí el cambio de variables está dado por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

Se calcula el jacobiano como sigue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix} - \rho \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \,(-\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2\theta - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2\theta)$$

$$- \rho \operatorname{sen} \phi \,(\rho \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos^2\phi - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}^2\phi = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

Como $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, se tiene $\operatorname{sen} \phi \geqslant 0$. Por tanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = \left| -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

y la fórmula 13 da

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_S f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

lo cual es equivalente a la fórmula 15.8.3. ■

15.9 EJERCICIOS

1-6 Halle el jacobiano de la transformación.

1. $x = 2u + v, \quad y = 4u - v$

2. $x = u^2 + uv, \quad y = uv^2$

3. $x = s\cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t$

4. $x = pe^q, \quad y = qe^p$

5. $x = uv, \quad y = vw, \quad z = wu$

6. $x = u + vw, \quad y = v + wu, \quad z = w + uv$

7-10 Determine la imagen del conjunto S bajo la transformación dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$; $x = 2u + 3v,\ y = u - v$

8. S es el cuadrado acotado por las rectas $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$; $x = v$, $y = u(1 + v^2)$

9. S es la región triangular con vértices (0, 0), (1, 1), (0, 1); $x = u^2$, $y = v$

10. S es el disco dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$; $x = au$, $y = bv$

11-14 Se da una región R en el plano xy. Determine ecuaciones para una transformación T que convierta una región rectangular S en el plano uv en R, donde los lados de S son paralelos a los ejes u y v.

11. R está acotada por $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$, $y = 1 - x$, $y = 3 - x$

12. R es el paralelogramo con vértices (0, 0), (4, 3), (2, 4), (–2, 1)

13. R está entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$ en el primer cuadrante

14. R está acotada por las hipérbolas $y = 1/x$, $y = 4/x$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$ en el primer cuadrante

15-20 Use la transformación dada para evaluar la integral.

15. $\iint_R (x - 3y)\, dA$, donde R es la región triangular con vértices (0, 0), (2, 1) y (1, 2); $x = 2u + v$, $y = u + 2v$

16. $\iint_R (4x + 8y)\, dA$, donde R es el paralelogramo con vértices $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ y $(1, 5)$; $x = \frac{1}{4}(u + v)$, $y = \frac{1}{4}(v + 3u)$

17. $\iint_R x^2\, dA$, donde R es la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u$, $y = 3v$

18. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$, donde R es la región acotada por la elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}\, u - \sqrt{2/3}\, v, \quad y = \sqrt{2}\, u + \sqrt{2/3}\, v$

19. $\iint_R xy\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $y = x$ y $y = 3x$, y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$, $x = u/v$, $y = v$

20. $\iint_R y^2\, dA$, donde R es la región acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$; $u = xy$, $v = xy^2$. Ilustre usando una calculadora graficadora o computadora para dibujar R.

21. (a) Evalúe $\iiint_E dV$, donde E es el sólido encerrado por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Use la transformación $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.

(b) La Tierra no es una esfera perfecta; la rotación ha resultado en el aplanamiento de los polos. Así, su forma puede aproximarse por medio de un elipsoide con $a = b = 6378$ km y $c = 6356$ km. Use el inciso (a) para estimar el volumen de la Tierra.

(c) Si el sólido del inciso (a) tiene densidad constante k, determine su momento de inercia alrededor del eje z.

22. Un problema importante en termodinámica es encontrar el trabajo realizado por un motor de Carnot ideal. Un ciclo consta de una expansión y compresión alternantes de gas en un pistón. El trabajo realizado por el motor es igual al área de la región R encerrada por dos curvas isotérmicas $xy = a$, $xy = b$ y dos curvas adiabáticas $xy^{1.4} = c$, $xy^{1.4} = d$, donde $0 < a < b$ y $0 < c < d$. Calcule el trabajo realizado determinando el área de R.

23-27 Evalúe la integral haciendo un apropiado cambio de variables.

23. $\displaystyle\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y}\, dA$, donde R es el paralelogramo encerrado por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$, y $3x - y = 8$

24. $\iint_R (x + y)e^{x^2 - y^2}\, dA$, donde R es el rectángulo encerrado por las rectas $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$, y $x + y = 3$

25. $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right)$, donde R es la región trapezoidal con vértices (1, 0), (2, 0), (0, 2) y (0, 1)

26. $\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

27. $\iint_R e^{x+y}\, dA$, donde R está dada por la desigualdad $|x| + |y| \leqslant 1$

28. Sea f continua en [0, 1] y R la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1). Demuestre que

$$\iint_R f(x + y)\, dA = \int_0^1 u f(u)\, du$$

15 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. Suponga que f es una función continua definida en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
(a) Escriba una expresión para una doble suma de Riemann de f. Si $f(x, y) \geqslant 0$, ¿qué representa la suma?
(b) Escriba la definición de $\iint_R f(x, y)\, dA$ como un límite.
(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\iint_R f(x, y)\, dA$ si $f(x, y) \geqslant 0$? ¿Y si f adoptara valores tanto positivos como negativos?
(d) ¿Cómo se evalúa $\iint_R f(x, y)\, dA$?
(e) ¿Qué dice la regla del punto medio para las integrales dobles?
(f) Escriba una expresión para el valor promedio de f.

2. (a) ¿Cómo se define $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región acotada que no es un rectángulo?
(b) ¿Qué es una región tipo I? ¿Cómo se evalúa $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región tipo I?
(c) ¿Qué es una región tipo II? ¿Cómo se evalúa $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región tipo II?
(d) ¿Qué propiedades tienen las integrales dobles?

3. ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble? ¿Por qué querría usted hacer ese cambio?

4. Si una lámina ocupa una región plana D y tiene una función de densidad $\rho(x, y)$, escriba expresiones para cada uno de los términos de integrales dobles siguientes.
(a) La masa
(b) Los momentos alrededor de los ejes
(c) El centro de masa
(d) Los momentos de inercia alrededor de los ejes y el origen

5. Sea f una función de densidad conjunta de un par de variables aleatorias continuas X y Y.
(a) Escriba una integral doble para la probabilidad de que X se ubique entre a y b y entre c y d.
(b) ¿Qué propiedades posee f?
(c) ¿Cuáles son los valores esperados de X y Y?

6. Escriba una expresión para el área de una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

7. (a) Escriba la definición de la integral triple de f en una caja rectangular B.
(b) ¿Cómo se evalúa $\iiint_B f(x, y, z)\, dV$?
(c) ¿Cómo se define $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región sólida acotada que no es una caja?
(d) ¿Qué es una región sólida tipo 1? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?
(e) ¿Qué es una región sólida tipo 2? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?
(f) ¿Qué es una región sólida tipo 3? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?

8. Suponga que un objeto sólido ocupa la región E y tiene función de densidad $\rho(x, y, z)$. Escriba expresiones para cada uno de los elementos siguientes.
(a) La masa
(b) Los momentos alrededor de los planos de coordenadas
(c) Las coordenadas del centro de masa
(d) Los momentos de inercia alrededor de los ejes

9. (a) ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas en una integral triple?
(b) ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas en una integral triple?
(c) ¿En qué situaciones usted cambiaría a coordenadas cilíndricas o esféricas?

10. (a) Si una transformación T está dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, ¿cuál es el jacobiano de T?
(b) ¿Cómo se cambian variables en una integral doble?
(c) ¿Cómo se cambian variables en una integral triple?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{0}^{6} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dx\, dy = \int_{0}^{6}\int_{-1}^{2} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dy\, dx$

2. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} \sqrt{x + y^2}\, dy\, dx = \int_{0}^{x}\int_{0}^{1} \sqrt{x + y^2}\, dx\, dy$

3. $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{3}^{4} x^2 e^y\, dy\, dx = \int_{1}^{2} x^2\, dx \int_{3}^{4} e^y\, dy$

4. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} e^{x^2+y^2} \operatorname{sen} y\, dx\, dy = 0$

5. Si f es continua en $[0, 1]$, entonces

$$\int_0^1\int_0^1 f(x) f(y)\, dy\, dx = \left[\int_0^1 f(x)\, dx\right]^2$$

6. $\displaystyle\int_{1}^{4}\int_{0}^{1} \left(x^2 + \sqrt{y}\right) \operatorname{sen}(x^2 y^2)\, dx\, dy \leqslant 9$

7. Si D es el disco dado por $x^2 + y^2 \leqslant 4$, entonces

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA = \tfrac{16}{3}\pi$$

8. La integral $\iiint_E kr^3\, dz\, dr\, d\theta$ representa el momento de inercia alrededor del eje z de un sólido E con densidad constante k.

9. La integral

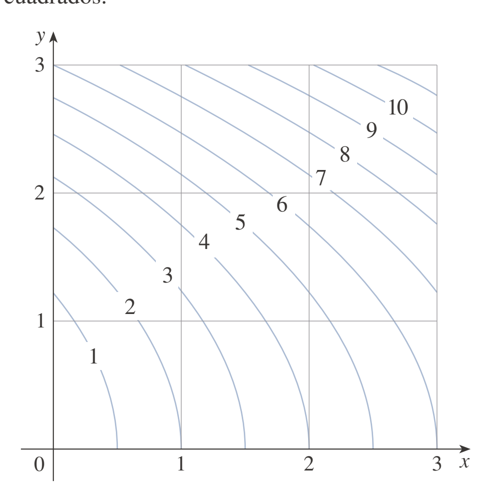
$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 dz\, dr\, d\theta$$

representa el volumen encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 2$.



EJERCICIOS

1. Se muestra un mapa de contorno para una función f en el cuadrado $R = [0, 3] \times [0, 3]$. Use una suma de Riemann con nueve términos para estimar el valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$. Tome como puntos muestra las esquinas superiores derechas de los cuadrados.



2. Use la regla del punto medio para estimar la integral del ejercicio 1.

3-8 Calcule la integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + xy + y^2)\, dx\, dy$

4. $\int_1^2 \int_0^1 (4x + 2ye^x)\, dx\, dy$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^x 2 \cos x \cos y\, dy\, dx$

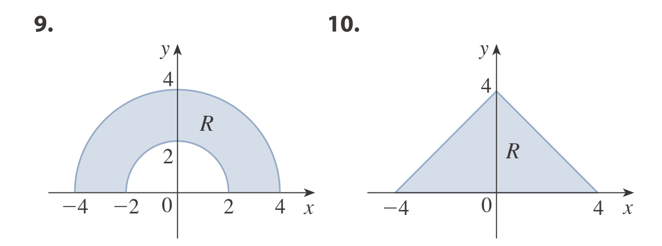
6. $\int_0^1 \int_x^{e^x} 3xy^2\, dy\, dx$

7. $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \operatorname{sen} x\, dz\, dy\, dx$

8. $\int_0^1 \int_0^y \int_x^1 6xyz\, dz\, dx\, dy$

9-10 Escriba $\iint_R f(x, y)\, dA$ como una integral iterada, donde R es la región que se muestra y f una función continua arbitraria en R.

9. **10.**



11. Las coordenadas cilíndricas de un punto son $(2\sqrt{3}, \pi/3, 2)$. Determine las coordenadas rectangulares y esféricas del punto.

12. Las coordenadas rectangulares de un punto son $(2, 2, -1)$. Determine las coordenadas cilíndricas y esféricas del punto.

13. Las coordenadas esféricas de un punto son $(8, \pi/4, \pi/6)$. Determine las coordenadas rectangulares y cilíndricas del punto.

14. Identifique las superficies cuyas ecuaciones se dan.
(a) $\theta = \pi/4$ (b) $\phi = \pi/4$

15. Escriba la ecuación en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.
(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (b) $x^2 + y^2 = 4$

16. Trace el sólido que consta de todos los puntos con coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) tales que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/6$, y $0 \leqslant \rho \leqslant 2 \cos \phi$.

17. Describa la región cuya área está dada por la integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

18. Describa el sólido cuyo volumen está dado por la integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

y evalúe la integral.

19-20 Calcule la integral iterada invirtiendo primero el orden de integración.

19. $\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)\, dy\, dx$

20. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \dfrac{ye^{x^2}}{x^3}\, dx\, dy$

21-34 Calcule el valor de la integral múltiple.

21. $\iint_R ye^{xy}\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

22. $\iint_D xy\, dA$, donde $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y^2 \leqslant x \leqslant y + 2\}$

23. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{1 + x^2}\, dA$, donde D está acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$

24. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1 + x^2}\, dA$, donde D es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$

25. $\iint_D y\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotada por las parábolas $x = y^2$ y $x = 8 - y^2$

26. $\iint_D y\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante que está sobre la hipérbola $xy = 1$ y la recta $y = x$ y bajo la recta $y = 2$

27. $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $y = 0$ y $y = \sqrt{3}\,x$ y el círculo $x^2 + y^2 = 9$

28. $\iint_D x\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante que está entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$

29. $\iiint_E xy\, dV$, donde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant z \leqslant x + y\}$

30. $\iiint_T xy\, dV$, donde T es el tetraedro sólido con vértices $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

31. $\iiint_E y^2 z^2\, dV$, donde E está acotada por el paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ y el plano $x = 0$

32. $\iiint_E z\, dV$, donde E está acotada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ en el primer octante

33. $\iiint_E yz\,dV$, donde E está sobre el plano $z = 0$, bajo el plano $z = y$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

34. $\iiint_H z^3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV$, donde H es el hemisferio sólido que está sobre el plano xy y tiene centro en el origen y radio 1

35-40 Determine el volumen del sólido dado.

35. Bajo el paraboloide $z = x^2 + 4y^2$ y sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$

36. Bajo la superficie $z = x^2y$ y sobre el triángulo en el plano xy con vértices (1, 0), (2, 1) y (4, 0)

37. El tetraedro sólido con vértices (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 0) y (2, 2, 0)

38. Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$ y $y + z = 3$

39. Una de las cuñas cortadas del cilindro $x^2 + 9y^2 = a^2$ por los planos $z = 0$ y $z = mx$

40. Sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y bajo el semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

---

41. Considere una lámina que ocupa la región D acotada por la parábola $x = 1 - y^2$ y los ejes de coordenadas en el primer cuadrante con función de densidad $\rho(x, y) = y$.
(a) Determine la masa de la lámina.
(b) Determine el centro de masa.
(c) Determine los momentos de inercia y radios de giro en torno a los ejes x y y.

42. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ que se ubica en el primer cuadrante.
(a) Determine el centroide de la lámina.
(b) Determine el centro de masa de la lámina si la función de densidad es $\rho(x, y) = xy^2$.

43. (a) Determine el centroide de un cono circular recto sólido con altura h y radio de base a. (Coloque el cono de tal forma que su base esté en el plano xy con centro en el origen y su eje a lo largo del eje z positivo.)
(b) Si el cono tiene función de densidad $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, determine el momento de inercia del cono alrededor de su eje (el eje z).

44. Encuentre el área de la parte del cono $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

45. Encuentre el área de la parte de la superficie $z = x^2 + y$ que está sobre el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 2).

SAC **46.** Grafique la superficie $z = x \operatorname{sen} y$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$ y encuentre su área con cuatro decimales.

47. Use coordenadas polares para evaluar

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2)\,dy\,dx$$

48. Use coordenadas esféricas para evaluar

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dz\,dx\,dy$$

49. Si D es la región acotada por las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = e^x$, determine el valor aproximado de la integral $\iint_D y^2\,dA$. (Use un dispositivo de graficación para estimar los puntos de intersección de las curvas.)

SAC **50.** Determine el centro de masa del tetraedro sólido con vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3) y función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

51. La función de densidad conjunta para las variables aleatorias X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) Determine el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y \leqslant 1)$.

52. Una lámpara tiene tres focos, cada uno de un tipo con período de vida promedio de 800 horas. Si se modela la probabilidad de falla de un foco mediante una función exponencial de densidad con media 800, encuentre la probabilidad de que los tres focos fallen en menos de un total de 1000 horas.

53. Reescriba la integral

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

como una integral iterada en el orden $dx\,dy\,dz$.

54. Dé otras cinco integrales iteradas que sean iguales a

$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$$

55. Use la transformación $u = x - y$, $v = x + y$ para evaluar

$$\iint_R \frac{x - y}{x + y}\,dA$$

donde R es el cuadrado con vértices (0, 2), (1, 1), (2, 2) y (1, 3).

56. Use la transformación $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para hallar el volumen de la región acotada por la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ y los planos de coordenadas.

57. Use la fórmula de cambio de variables y una transformación apropiada para evaluar $\iint_R xy\,dA$, donde R es el cuadrado con vértices (0, 0), (1, 1), (2, 0) y (1, −1).

58. El **teorema del valor medio para integrales dobles** establece que si f es una función continua en una región plana D que es de tipo I o tipo II, existe un punto (x_0, y_0) en D tal que

$$\iint_D f(x, y)\,dA = f(x_0, y_0)A(D)$$

Use el teorema de valores extremos (14.7.8) y la propiedad 15.2.11 de las integrales para comprobar este teorema. (Use como guía la comprobación de la versión de una variable en la sección 6.5.)



59. Suponga que f es continua en un disco que contiene el punto (a, b). Sea D_r el disco cerrado con centro (a, b) y radio r. Use el teorema del valor medio para integrales dobles (véase el ejercicio 58) para demostrar que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$

60. (a) Evalúe $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}} dA$, donde n es un entero y D la región acotada por los círculos con centro en el origen y radios r y R, $0 < r < R$.

(b) ¿Para cuáles valores de n tiene la integral en el inciso (a) un límite cuando $r \to 0^+$?

(c) Determine $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}} dV$, donde E es la región acotada por las esferas con centro en el origen y radios r y R, $0 < r < R$.

(d) ¿Para cuáles valores de n tiene la integral en el inciso (c) un límite cuando $r \to 0^+$?

Problemas adicionales

1. Si $[\![x]\!]$ denota el entero mayor en x, evalúe la integral

$$\iint_R [\![x + y]\!]\, dA$$

donde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3, \quad 2 \leqslant y \leqslant 5\}$.

2. Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\text{máx}\{x^2, y^2\}}\, dy\, dx$$

donde máx$\{x^2, y^2\}$ significa el mayor de los números x^2 y y^2.

3. Determine el valor promedio de la función $f(x) = \int_x^1 \cos(t^2)\, dt$ en el intervalo $[0, 1]$.

4. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores constantes, $\mathbf{r}$ es el vector de posición $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y E está dada por las desigualdades $0 \leqslant \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \leqslant \alpha$, $0 \leqslant \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \leqslant \beta$, $0 \leqslant \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} \leqslant \gamma$, demuestre que

$$\iiint_E (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\, dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8\,|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$

5. La integral doble $\int_0^1 \int_0^1 \dfrac{1}{1 - xy}$ es una integral impropia y podría definirse como el límite de integrales dobles en el rectángulo $[0, t] \times [0, t]$ cuando $t \to 1^-$. Pero si se desarrolla el integrando como una serie geométrica, se puede expresar la integral como la suma de una serie infinita. Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}\, dx\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

6. Leonhard Euler fue capaz de determinar la suma exacta de la serie en el problema 5. En 1736 comprobó que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

En este problema se pide comprobar este hecho evaluando la integral doble del problema 5. Comience haciendo el cambio de variables

$$x = \frac{u - v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$$

Esto da una rotación en torno al origen por el ángulo $\pi/4$. Usted tendrá que trazar la región correspondiente en el plano uv.

[*Sugerencia*: si al evaluar la integral encuentra cualesquiera de las expresiones $(1 - \operatorname{sen}\theta)/\cos\theta$ o $(\cos\theta)/(1 + \operatorname{sen}\theta)$, podría usar la identidad $\cos\theta = \operatorname{sen}((\pi/2) - \theta)$ y la identidad correspondiente para $\operatorname{sen}\theta$.]

7. (a) Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xyz}\, dx\, dy\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(Nadie ha podido hallar el valor exacto de la suma de esta serie.)

(b) Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + xyz}\, dx\, dy\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Use esta ecuación para evaluar la integral triple con dos decimales.



8. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln \pi$$

expresando primero la integral como una integral iterada.

9. (a) Demuestre que cuando la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se escribe en coordenadas cilíndricas, se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(b) Demuestre que cuando la ecuación de Laplace se escribe en coordenadas esféricas se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

10. (a) Una lámina tiene densidad constante ρ y adopta la forma de un disco con centro en el origen y radio R. Use la ley de la gravitación de Newton (véase la sección 13.4) para demostrar que la magnitud de la fuerza de atracción que la lámina ejerce sobre un cuerpo con masa m localizado en el punto $(0, 0, d)$ en el eje z positivo es

$$F = 2\pi G m \rho d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$$

[*Sugerencia*: divida el disco como en la figura 15.3.4 y calcule primero el componente vertical de la fuerza ejercida por el subrectángulo polar R_{ij}.]

(b) Demuestre que la magnitud de la fuerza de atracción de una lámina con densidad ρ que ocupa un plano entero sobre un objeto con masa m localizado a una distancia d del plano es

$$F = 2\pi G m \rho$$

Note que esta expresión no depende de d.

11. Si f es continua, demuestre que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t)\, dt\, dz\, dy = \tfrac{1}{2} \int_0^x (x - t)^2 f(t)\, dt$$

12. Evalúe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + ni + j}}$.

13. El plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0$$

corta el elipsoide sólido

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

en dos piezas. Determine el volumen de la pieza menor.

16 Cálculo vectorial

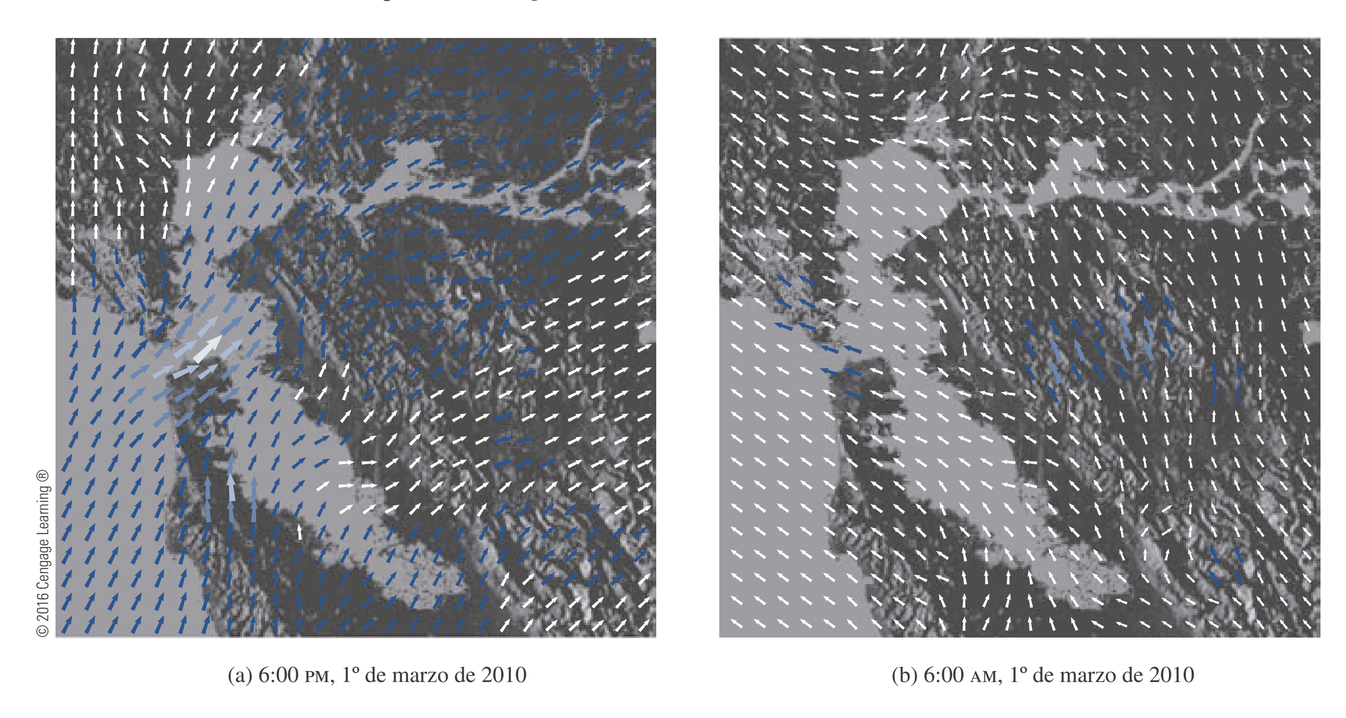

© Everett Collection/Glow Images

Las superficies paramétricas, las cuales se estudiarán en la sección 16.6, son frecuentemente usadas por programadores para crear el sofisticado software que se utiliza en el desarrollo de filmes animados por computadora como la serie *Shrek*. Ese software emplea superficies paramétricas y de otros tipos para crear modelos tridimensionales de los personajes y objetos en una escena. Color, textura e iluminación se producen entonces para dar vida a la escena.

EN ESTE CAPÍTULO SE ESTUDIARÁ el cálculo de campos vectoriales. (Estos son funciones que asignan vectores a puntos en el espacio.) En particular, se definirán integrales de línea (que pueden usarse para determinar el trabajo realizado por un campo de fuerzas para mover un objeto a lo largo de una curva). Después se definirán integrales de superficie (que pueden usarse para determinar la razón de flujo de un fluido en una superficie). Las relaciones entre estos nuevos tipos de integrales y las integrales simples, dobles y triples que ya se conocen están dadas por las versiones de dimensiones superiores del teorema fundamental del cálculo: el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia.

16.1 Campos vectoriales

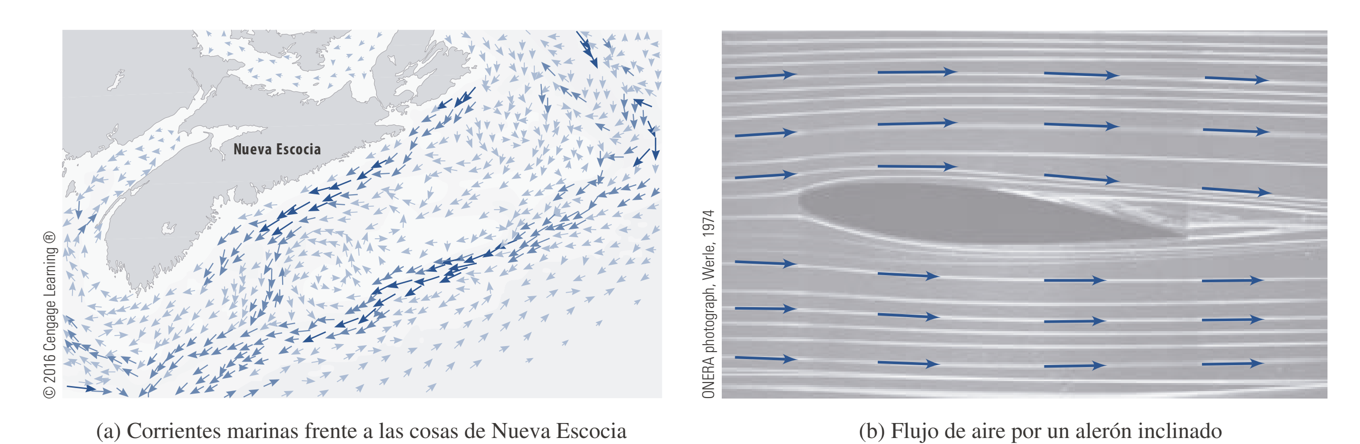
Los vectores de la figura 1 son vectores de velocidad del aire que indican la velocidad y dirección del viento en puntos a 10 m por encima de la elevación superficial en el área de la bahía de San Francisco. Basta con echar un vistazo a las flechas más grandes de la parte (a) para saber que las mayores velocidades del viento ocurrieron a esa hora, cuando los vientos entraron a la bahía por el puente Golden Gate. La parte (b) muestra el patrón del viento 12 horas antes. Los dos patrones difieren mucho entre sí. En asociación con cada punto en el aire puede imaginar un vector de velocidad del viento. Este es un ejemplo de un *campo vectorial de velocidad*.



(a) 6:00 PM, 1º de marzo de 2010 (b) 6:00 AM, 1º de marzo de 2010

FIGURA 1 Campos vectoriales de velocidad que muestran patrones de viento de la bahía de San Francisco

Otros ejemplos de campos vectoriales de velocidad se ilustran en la figura 2: corrientes marinas y el flujo por un alerón.



(a) Corrientes marinas frente a las cosas de Nueva Escocia (b) Flujo de aire por un alerón inclinado

FIGURA 2
Campos vectoriales de velocidad

Otro tipo de campo vectorial, llamado *campo de fuerzas*, asocia un vector de fuerza con cada punto en una región. Un ejemplo es el campo de fuerzas gravitacionales que se examinará en el ejemplo 4.

En general, un campo vectorial es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) y cuyo rango es un conjunto de vectores en V_2 (o V_3).

1 Definición Sea D un conjunto en $\mathbb{R}^2$ (una región plana). Un **campo vectorial en** $\mathbb{R}^2$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y) en D un vector bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

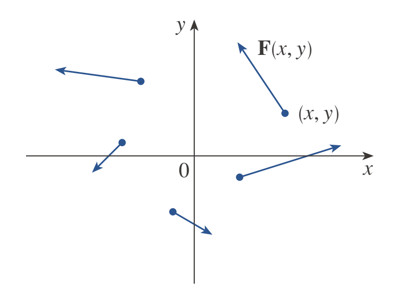


FIGURA 3
Campo vectorial en $\mathbb{R}^2$

La mejor manera de representar un campo vectorial es dibujar la flecha que representa al vector $\mathbf{F}(x, y)$ a partir del punto (x, y). Desde luego que esto es imposible de hacer para todos los puntos (x, y), pero se puede obtener una impresión razonable de $\mathbf{F}$ al hacerlo para algunos puntos representativos en D, como en la figura 3. Puesto que $\mathbf{F}(x, y)$ es un vector bidimensional, puede escribirse en términos de sus **funciones componentes** P y Q como sigue:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$$

o para abreviar

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$$

Nótese que P y Q son funciones escalares de dos variables, también llamadas **campos escalares** para distinguirlas de los campos vectoriales.

2 Definición Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Un **campo vectorial en** $\mathbb{R}^3$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y, z) en E un vector tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

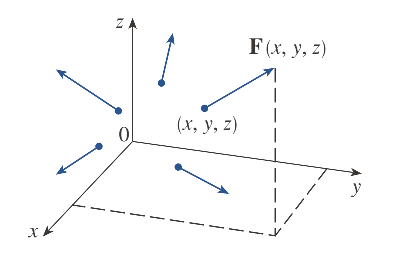


FIGURA 4
Campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ se presenta en la figura 4. Puede expresarse en términos de sus funciones componentes P, Q y R como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Al igual que en el caso de las funciones vectoriales en la sección 13.1, se puede definir la continuidad de los campos vectoriales y demostrar que $\mathbf{F}$ es continuo si y solo si sus funciones componentes P, Q y R son continuas.

A veces se identifica un punto (x, y, z) con su vector de posición $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ y se escribe $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en lugar de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Entonces $\mathbf{F}$ se convierte en una función que asigna un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a un vector $\mathbf{x}$.

EJEMPLO 1 Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Describa $\mathbf{F}$ trazando algunos de los vectores $\mathbf{F}(x, y)$ como en la figura 3.

SOLUCIÓN Puesto que $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, dibuje el vector $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ a partir del punto $(1, 0)$ en la figura 5. Ya que $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$, dibuje el vector $\langle -1, 0\rangle$ a partir del punto $(0, 1)$. Continuando de esta manera, calcule varios valores representativos más de $\mathbf{F}(x, y)$ en la tabla y dibuje los vectores correspondientes para representar el campo vectorial en la figura 5.

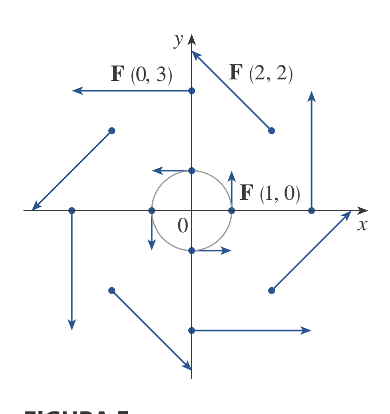


FIGURA 5
$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Da la impresión en la figura 5 de que cada flecha es tangente a un círculo con centro en el origen. Para confirmar esto, se toma el producto punto del vector de posición $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ con el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

Esto demuestra que $\mathbf{F}(x, y)$ es perpendicular al vector de posición $\langle x, y\rangle$, y por tanto tangente a un círculo con centro en el origen y radio $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nótese también que

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

así que la magnitud del vector $\mathbf{F}(x, y)$ es igual al radio del círculo. ■

Algunos sistemas algebraicos computacionales son capaces de trazar campos vectoriales en dos o tres dimensiones. Dan una mejor impresión del campo vectorial de la que es posible a mano, porque la computadora puede trazar un gran número de vectores representativos. La figura 6 muestra un trazo en computadora del campo vectorial del ejemplo 1; las figuras 7 y 8 muestran los otros dos campos vectoriales. Adviértase que la computadora escala las longitudes de los vectores para que no sean demasiado largos, aunque sin dejar de ser proporcionales a sus longitudes verdaderas.

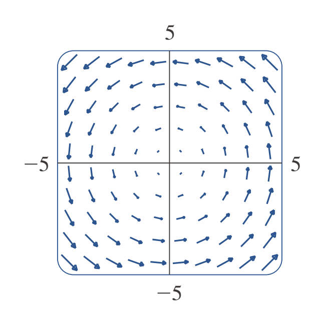


FIGURA 6
$\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x\rangle$

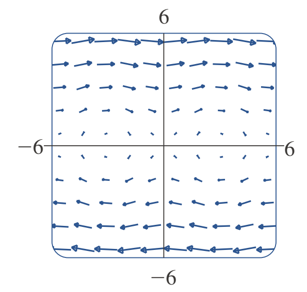


FIGURA 7
$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \operatorname{sen} x\rangle$

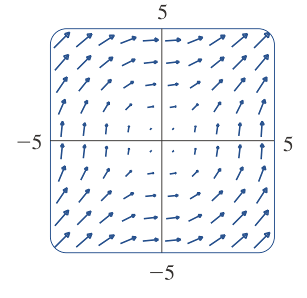


FIGURA 8
$\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2)\rangle$

EJEMPLO 2 Trace el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN El trazo aparece en la figura 9. Nótese que todos los vectores son verticales y apuntan hacia arriba sobre el plano xy, o hacia abajo debajo de él. La magnitud aumenta con la distancia del plano xy.

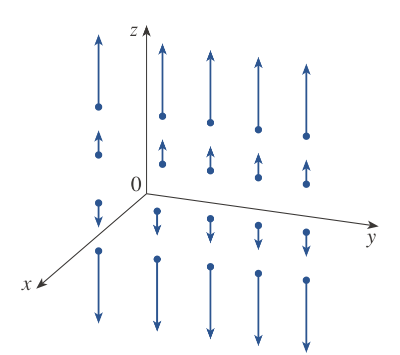


FIGURA 9
$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$

■

Se pudo dibujar a mano el campo vectorial del ejemplo 2 gracias a su fórmula particularmente simple. La mayoría de los campos vectoriales tridimensionales, sin embargo, son prácticamente imposibles de trazar a mano, así que es necesario recurrir a software

de computación. Se muestran ejemplos en las figuras 10, 11 y 12. Obsérvese que los campos vectoriales en las figuras 10 y 11 tienen fórmulas similares, pero todos los vectores en la figura 11 apuntan en la dirección general del eje y negativo, porque todos sus componentes y son -2. Si el campo vectorial en la figura 12 representa un campo de velocidad, una partícula sería lanzada hacia arriba y giraría en espiral alrededor del eje z en el sentido de las manecillas del reloj al ser vista desde arriba.

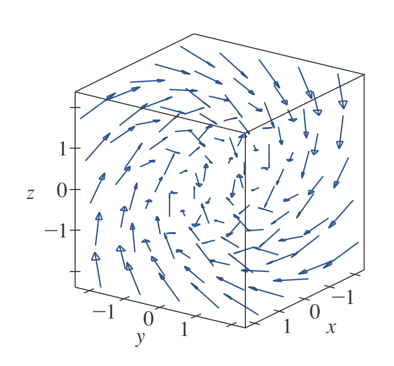


FIGURA 10
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

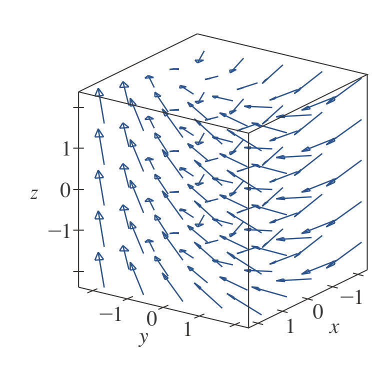


FIGURA 11
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

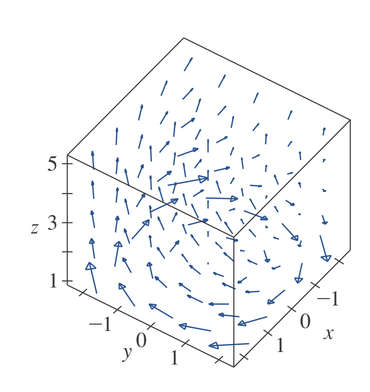


FIGURA 12
$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y}{z}\,\mathbf{i} - \frac{x}{z}\,\mathbf{j} + \frac{z}{4}\,\mathbf{k}$

TEC En Visual 16.1 usted puede rotar los campos vectoriales de las figuras 10-12, así como otros campos adicionales.

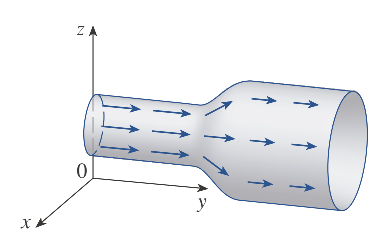


FIGURA 13
Campo de velocidad en el flujo de un fluido

EJEMPLO 3 Imagine un fluido que fluye constantemente a lo largo de un tubo y sea $\mathbf{V}(x, y, z)$ el vector velocidad en un punto (x, y, z). Entonces, $\mathbf{V}$ asigna un vector a cada punto (x, y, z) en cierto dominio E (el interior del tubo), así que $\mathbf{V}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ llamado **campo de velocidad**. Un posible campo de velocidad se ilustra en la figura 13. La rapidez en cualquier punto dado está indicada por la longitud de la flecha.

Los campos de velocidad también ocurren en otras áreas de la física. Por ejemplo, el campo vectorial del ejemplo 1 podría usarse como el campo de velocidad que describe la rotación de una rueda en sentido contrario a las manecillas del reloj. Se han visto otros ejemplos de campos de velocidad en las figuras 1 y 2. ■

EJEMPLO 4 La ley de la gravitación de Newton sostiene que la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos objetos con masas m y M es

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los objetos y G la constante gravitacional. (Este es un ejemplo de una ley de cuadrados inversa.) Suponga que el objeto con masa M se localiza en el origen en $\mathbb{R}^3$. (Por ejemplo, M podría ser la masa de la Tierra y el origen estaría en su centro.) Sea $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ el vector de posición del objeto con masa m. Entonces, $r = |\mathbf{x}|$, así que $r^2 = |\mathbf{x}|^2$. La fuerza gravitacional ejercida sobre este segundo objeto actúa hacia el origen, y el vector unitario en esta dirección es

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Por tanto, la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto en $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ es

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

[Los físicos suelen usar la notación $\mathbf{r}$ en vez de $\mathbf{x}$ para el vector de posición, así que usted podría ver la fórmula 3 escrita en la forma $\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}$.] La función dada

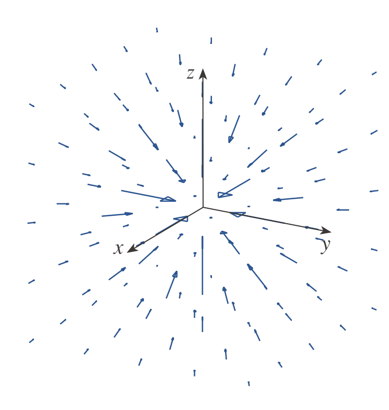


FIGURA 14
Campo de fuerzas gravitacionales

por la ecuación 3 es un ejemplo de un campo vectorial, llamado **campo gravitacional**, porque asocia un vector [la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$] con cada punto $\mathbf{x}$ en el espacio.

La fórmula 3 es un modo compacto de escribir el campo gravitacional, pero también puede escribirse en términos de sus funciones componentes usando los hechos de que $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

El campo gravitacional $\mathbf{F}$ se representa en la figura 14. ■

EJEMPLO 5 Suponga que una carga eléctrica Q se localiza en el origen. De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza eléctrica $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ejercida por esa carga sobre una carga q localizada en un punto (x, y, z) con vector de posición $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ es

4 $$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon q Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

donde ε es una constante (que depende de las unidades usadas). Para cargas iguales, se tiene $qQ > 0$ y la fuerza es de repulsión; para cargas desiguales se tiene $qQ < 0$ y la fuerza es de atracción. Nótese la semejanza entre las fórmulas 3 y 4. Ambos campos vectoriales son ejemplos de **campos de fuerzas**.

En lugar de considerar la fuerza eléctrica $\mathbf{F}$, los físicos suelen considerar la fuerza por unidad de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

Entonces, $\mathbf{E}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ llamado **campo eléctrico** de Q. ■

Campos gradientes

Si f es una función escalar de dos variables, recuerde de la sección 14.6 que su gradiente ∇f (o grad f) está definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

Por tanto, ∇f es en realidad un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ llamado **campo vectorial gradiente**. De igual forma, si f es una función escalar de tres variables, su gradiente es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

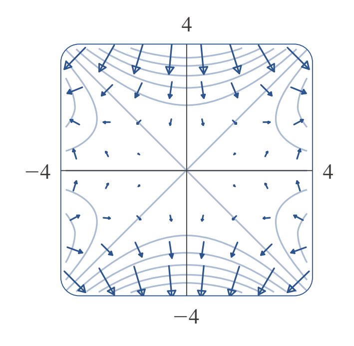


FIGURA 15

EJEMPLO 6 Determine el campo vectorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Trace el campo vectorial gradiente junto con un mapa de contorno de f. ¿Cómo se relacionan entre sí?

SOLUCIÓN El campo vectorial gradiente está dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

La figura 15 muestra un mapa de contorno de f con el campo vectorial gradiente. Observe que los vectores gradientes son perpendiculares a las curvas de nivel, como

cabría esperar por la sección 14.6. Observe también que los vectores gradientes son largos donde las curvas de nivel están muy cerca entre sí y cortos donde las curvas están separadas. Esto se debe a que la longitud del vector gradiente es el valor de la derivada direccional de f y las curvas de nivel estrechamente espaciadas indican una gráfica pronunciada. ■

Un campo vectorial **F** se llama **campo vectorial conservativo** si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. En esta situación, f se llama **función potencial** de **F**.

No todos los campos vectoriales son conservativos, pero tales campos surgen con frecuencia en física. Por ejemplo, el campo gravitacional **F** en el ejemplo 4 es conservativo, porque si se define

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

entonces

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z)\end{aligned}$$

En las secciones 16.3 y 16.5 se aprenderá si un campo vectorial dado es conservativo o no.

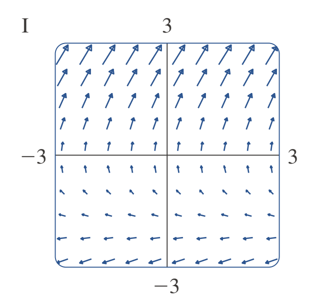
16.1 EJERCICIOS

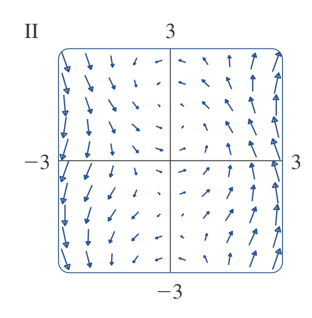
1-10 Trace el campo vectorial **F** dibujando un diagrama como la figura 5 o la figura 9.

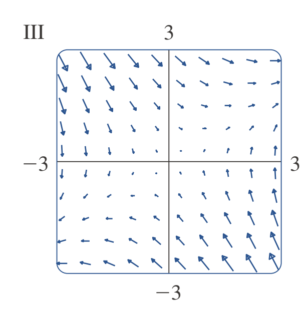
1. $\mathbf{F}(x, y) = 0.3\,\mathbf{i} - 0.4\,\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + (x + y)\,\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

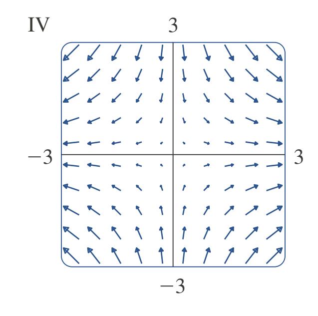
11-14 Asocie los campos vectoriales **F** con los diagramas rotulados I-IV. Dé razones de sus decisiones.

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, -y\rangle$
12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x - y\rangle$
13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, y + 2\rangle$
14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \cos(x + y), x\rangle$









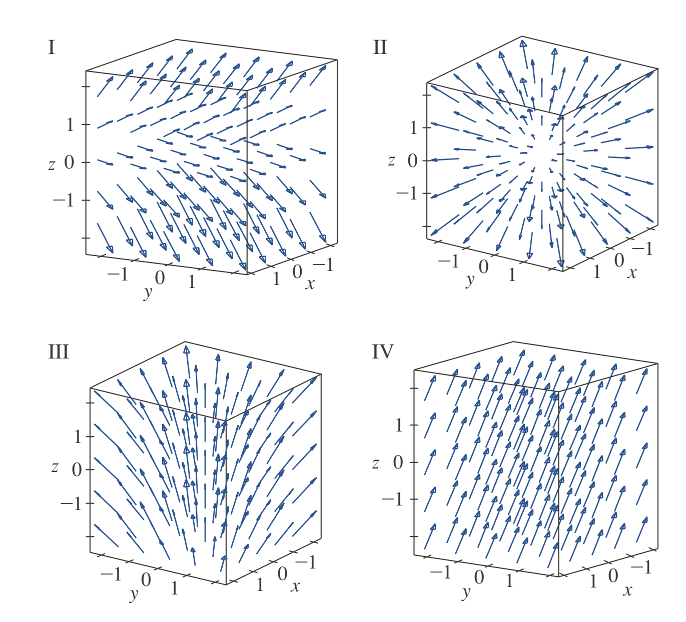
15-18 Asocie los campos vectoriales **F** en $\mathbb{R}^3$ con los diagramas rotulados I-IV. Dé razones de sus decisiones.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$



19. Si tiene un SAC que trace campos vectoriales (el comando es `fieldplot` en Maple y `PlotVectorField` o `VectorPlot` en Mathematica), úselo para trazar

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2xy)\,\mathbf{i} + (3xy - 6y^2)\,\mathbf{j}$$

Explique la apariencia determinando el conjunto de puntos (x, y) tales que $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$.

20. Sea $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$ y $r = |\,\mathbf{x}\,|$. Use un SAC para trazar este campo vectorial en varios dominios hasta que pueda ver qué sucede. Describa la apariencia del diagrama y explíquela determinando los puntos donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

21-24 Halle el campo vectorial gradiente de f.

21. $f(x, y) = \tan(3x - 4y)$

22. $f(s, t) = \sqrt{2s + 3t}$

23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

24. $f(x, y, z) = x^2 y e^{y/z}$

25-26 Halle el campo vectorial gradiente ∇f de f y trácelo.

25. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2$

26. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

27-28 Trace el campo vectorial gradiente de f junto con un mapa de contorno de f. Explique cómo se relacionan entre sí.

27. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + 2y^2)$

28. $f(x, y) = \cos x - 2\,\mathrm{sen}\,y$

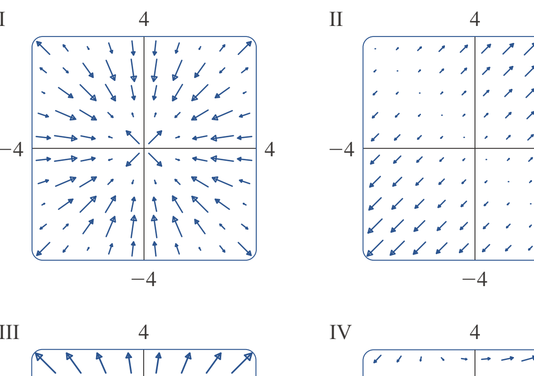
29-32 Asocie las funciones f con los diagramas de sus campos vectoriales gradientes rotulados I-IV. Dé razones de sus decisiones.

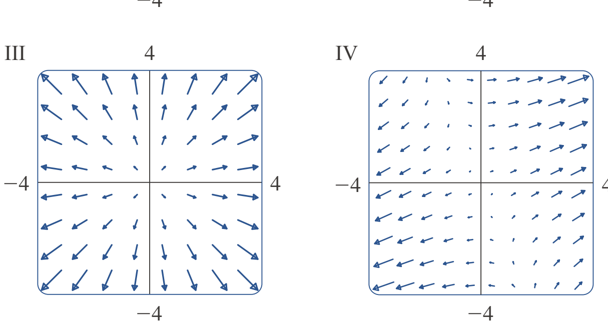
29. $f(x, y) = x^2 + y^2$

30. $f(x, y) = x(x + y)$

31. $f(x, y) = (x + y)^2$

32. $f(x, y) = \mathrm{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$





33. Una partícula se mueve en un campo de velocidad $\mathbf{V}(x, y) = \langle x^2, x + y^2 \rangle$. Si está en la posición $(2, 1)$ en el momento $t = 3$, estime su ubicación en el momento $t = 3.01$.

34. En el momento $t = 1$, una partícula se localiza en la posición $(1, 3)$. Si se mueve en un campo de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle xy - 2, y^2 - 10 \rangle$$

determine su ubicación aproximada en el momento $t = 1.05$.

35. Las **líneas de flujo** (o **líneas de corriente**) de un campo vectorial son las trayectorias seguidas por una partícula cuyo campo de velocidad es el campo vectorial dado. Así, los vectores en un campo vectorial son tangentes a las líneas de flujo.

(a) Use un diagrama del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ para dibujar algunas líneas de flujo. ¿Puede deducir de sus bocetos las ecuaciones de las líneas de flujo?

(b) Si ecuaciones paramétricas de una línea de flujo son $x = x(t)$, $y = y(t)$, explique por qué estas funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales $dx/dt = x$ y $dy/dt = -y$. Resuelva después las ecuaciones diferenciales para determinar una ecuación de la línea de flujo que pasa por el punto $(1, 1)$.

36. (a) Trace el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ y dibuje después algunas líneas de flujo. ¿Qué forma parecen tener estas líneas de flujo?

(b) Si ecuaciones paramétricas de las líneas de flujo son $x = x(t)$, $y = y(t)$, ¿qué ecuaciones diferenciales satisfacen estas funciones? Deduzca que $dy/dx = x$.

(c) Si una partícula parte del origen en el campo de velocidad dado por **F**, determine una ecuación de la trayectoria que sigue.

16.2 Integrales de línea

En esta sección se definirá una integral que es similar a una integral simple excepto que en vez de integrar en un intervalo $[a, b]$, se integra en una curva C. Tales integrales se llaman *integrales de línea*, aunque "integrales de curva" sería una mejor terminología. Fueron inventadas a principios del siglo XIX para resolver problemas que implican el flujo de fluidos, fuerzas, electricidad y magnetismo.

Se comienza con una curva plana C dada por las ecuaciones paramétricas

1 $$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

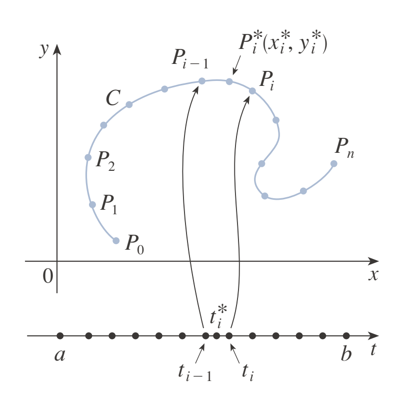


FIGURA 1

o, en forma equivalente, por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, y suponga que C es una curva suave. [Esto significa que $\mathbf{r}$' es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. Véase la sección 13.3.] Si divide el intervalo paramétrico $[a, b]$ en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual ancho y concede que $x_i = x(t_i)$ y $y_i = y(t_i)$, entonces los correspondientes puntos $P_i\,(x_i, y_i)$ dividen C en n subarcos con longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. (Véase la figura 1.). Elija cualquier punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ en el arco de orden i. (Esto corresponde al punto t_i^* en $[t_{i-1}, t_i]$.) Ahora, si f es cualquier función de dos variables cuyo dominio incluye la curva C, evalúe f en el punto (x_i^*, y_i^*), multiplique por la longitud Δs_i del subarco y forme la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

la cual es similar a una suma de Riemann. Tome entonces el límite de estas sumas y represente la definición siguiente por analogía con una integral simple.

2 Definición Si f se define en una curva suave C dada por las ecuaciones 1, la **integral de línea de f a lo largo de C** es

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

si este límite existe.

En la sección 10.2 se determina que la longitud de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Un tipo de argumento similar puede usarse para demostrar que si f es una función continua, el límite en la definición 2 siempre existe y la fórmula siguiente puede usarse para evaluar la integral de línea:

3 $$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

El valor de la integral de línea no depende de la parametrización de la curva, siempre que esa curva sea recorrida exactamente una vez conforme t aumenta de a a b.



La función longitud de arco se analiza en la sección 13.3.

Si $s(t)$ es la longitud de C entre $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Así, la manera de recordar la fórmula 3 es expresar todo en términos del parámetro t: use las ecuaciones paramétricas para expresar x y y en términos de t y escriba ds como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

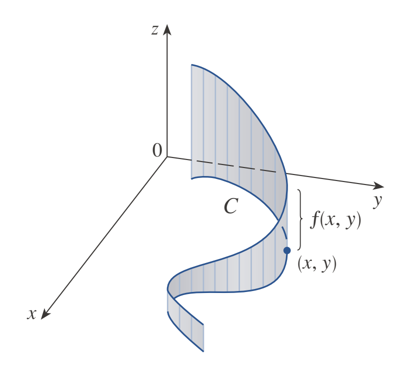


FIGURA 2

En el caso especial en el que C es el segmento de recta que une $(a, 0)$ con $(b, 0)$, usando x como el parámetro, se pueden escribir las ecuaciones paramétricas de C como sigue: $x = x$, $y = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. La fórmula 3 se convierte entonces en

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, 0)\, dx$$

y por tanto la integral de línea en este caso se reduce a una integral simple ordinaria.

Igual que en el caso de una integral simple ordinaria, se puede interpretar la integral de línea de una función *positiva* como un área. De hecho, si $f(x, y) \geqslant 0$, $\int_C f(x, y)\, ds$ representa el área de un lado de la "cerca" o "cortina" de la figura 2, cuya base es C y cuya altura arriba del punto (x, y) es $f(x, y)$.



EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C (2 + x^2y)\, ds$, donde C es la mitad superior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$.

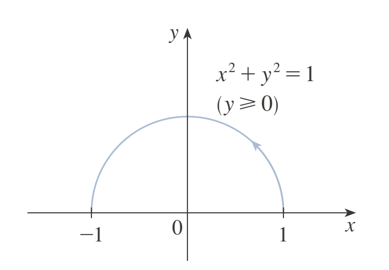


FIGURA 3

SOLUCIÓN Para usar la fórmula 3, necesita primero ecuaciones paramétricas que representen a C. Recuerde que el círculo unitario puede parametrizarse por medio de las ecuaciones

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

y la mitad superior del círculo es descrita por el intervalo paramétrico $0 \leqslant t \leqslant \pi$. (Véase la figura 3.) Por tanto, la fórmula 3 da

$$\begin{aligned}
\int_C (2 + x^2y)\, ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\
&= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t) \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt \\
&= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi \\
&= 2\pi + \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

■

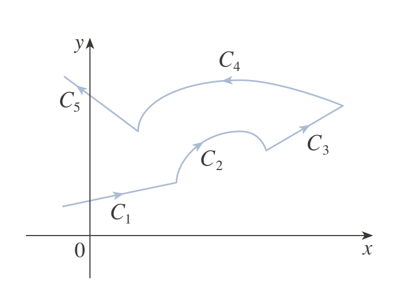


FIGURA 4
Una curva suave por partes

Suponga ahora que C es una **curva suave por partes**; es decir, C es una unión de un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$, donde, como se ilustra en la figura 4, el punto inicial de C_{i+1} es el punto terminal de C_i. Se define entonces la integral de f a lo largo de C como la suma de las integrales de f a lo largo de cada una de las piezas suaves de C:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_C 2x\,ds$, donde C consta del arco C_1 de la parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) seguido por el segmento de recta vertical C_2 de (1, 1) a (1, 2).

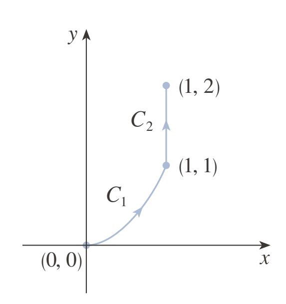


FIGURA 5
$C = C_1 \cup C_2$

SOLUCIÓN La curva C aparece en la figura 5. C_1 es la gráfica de una función de x, así que es posible elegir x como el parámetro y las ecuaciones de C_1 se convierten en

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Por tanto

$$\int_{C_1} 2x\,ds = \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3}(1 + 4x^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

En C_2 se elige y como el parámetro, de modo que las ecuaciones de C_2 son

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

y
$$\int_{C_2} 2x\,ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\,dy = \int_1^2 2\,dy = 2$$

Así
$$\int_C 2x\,ds = \int_{C_1} 2x\,ds + \int_{C_2} 2x\,ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$ ■

Toda interpretación física de una integral de línea $\int_C f(x, y)\,ds$ depende de la interpretación física de la función f. Suponga que $\rho(x, y)$ representa la densidad lineal en un punto (x, y) de un alambre delgado en forma de una curva C. Entonces, la masa de la parte del alambre de P_{i-1} a P_i en la figura 1 es aproximadamente $\rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$, y en consecuencia la masa total del alambre es aproximadamente $\Sigma\,\rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$. Al tomar cada vez más puntos en la curva, se obtiene la **masa** m del alambre como el valor límite de estas aproximaciones:

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i = \int_C \rho(x, y)\,ds$$

[Por ejemplo, si $f(x, y) = 2 + x^2y$ representa la densidad de un alambre en forma de semicírculo, la integral del ejemplo 1 representaría la masa del alambre.] El **centro de masa** del alambre con función de densidad ρ se localiza en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

4
$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\,\rho(x, y)\,ds \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x, y)\,ds$$

Otras interpretaciones físicas de integrales de línea se analizarán más adelante en este mismo capítulo.

EJEMPLO 3 Un alambre adopta la forma del semicírculo $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, y es más grueso cerca de su base que cerca de la parte más alta. Encuentre el centro de masa del alambre si la densidad lineal en cualquier punto es proporcional a su distancia de la recta $y = 1$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 1, se usa la parametrización $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, y se determina que $ds = dt$. La densidad lineal es

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$



donde k es una constante, así que la masa del alambre es

$$m = \int_C k(1 - y)\, ds = \int_0^{\pi} k(1 - \operatorname{sen} t)\, dt = k\Big[t + \cos t\Big]_0^{\pi} = k(\pi - 2)$$

De las ecuaciones 4 se tiene

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x, y)\, ds = \frac{1}{k(\pi - 2)}\int_C y\, k(1 - y)\, ds \\ &= \frac{1}{\pi - 2}\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t)\, dt = \frac{1}{\pi - 2}\Big[-\cos t - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}\end{aligned}$$

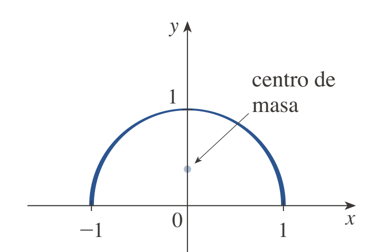


FIGURA 6

Por simetría se ve que $\bar{x} = 0$, de modo que el centro de masa es

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}\right) \approx (0, 0.38)$$

Véase la figura 6. ■

Otras dos integrales de línea se obtienen reemplazando Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ en la definición 2. Estas se llaman **integrales de línea de f a lo largo de C con respecto a x y y**:

5 $$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i$$

6 $$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta y_i$$

Cuando se desea distinguir la integral de línea original $\int_C f(x, y)\, ds$ de las ecuaciones 5 y 6, se llama **integral de línea con respecto a la longitud de arco**.

Las fórmulas siguientes establecen que las integrales de línea con respecto a x y y también pueden evaluarse expresando todo en términos de t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$

7
$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$$
$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$$

Con frecuencia sucede que integrales de línea con respecto a x y y ocurran juntas. Cuando pasa esto, se acostumbra abreviar escribiendo

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Cuando se establece una integral general, a veces lo más difícil es pensar en una representación paramétrica para una curva cuya descripción geométrica está dada. En particular, a menudo se debe parametrizar un segmento de recta, así que resulta útil

recordar que una representación vectorial del segmento de recta que parte de $\mathbf{r}_0$ y termina en $\mathbf{r}_1$ está dada por

8 $$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Véase la ecuación 12.5.4.)

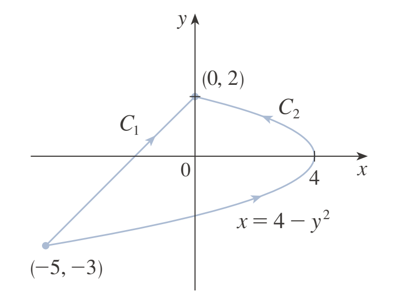


FIGURA 7

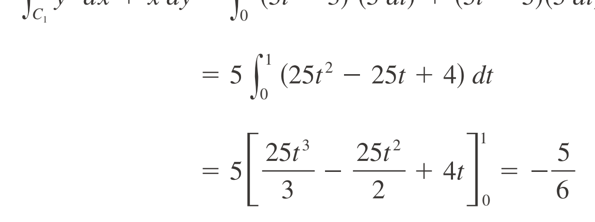
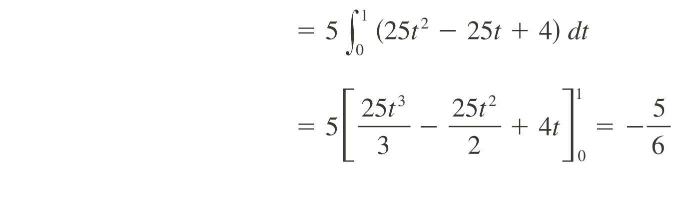
EJEMPLO 4 Evalúe $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, donde (a) $C = C_1$ es el segmento de recta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ y (b) $C = C_2$ es el arco de la parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Véase la figura 7.)

SOLUCIÓN

(a) Una representación paramétrica para el segmento de recta es

$$x = 5t - 5 \qquad y = 5t - 3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Use la ecuación 8 con $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3\rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2\rangle$.) Entonces $dx = 5\,dt$, $dy = 5\,dt$, y las fórmulas 7 dan

$$\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 (5t - 3)^2(5\,dt) + (5t - 5)(5\,dt)$$

$$= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\,dt$$

$$= 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = -\frac{5}{6}$$

(b) Puesto que la parábola está dada como una función de y, se toma y como el parámetro y se escribe C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Así $dx = -2y\,dy$, y por las fórmulas 7 se tiene

$$\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-3}^2 y^2(-2y)\,dy + (4 - y^2)\,dy$$

$$= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4)\,dy$$

$$= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^2 = 40\tfrac{5}{6}$$ ■

Nótese que se obtuvieron respuestas diferentes en las partes (a) y (b) del ejemplo 4, aunque las dos curvas tienen los mismos puntos extremos. Así, en general, el valor de una integral de línea depende no solo de los puntos extremos de la curva, sino también de la trayectoria. (Pero véase la sección 16.3 para condiciones en las cuales la integral es independiente de la trayectoria.)

Nótese también que las respuestas en el ejemplo 4 dependen de la dirección u orientación de la curva. Si $-C_1$ denota el segmento de recta de (0, 2) a (–5, –3), usted puede verificar, usando la parametrización

$$x = -5t \qquad y = 2 - 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

que $$\int_{-C_1} y^2\,dx + x\,dy = \tfrac{5}{6}$$

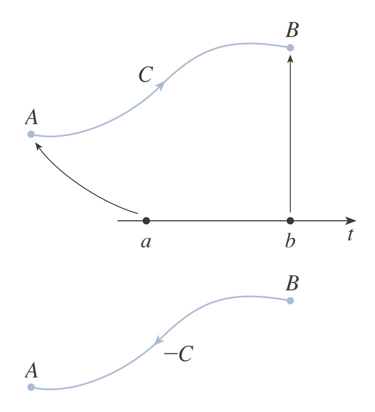


FIGURA 8

En general, una parametrización dada $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, determina una **orientación** de una curva C, y la dirección positiva corresponde a valores crecientes del parámetro t. (Véase la figura 8, donde el punto inicial A corresponde al valor paramétrico a y el punto terminal B a $t = b$.)

Si $-C$ denota la curva que consta de los mismos puntos que C pero con la orientación opuesta (del punto inicial B al punto terminal A en la figura 8), entonces se tiene

$$\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_C f(x, y)\, dx \qquad \int_{-C} f(x, y)\, dy = -\int_C f(x, y)\, dy$$

Pero si se integra con respecto a la longitud de arco, el valor de la integral de línea *no* cambia cuando se invierte la orientación de la curva:

$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$$

Esto se debe a que Δs_i siempre es positiva, mientras que Δx_i y Δy_i cambian de signo cuando se invierte la orientación de C.

Integrales de línea en el espacio

Suponga ahora que C es una curva suave en el espacio dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

o por una ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. Si f es una función de tres variables que es continua en alguna región que contiene C, se define la **integral de línea de *f* a lo largo de *C*** (con respecto a la longitud de arco) en forma similar a la de las curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta s_i$$

Se evalúa usando una fórmula semejante a la fórmula 3:

$$\boxed{9} \quad \int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que las integrales en las fórmulas tanto 3 como 9 pueden escribirse con la notación vectorial más compacta

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Para el caso especial $f(x, y, z) = 1$ se obtiene

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = L$$

donde L es la longitud de la curva C (véase la fórmula 13.3.3).

También pueden definirse integrales de línea a lo largo de C con respecto a x, y y z. Por ejemplo,

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta z_i$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt$$

Por tanto, como en el caso de las integrales de línea en el plano, se evalúan integrales de la forma

10 $$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

expresando todo (x, y, z, dx, dy, dz) en términos del parámetro t.

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_C y \operatorname{sen} z\, ds$, donde C es la hélice circular dada por las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (Véase la figura 9.)

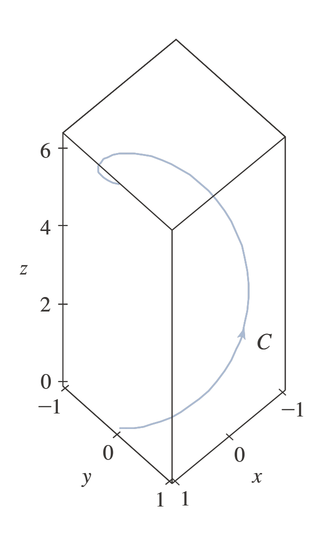
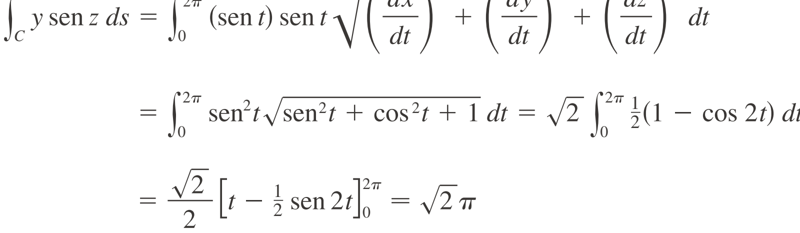


FIGURA 9

SOLUCIÓN La fórmula 9 da



$$\int_C y \operatorname{sen} z\, ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[t - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi$$

■

EJEMPLO 6 Evalúe $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$, donde C consta del segmento de recta C_1 de $(2, 0, 0)$ a $(3, 4, 5)$, seguido por el segmento de recta vertical C_2 de $(3, 4, 5)$ a $(3, 4, 0)$.

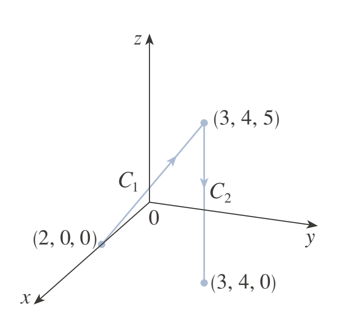


FIGURA 10

SOLUCIÓN La curva C aparece en la figura 10. Usando la ecuación 8, se escribe C_1 como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 2, 0, 0\rangle + t\langle 3, 4, 5\rangle = \langle 2 + t, 4t, 5t\rangle$$

o, en forma paramétrica, como

$$x = 2 + t \qquad y = 4t \qquad z = 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Así

$$\int_{C_1} y\, dx + z\, dy + x\, dz = \int_0^1 (4t)\, dt + (5t)4\, dt + (2 + t)5\, dt$$

$$= \int_0^1 (10 + 29t)\, dt = 10t + 29\frac{t^2}{2}\Bigg]_0^1 = 24.5$$

De igual manera, C_2 puede escribirse en la forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 4, 5\rangle + t\langle 3, 4, 0\rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t\rangle$$

o $$x = 3 \qquad y = 4 \qquad z = 5 - 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Entonces $dx = 0 = dy$, de modo que

$$\int_{C_2} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 3(-5)\,dt = -15$$

Al sumar los valores de estas integrales se obtiene

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = 24.5 - 15 = 9.5$$

Integrales de línea de campos vectoriales

Recuerde de la sección 6.4 que el trabajo realizado por una fuerza variable $f(x)$ para mover una partícula de a a b a lo largo del eje x es $W = \int_a^b f(x)\,dx$. Luego, en la sección 12.3 se determinó que el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ para mover un objeto de un punto P a otro punto Q en el espacio es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ es el vector de desplazamiento.

Suponga ahora que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo continuo de fuerzas en $\mathbb{R}^3$, como el campo gravitacional del ejemplo 16.1.4 o el campo de fuerzas eléctricas del ejemplo 16.1.5. (Un campo de fuerzas en $\mathbb{R}^2$ podría considerarse un caso especial donde $R = 0$ y P y Q dependen únicamente de x y y.) Se desea calcular el trabajo realizado por esta fuerza para mover una partícula a lo largo de una curva suave C.

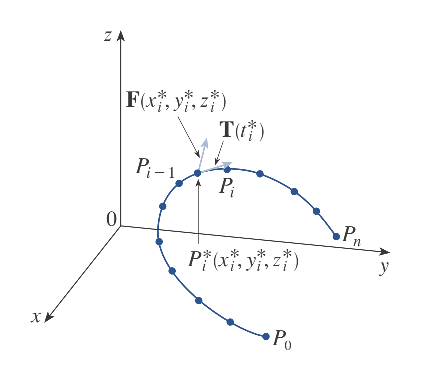


FIGURA 11

Se divide C en subarcos $P_{i-1}P_i$ con longitudes Δs_i dividiendo el intervalo paramétrico $[a, b]$ en subintervalos de igual ancho. (Véase la figura 1 para el caso bidimensional o la figura 11 para el caso tridimensional.) Elija un punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ en el subarco de orden i que corresponda al valor paramétrico t_i^*. Si Δs_i es pequeña, entonces cuando la partícula se mueve de P_{i-1} a P_i a lo largo de la curva, avanza aproximadamente en la dirección de $\mathbf{T}(t_i^*)$, el vector tangente unitario en P_i^*. Así, el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ para mover la partícula de P_{i-1} a P_i es aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i\, \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i$$

y el trabajo total realizado para mover la partícula a lo largo de C es aproximadamente

11
$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)]\, \Delta s_i$$

donde $\mathbf{T}(x, y, z)$ es el vector tangente unitario en el punto (x, y, z) en C. Intuitivamente, se ve que estas aproximaciones deberían mejorar a medida que n aumenta. Por tanto, se define el **trabajo** W realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ como el límite de las sumas de Riemann en (11), a saber,

12
$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

La ecuación 12 indica que el *trabajo es la integral de línea con respecto a la longitud de arco del componente tangencial de la fuerza*.

Si la curva C está dada por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$, así que usando la ecuación 9 se puede reescribir la ecuación 12 en la forma

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Esta integral suele abreviarse como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y ocurre también en otras áreas de la física. A continuación se da la definición siguiente para la integral de línea de *cualquier* campo de vectores continuos.

13 Definición Sea **F** un campo de vectores continuos definido en una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Entonces, la **integral de línea de F a lo largo de *C*** es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Cuando use la definición 13, tenga en mente que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ es solo una abreviación para el campo vectorial $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, así que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ se evalúa poniendo simplemente $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$ en la expresión para $\mathbf{F}(x, y, z)$. Nótese también que se puede escribir formalmente $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt$.

La figura 12 muestra el campo de fuerzas y la curva del ejemplo 7. El trabajo realizado es negativo porque el campo impide el movimiento a lo largo de la curva.

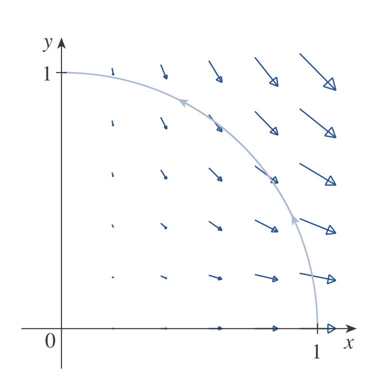


FIGURA 12

EJEMPLO 7 Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = x^2\, \mathbf{i} - xy\, \mathbf{j}$ para mover una partícula a lo largo del cuarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Como $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, se tiene

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\, \mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$$

y
$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j}$$

Por tanto, el trabajo realizado es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 2 \frac{\cos^3 t}{3} \bigg]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$ ■

NOTA Aunque $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ y las integrales con respecto a la longitud de arco no cambian cuando se invierte la orientación, de todas formas es cierto que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

porque el vector tangente unitario **T** es reemplazado por su negativo cuando C es reemplazada por $-C$.

La figura 13 muestra la cúbica torcida C del ejemplo 8 y algunos vectores típicos que actúan en tres puntos en C.

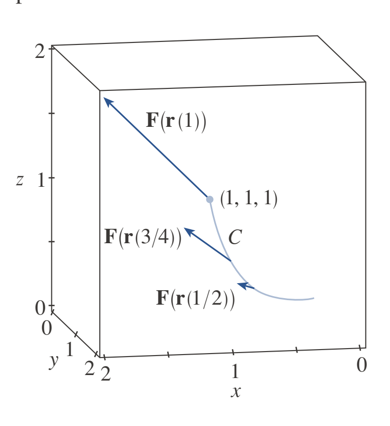


FIGURA 13

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\, \mathbf{i} + yz\, \mathbf{j} + zx\, \mathbf{k}$ y C es la cúbica torcida dada por

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

SOLUCIÓN Se tiene

$$\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + t^2\, \mathbf{j} + t^3\, \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j} + 3t^2\, \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\, \mathbf{i} + t^5\, \mathbf{j} + t^4\, \mathbf{k}$$

Así
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\, dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\Big]_0^1 = \frac{27}{28}$$ ■

Por último, advierta la relación entre integrales de línea de campos vectoriales e integrales de línea de campos escalares. Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ está dado en forma de componentes por la ecuación $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Se usa la definición 13 para calcular su integral de línea a lo largo de C:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$
$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot (x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k})\, dt$$
$$= \int_a^b \Big[P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\Big]\, dt$$

Pero esta última integral es precisamente la integral de línea en (10). Por tanto, se tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz \qquad \text{donde } \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

Por ejemplo, la integral $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$ en el ejemplo 6 podría expresarse como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

16.2 EJERCICIOS

1-16 Evalúe la integral de línea, donde C es la curva dada.

1. $\int_C y\, ds$, C: $x = t^2$, $y = 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 3$

2. $\int_C (x/y)\, ds$, C: $x = t^3$, $y = t^4$, $1 \leqslant t \leqslant 2$

3. $\int_C xy^4\, ds$, C es la mitad derecha del círculo $x^2 + y^2 = 16$

4. $\int_C xe^y\, ds$, C es el segmento de recta de (2, 0) a (5, 4)

5. $\int_C (x^2y + \operatorname{sen} x)\, dy$,
C es el arco de la parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (π, π^2)

6. $\int_C e^x\, dx$,
C es el arco de la curva $x = y^3$ de $(-1, -1)$ a (1, 1)

7. $\int_C (x + 2y)\, dx + x^2\, dy$, C consta de segmentos de recta de (0, 0) a (2, 1) y de (2, 1) a (3, 0)

8. $\int_C xe^y\, dx$,
C es el arco de la curva $x = e^y$ de (1, 0) a $(e, 1)$

9. $\int_C x^2 y\, ds$,
C: $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

10. $\int_C y^2 z\, ds$,
C es el segmento de recta de (3, 1, 2) a (1, 2, 5)

11. $\int_C xe^{yz}\, ds$,
C es el segmento de recta de (0, 0, 0) a (1, 2, 3)

12. $\int_C xyz^2\, ds$,
C es el segmento de recta de (–1, 5, 0) a (1, 6, 4)

13. $\int_C xye^{yz}\, dy$, C: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\int_C z\, dx + x\, dy + y\, dz$,
C: $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

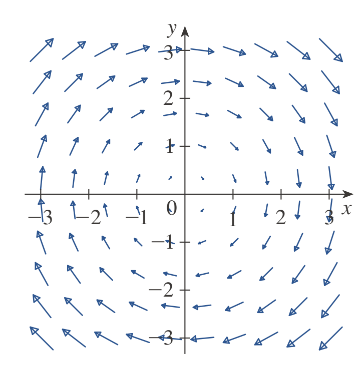
15. $\int_C z^2\, dx + x^2\, dy + y^2\, dz$,
C es el segmento de recta de (1, 0, 0) a (4, 1, 2)

16. $\int_C (y + z)\, dx + (x + z)\, dy + (x + y)\, dz$,
C consta de segmentos de recta de (0, 0, 0) a (1, 0, 1) y de (1, 0, 1) a (0, 1, 2)

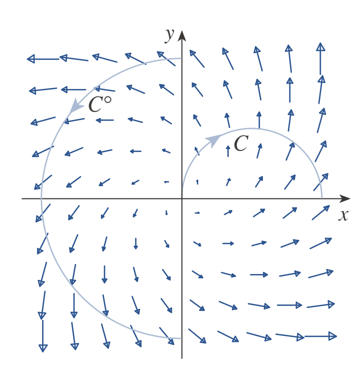
17. Sea **F** el campo vectorial que se muestra en la figura.

(a) Si C_1 es el segmento de recta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine si $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o cero.

(b) Si C_2 es el círculo orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj, con radio 3 y centro en el origen, determine si $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o cero.



18. La figura muestra un campo vectorial **F** y dos curvas C_1 y C_2. ¿Las integrales de línea de **F** sobre C_1 y C_2 son positivas, negativas o cero? Explique su respuesta.



19-22 Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (y + z)\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\,\mathbf{i} + (y - z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

23-26 Use una calculadora para evaluar la integral de línea con cuatro decimales.

23. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = \sqrt{x + y}\;\mathbf{i} + (y/x)\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t \cos t\,\mathbf{j}$, $\pi/6 \leqslant t \leqslant \pi/3$

24. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^x\,\mathbf{i} + zxe^y\,\mathbf{j} + xye^z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \tan t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

25. $\int_C xy \arctan z\, ds$, donde C tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $z = \sqrt{t}$, $1 \leqslant t \leqslant 2$

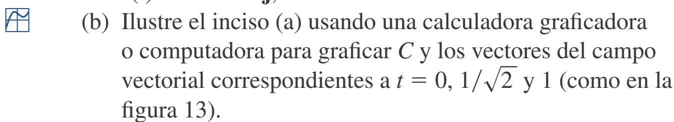
26. $\int_C z \ln(x + y)\, ds$, donde C tiene ecuaciones paramétricas $x = 1 + 3t$, $y = 2 + t^2$, $z = t^4$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$

SAC **27-28** Use una gráfica del campo vectorial **F** y la curva C para conjeturar si la integral de línea **F** en C es positiva, negativa o cero. Evalúe después la integral de línea.

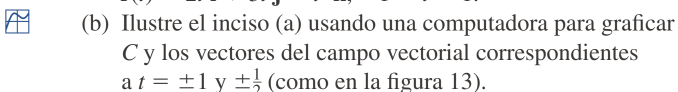
27. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$,
C es el arco del círculo $x^2 + y^2 = 4$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj de $(2, 0)$ a $(0, -2)$

28. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{j}$,
C es la parábola $y = 1 + x^2$ de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$

29. (a) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.


(b) Ilustre el inciso (a) usando una calculadora graficadora o computadora para graficar C y los vectores del campo vectorial correspondientes a $t = 0$, $1/\sqrt{2}$ y 1 (como en la figura 13).

30. (a) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.


(b) Ilustre el inciso (a) usando una computadora para graficar C y los vectores del campo vectorial correspondientes a $t = \pm 1$ y $\pm\frac{1}{2}$ (como en la figura 13).

SAC **31.** Determine el valor exacto de $\int_C x^3y^2z\, ds$, donde C es la curva con ecuaciones paramétricas $x = e^{-t}\cos 4t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} 4t$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

32. (a) Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ sobre una partícula que se mueve una vez alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para graficar el campo de fuerzas y el círculo en la misma pantalla. Use la gráfica para explicar su respuesta al inciso (a).

33. Un alambre delgado es doblado en forma de un semicírculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$. Si la densidad lineal es una constante k, halle la masa y centro de masa del alambre.

34. Un alambre delgado tiene la forma de la parte en el primer cuadrante del círculo, con centro en el origen y radio a. Si la función de densidad es $\rho(x, y) = kxy$, halle la masa y el centro de masa del alambre.

35. (a) Escriba las fórmulas similares a las ecuaciones 4 para el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un alambre delgado en forma de una curva en el espacio C si el alambre tiene una función de densidad $\rho(x, y, z)$.

(b) Halle el centro de masa de un alambre en forma de la hélice $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, si la densidad es una constante k.

36. Halle la masa y centro de masa de un alambre en forma de la hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ si la densidad en cualquier punto es igual al cuadrado de la distancia desde el origen.

37. Si un alambre con densidad lineal $\rho(x, y)$ se tiende a lo largo de una curva plana C, sus **momentos de inercia** alrededor de los ejes x y y se definen como

$$I_x = \int_C y^2\rho(x, y)\, ds \qquad I_y = \int_C x^2\rho(x, y)\, ds$$

Halle los momentos de inercia para el alambre del ejemplo 3.

38. Si un alambre con densidad lineal $\rho(x, y, z)$ se tiende a lo largo de una curva en el espacio C, sus **momentos de inercia** alrededor de los ejes x, y y z se definen como

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

Halle los momentos de inercia para el alambre del ejercicio 35.

39. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (y + 2)\,\mathbf{j}$$

para mover un objeto a lo largo de un arco del cicloide

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

40. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + ye^x\,\mathbf{j}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parábola $x = y^2 + 1$ de (1, 0) a (2, 1).

41. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x - y^2, y - z^2, z - x^2 \rangle$$

sobre una partícula que se mueve a lo largo del segmento de recta de (0, 0, 1) a (2, 1, 0).

42. La fuerza ejercida por una carga eléctrica en el origen sobre una partícula cargada en un punto (x, y, z) con vector de posición $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ es $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\,\mathbf{r}\,|^3$, donde K es una constante. (Véase el ejemplo 16.1.5.) Encuentre el trabajo realizado cuando la partícula se mueve a lo largo de una recta de (2, 0, 0) a (2, 1, 5).

43. La posición de un objeto con masa m en el momento t es $\mathbf{r}(t) = at^2\,\mathbf{i} + bt^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
(a) ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre el objeto en el momento t?
(b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza durante el intervalo de tiempo $0 \leqslant t \leqslant 1$?

44. Un objeto con masa m se mueve con una función de posición $\mathbf{r}(t) = a \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + b\cos t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Encuentre el trabajo realizado sobre el objeto durante este período.

45. Un hombre que pesa 160 lb sube una lata de pintura de 25 lb por una escalera de caracol que rodea un silo con un radio de 20 pies. Si el silo es de 90 pies de alto y el hombre hace exactamente tres revoluciones completas para llegar a la cima, ¿cuánto trabajo realiza contra la gravedad?

46. Suponga que hay un agujero en la lata de pintura del ejercicio 45 y que 9 lb de pintura se derraman constantemente de la lata durante el ascenso del hombre. ¿Cuánto trabajo se realiza?

47. (a) Demuestre que el valor del trabajo que un campo de fuerzas constante hace sobre una partícula que se mueve una vez de manera uniforme alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$ es cero.
(b) ¿Esto también es cierto para un campo de fuerzas $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, donde k es una constante y $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$?

48. La base de una cerca circular con radio 10 m está dada por $x = 10\cos t$, $y = 10 \operatorname{sen} t$. La altura de la cerca en la posición (x, y) está dada por la función $h(x, y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$, de manera que la altura varía de 3 m a 5 m. Suponga que 1 L de pintura cubre 100 m². Trace la cerca y determine cuánta pintura necesitará si pinta ambos lados de la cerca.

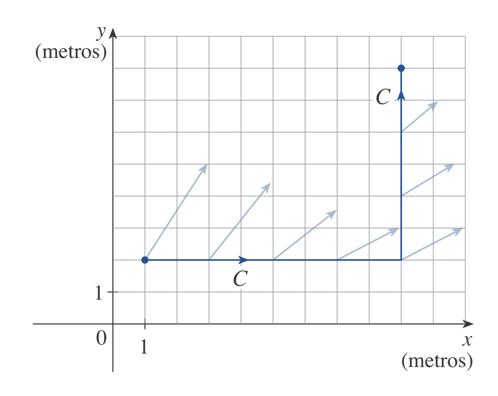
49. Si C es una curva suave dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ y $\mathbf{v}$ es un vector constante, demuestre que

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot [\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)]$$

50. Si C es una curva suave dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, demuestre que

$$\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\left[|\mathbf{r}(b)|^2 - |\mathbf{r}(a)|^2\right]$$

51. Un objeto se mueve a lo largo de la curva C que se muestra en la figura, de (1, 2) a (9, 8). Las longitudes de los vectores en el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ son medidas en newtons por las escalas en los ejes. Estime el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre el objeto



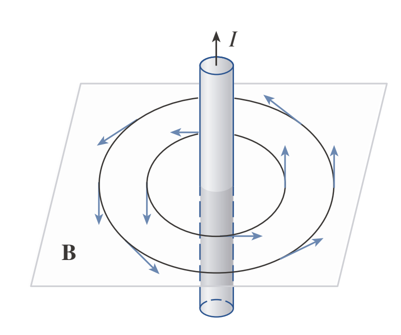
52. Experimentos demuestran que una corriente constante I en un alambre largo produce un campo magnético $\mathbf{B}$ que es tangente a cualquier círculo que resida en el plano perpendicular al alambre y cuyo centro es el eje del alambre

(como en la figura). La *ley de Ampère* relaciona la corriente eléctrica con sus efectos magnéticos y establece que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

donde I es la corriente neta que pasa por cualquier superficie acotada por una curva cerrada C y μ_0 es una constante llamada permeabilidad del espacio libre. Tomando C como un círculo con radio r, demuestre que la magnitud $B = |\mathbf{B}|$ del campo magnético a una distancia r del centro del alambre es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 El teorema fundamental para integrales de línea

Recuerde de la sección 5.3 que la parte 2 del teorema fundamental del cálculo puede escribirse como

1
$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F' es continua en $[a, b]$. También se llama a la ecuación 1 el teorema del cambio neto: la integral de una razón de cambio es el cambio neto.

Si se concibe al vector gradiente ∇f de una función f de dos o tres variables como un tipo de derivada de f, el teorema siguiente puede considerarse una versión del teorema fundamental para integrales de línea.

2 Teorema Sea C una curva suave dada por la función vectorial r(t), $a \leqslant t \leqslant b$. Sea f una función derivable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇f es continuo en C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

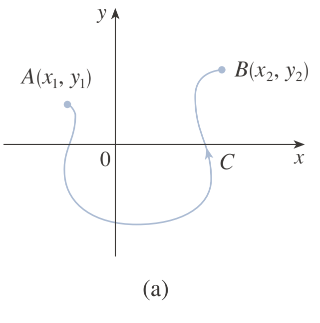
NOTA El teorema 2 establece que se puede evaluar la integral de línea de un campo vectorial conservativo (el campo vectorial gradiente de la función potencial f) simplemente conociendo el valor de f en los puntos extremos de C. De hecho, el teorema 2 indica que la integral de línea de ∇f es el cambio neto en f. Si f es una función de dos variables y C es una curva plana con punto inicial $A(x_1, y_1)$ y punto terminal $B(x_2, y_2)$, como en la figura 1(a), el teorema 2 se convierte en

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

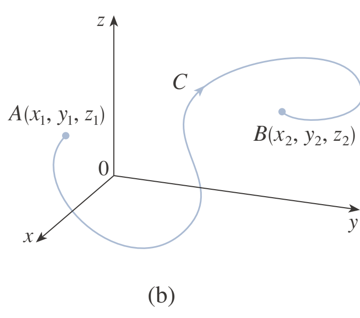
Si f es una función de tres variables y C es la curva en el espacio que une al punto $A(x_1, y_1, z_1)$ con el punto $B(x_2, y_2, z_2)$, como en la figura 1(b), se tiene

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Compruebe el teorema 2 para este caso.



(a)



(b)

FIGURA 1

COMPROBACIÓN DEL TEOREMA 2 Al usar la definición 16.2.13, se tiene

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt \qquad \text{(por la regla de la cadena)}$$

$$= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

El último paso se sigue del teorema fundamental del cálculo (ecuación 1). ■

Aunque se ha comprobado el teorema 2 para curvas suaves, también es cierto para curvas suaves por partes. Esto puede verse subdividiendo C en un número finito de curvas suaves y sumando las integrales resultantes.

EJEMPLO 1 Determine el trabajo realizado por el campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

para mover una partícula con masa m del punto (3, 4, 12) al punto (2, 2, 0) a lo largo de una curva suave por partes C. (Véase el ejemplo 16.1.4.)

SOLUCIÓN Por la sección 16.1 se sabe que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo y que, de hecho, $\mathbf{F} = \nabla f$, donde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Así, por el teorema 2, el trabajo realizado es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12)$$

$$= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)$$ ■

Independencia de la trayectoria

Suponga que C_1 y C_2 son dos curvas suaves por partes (llamadas **trayectorias**) que tienen el mismo punto inicial A y el mismo punto terminal B. Se sabe por el ejemplo 16.2.4 que, en general, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Pero una implicación del teorema 2 es que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

siempre que ∇f es continua. En otras palabras, la integral de línea de un campo vectorial *conservativo* solo depende del punto inicial y el punto terminal de una curva.

En general, si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo con dominio D, se dice que la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente de la trayectoria** si $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para cualesquiera dos trayectorias C_1 y C_2 en D que tengan los mismos puntos iniciales y los mismos puntos terminales. Con esta terminología se puede decir que las *integrales de línea de campos vectoriales conservativos son independientes de la trayectoria*.

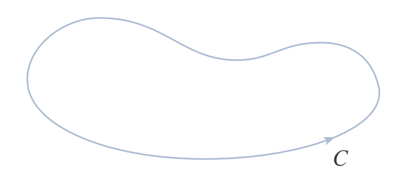


FIGURA 2
Una curva cerrada

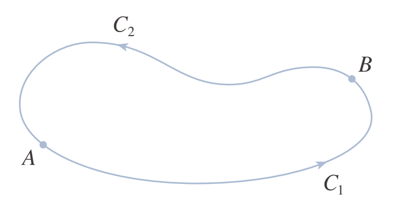


FIGURA 3

Una curva se llama **cerrada** si su punto terminal coincide con su punto inicial, es decir $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$. (Véase la figura 2.) Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D y C es cualquier trayectoria cerrada en D, se pueden elegir dos puntos cualesquiera A y B en C y considerar a C como compuesta por la trayectoria C_1 de A a B seguida por la trayectoria C_2 de B a A. (Véase la figura 3.) Así pues

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

ya que C_1 y C_2 tienen los mismos puntos inicial y terminal.

A la inversa, si es cierto que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ siempre que C es una trayectoria cerrada en D, se demuestra independencia de la trayectoria como sigue. Tome dos trayectorias cualesquiera C_1 y C_2 de A a B en D y defina C como la curva que consta de C_1 seguida por $-C_2$. Entonces

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y por tanto $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Se ha comprobado así el teorema siguiente.

3 Teorema $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D si y solo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada trayectoria cerrada C en D.

Como se sabe que la integral de línea de todo campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ es independiente de la trayectoria, de esto se sigue que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier trayectoria cerrada. La interpretación física es que el trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo (como el campo gravitacional o eléctrico de la sección 16.1), cuando mueve un objeto por una trayectoria cerrada, es de 0.

El teorema siguiente establece que los *únicos* campos vectoriales que son independientes de la trayectoria son los conservativos. Esto se enuncia y comprueba para curvas planas, pero existe una versión similar para curvas en el espacio. Suponga que D es **abierta**, lo que significa que para cada punto P en D hay un disco con centro P que reside enteramente en D. (Así, D no contiene ninguno de sus puntos frontera.) Además, suponga que D está **conectada**: esto significa que dos puntos cualesquiera en D pueden ser unidos por una trayectoria que resida en D.

4 Teorema Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo en una región abierta y conectada D. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo en D; es decir, existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

COMPROBACIÓN Sea $A(a, b)$ un punto fijo en D. Se construye la deseada función potencial f definiendo

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para cualquier punto (x, y) en D. Como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, no importa qué trayectoria C de (a, b) a (x, y) se use para evaluar $f(x, y)$. Dado que D es abierta, existe un disco contenido en D con centro (x, y). Elija cualquier punto (x_1, y) en el disco con $x_1 < x$ y conceda que C consta de cualquier trayectoria C_1 de (a, b) a (x_1, y) seguida por el segmento de recta horizontal C_2 de (x_1, y) a (x, y). (Véase la figura 4.) Entonces

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Nótese que la primera de estas integrales no depende de x, así que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

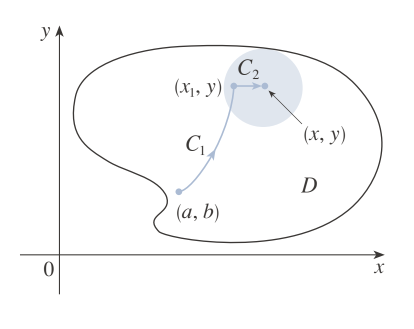
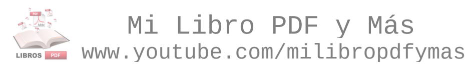


FIGURA 4



Si se escribe $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, entonces

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

En C_2, y es constante, así que $dy = 0$. Usando t como el parámetro, donde $x_1 \leqslant t \leqslant x$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} P(t, y)\,dt = P(x, y)$$

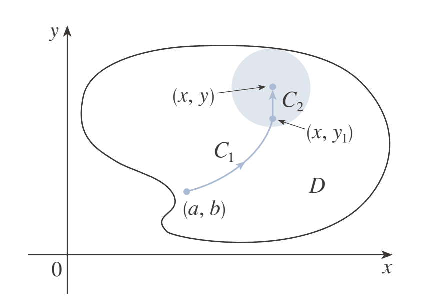


FIGURA 5

por la parte 1 del teorema fundamental del cálculo (véase la sección 5.3). Un argumento similar, usando un segmento de recta vertical (véase la figura 5), demuestra que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} Q(x, t)\,dt = Q(x, y)$$

Así
$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = \nabla f$$

lo que indica que $\mathbf{F}$ es conservativo. ■

La pregunta persiste: ¿cómo se puede determinar si un campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo o no? Suponga que se sabe que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ es conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces hay una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, es decir,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Por tanto, por el teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

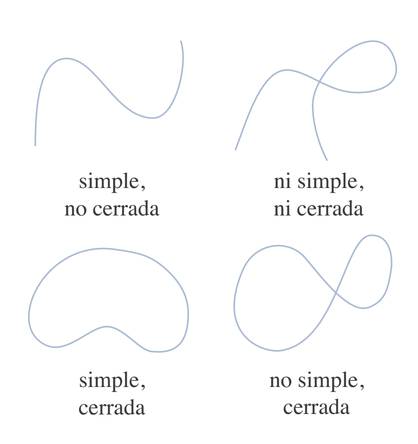


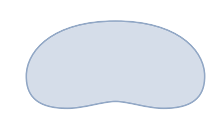
FIGURA 6
Tipos de curvas

5 Teorema Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden en un dominio D, entonces a todo lo largo de D se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

La contraparte del teorema 5 es cierta solo para un tipo especial de región. Para explicar esto, se necesita primero el concepto de **curva simple**, que es una curva que no interseca consigo misma entre sus puntos extremos. [Véase la figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para una curva cerrada simple, pero $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ cuando $a < t_1 < t_2 < b$.]

En el teorema 4 se necesita una región conectada abierta. Para el teorema siguiente se necesita una condición más enfática. Una **región simplemente conectada** en el plano es una región conectada D tal que cada curva cerrada simple en D encierre solo puntos que están en D. Adviértase en la figura 7 que, en términos intuitivos, una región simplemente conectada no contiene ningún agujero y no puede constar de dos piezas separadas.



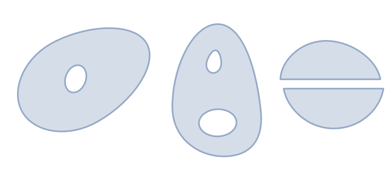


FIGURA 7

En términos de regiones simplemente conectadas, ahora se puede enunciar una recíproca parcial del teorema 5 que dé un método conveniente para verificar que un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es conservativo. La comprobación se esbozará en la sección siguiente como consecuencia del teorema de Green.

6 Teorema Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ un campo vectorial en una región abierta simplemente conectada D. Suponga que P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden y que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{a todo lo largo de } D$$

Entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

10
−10 10
C
−10

FIGURA 8

Las figuras 8 y 9 muestran los campos vectoriales de los ejemplos 2 y 3, respectivamente. Todos los vectores de la figura 8 que parten de la curva cerrada C parecen apuntar aproximadamente en la misma dirección que C. Así, parece como si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$, y por tanto $\mathbf{F}$ no es conservativo. El cálculo en el ejemplo 2 confirma esta impresión. Algunos de los vectores cerca de las curvas C_1 y C_2 en la figura 9 apuntan aproximadamente en la misma dirección que las curvas, mientras que otros apuntan en la dirección opuesta. Así, parece verosímil que las integrales de línea alrededor de todas las trayectorias cerradas sean de 0. El ejemplo 3 muestra que $\mathbf{F}$ es, en efecto, conservativo.

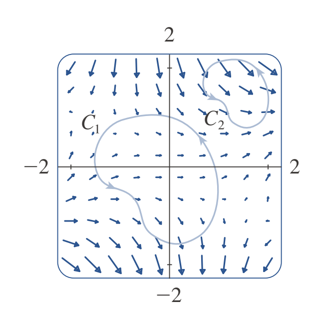


FIGURA 9

EJEMPLO 2 Determine si el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}$$

es conservativo o no.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y) = x - y$ y $Q(x, y) = x - 2$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, $\mathbf{F}$ no es conservativo por el teorema 5. ■

EJEMPLO 3 Determine si el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

es conservativo o no.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y) = 3 + 2xy$ y $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Asimismo, el dominio de $\mathbf{F}$ es el plano entero ($D = \mathbb{R}^2$), el cual es abierto y simplemente conectado. En consecuencia, se puede aplicar el teorema 6 y concluir que $\mathbf{F}$ es conservativo. ■

En el ejemplo 3, el teorema 6 indicó que $\mathbf{F}$ es conservativo, pero no cómo determinar la función (potencial) f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. La comprobación del teorema 4 da una pista de cómo determinar f. Use la "integración parcial", como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4
(a) Si $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, halle una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
(b) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

SOLUCIÓN
(a) Por el ejemplo 3 se sabe que $\mathbf{F}$ es conservativo, y por tanto existe una función f con $\nabla f = \mathbf{F}$, es decir,

7 $$f_x(x, y) = 3 + 2xy$$

8 $$f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Al integrar (7) con respecto a x, se obtiene

9 $$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Nótese que la constante de integración es una constante con respecto a x, es decir una función de y, que se ha llamado $g(y)$. Ahora se diferencian ambos miembros de (9) con respecto a y:

10 $$f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Al comparar (8) y (10) se ve que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando con respecto a y, se tiene

$$g(y) = -y^3 + K$$

donde K es una constante. Al poner esto en (9) se tiene

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

como la función potencial deseada.

(b) Para usar el teorema 2, todo lo que se debe saber son los puntos inicial y terminal de C, es decir $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ y $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$. En la expresión para $f(x, y)$ en la parte (a), cualquier valor de la constante K servirá, así que se elige $K = 0$. Entonces se tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Este método es mucho más corto que el método directo para evaluar integrales de línea que se aprendió en la sección 16.2. ■

Un criterio para determinar si un campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ es conservativo o no se dará en la sección 16.5. Mientras tanto, el ejemplo siguiente muestra que la técnica para determinar la función potencial es casi la misma que para campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\,\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\,\mathbf{j} + 3ye^{3z}\,\mathbf{k}$, determine una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

SOLUCIÓN Si esa función f existe, entonces

11 $$f_x(x, y, z) = y^2$$

12 $$f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$$

13 $$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}$$

Al integrar (11) con respecto a x, se obtiene

14 $$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$$

donde $g(y, z)$ es una constante con respecto a x. Entonces, derivando (14) con respecto a y se tiene

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

y la comparación con (12) da

$$g_y(y, z) = ye^{3z}$$

Así $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ y se reescribe (14) como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Por último, al derivar con respecto a z y comparar con (13) se obtiene $h'(z) = 0$, y por tanto $h(z) = K$, una constante. La función deseada es

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

Es fácil verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$. ■

Conservación de energía

Aplique las ideas de este capítulo a un campo de fuerzas continuo **F** que mueve un objeto a lo largo de una trayectoria C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, donde $\mathbf{r}(a) = A$ es el punto inicial y $\mathbf{r}(b) = B$ el punto terminal de C. De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton (véase la sección 13.4), la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ en un punto en C se relaciona con la aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ por la ecuación

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Así, el trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]\, dt \qquad \text{(teorema 13.2.3, fórmula 4)}$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2\, dt = \frac{m}{2} \Big[|\mathbf{r}'(t)|^2\Big]_a^b \qquad \text{(teorema fundamental del cálculo)}$$

$$= \frac{m}{2} \left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2\right)$$

Por consiguiente

15 $$W = \tfrac{1}{2}m\, |\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2}m\, |\mathbf{v}(a)|^2$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ es la velocidad.

La cantidad $\frac{1}{2}m\, |\mathbf{v}(t)|^2$, es decir la mitad de la masa multiplicada por el cuadrado de la rapidez, se llama **energía cinética** del objeto. En consecuencia, se puede reescribir la ecuación 15 como

16 $$W = K(B) - K(A)$$

lo que indica que el trabajo realizado por el campo de fuerzas a lo largo de C es igual al cambio en energía cinética en los puntos extremos de C.

Suponga ahora, además, que **F** es un campo de fuerzas conservativo; es decir, que se puede escribir $\mathbf{F} = \nabla f$. En física, la **energía potencial** de un objeto en el punto (x, y, z) se define como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, así que se tiene $\mathbf{F} = -\nabla P$. Entonces, por el teorema 2 se tiene

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

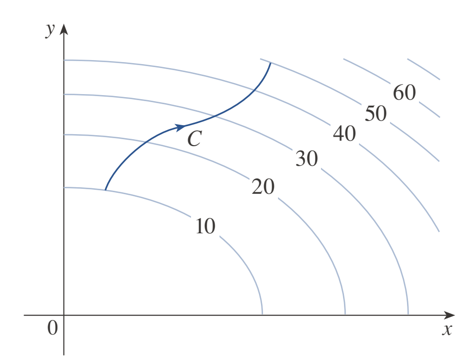
Al comparar esta ecuación con la ecuación 16, se ve que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

lo que indica que si un objeto se mueve de un punto A a otro punto B bajo la influencia de un campo de fuerzas conservativo, la suma de su energía potencial y su energía cinética permanece constante. Esto se llama **ley de conservación de la energía** y es la razón de que al campo vectorial se le llame *conservativo*.

16.3 EJERCICIOS

1. La figura muestra una curva C y un mapa de contorno de una función f cuyo gradiente es continuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. Se da una tabla de valores de una función f con gradiente continuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, donde C tiene ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 + 1 \qquad y = t^3 + t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

x \ y	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3-10 Determine si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo o no. Si lo es, halle una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (xy + y^2)\,\mathbf{i} + (x^2 + 2xy)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2x)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = y^2e^{xy}\,\mathbf{i} + (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = ye^x\,\mathbf{i} + (e^x + e^y)\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\,\mathbf{i} + (4xy + 3)\,\mathbf{j}$

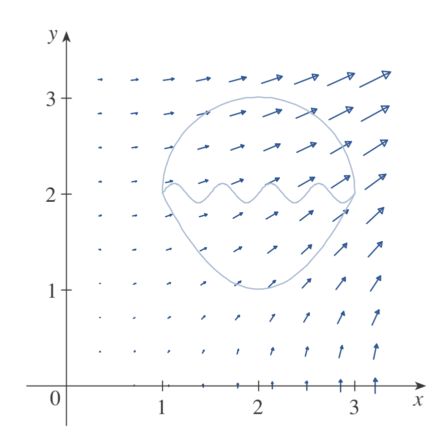
9. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2\cos x + \cos y)\,\mathbf{i} + (2y\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen} y)\,\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + y/x)\,\mathbf{i} + (\ln x + x/y)\,\mathbf{j}$

11. La figura muestra el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2\rangle$ y tres curvas que parten de (1, 2) y terminan en (3, 2).

(a) Explique por qué $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tiene el mismo valor para las tres curvas.

(b) ¿Cuál es ese valor común?



12-18 (a) Determine una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ y (b) use el inciso (a) para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy^2)\,\mathbf{i} + 2x^2y\,\mathbf{j}$,
C es el arco de la hipérbola $y = 1/x$ de (1, 1) a $(4, \frac{1}{4})$

13. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y^3\,\mathbf{i} + x^3y^2\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 - 2t, t^3 + 2t\rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$,
C es el arco de la parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$,
C es el segmento de recta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 z + 2xz^2)\,\mathbf{i} + 2xyz\,\mathbf{j} + (xy^2 + 2x^2 z)\,\mathbf{k}$,
C: $x = \sqrt{t}$, $y = t + 1$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xz}\,\mathbf{i} + e^{xz}\,\mathbf{j} + xye^{xz}\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{k}$,
$0 \leqslant t \leqslant 2$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (x\cos y + \cos z)\,\mathbf{j} - y \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

19-20 Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe la integral.

19. $\int_C \tan y\,dx + x\sec^2 y\,dy$,
C es cualquier trayectoria de $(1, 0)$ a $(2, \pi/4)$

20. $\int_C (1 - ye^{-x})\,dx + e^{-x}\,dy$,
C es cualquier trayectoria de $(0, 1)$ a $(1, 2)$

---

21. Suponga que se le pide determinar la curva que requiere el menor esfuerzo para que un campo de fuerzas **F** mueva una partícula de un punto a otro. Usted decide verificar primero si **F** es conservativo, y resulta que sí lo es. ¿Cómo respondería a esa petición?

22. Suponga que un experimento determina que la cantidad de trabajo requerido para que un campo de fuerzas **F** mueva una partícula del punto $(1, 2)$ al punto $(5, -3)$ a lo largo de una curva C_1 es 1.2 J, y que el trabajo realizado por **F** para mover la partícula a lo largo de otra curva C_2 entre los mismos dos puntos es 1.4 J. ¿Qué puede decir de **F**? ¿Por qué?

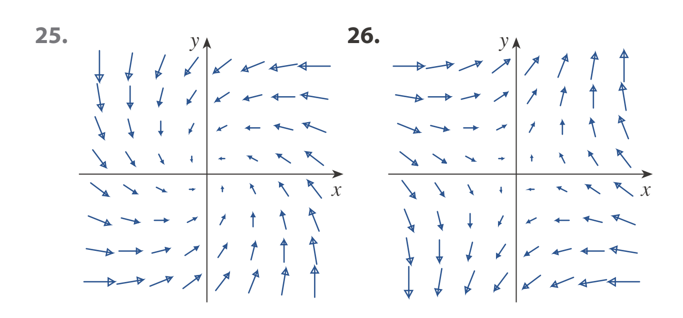
23-24 Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas **F** para mover un objeto de P a Q.

23. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j}$; $P(1, 0)$, $Q(2, 2)$

24. $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$; $P(1, 1)$, $Q(4, 3)$

25-26 ¿El campo vectorial que se muestra en la figura es conservativo? Explique su respuesta.

25. **26.**



SAC **27.** Si $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (1 + x\cos y)\,\mathbf{j}$, use un diagrama para conjeturar si **F** es conservativo. Determine después si su conjetura es correcta.

28. Sea $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Halle curvas C_1 y C_2 que no sean cerradas y que satisfagan la ecuación.

(a) $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ (b) $\displaystyle\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 1$

29. Demuestre que si el campo vectorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es conservativo y P, Q, R tienen derivadas parciales continuas de primer orden, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

30. Use el ejercicio 29 para demostrar que la integral de línea $\int_C y\,dx + x\,dy + xyz\,dz$ no es independiente de la trayectoria.

31-34 Determine si el conjunto dado es o no (a) abierto, (b) conectado y (c) simplemente conectado.

31. $\{(x, y) \mid y < x^2\}$ **32.** $\{(x, y) \mid x + y \neq 1\}$

33. $\{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y < 1\}$

34. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$

---

35. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Demuestre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.
(b) Demuestre que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ no es independiente de la trayectoria. [*Sugerencia*: calcule $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ y $\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde C_1 y C_2 son las mitades superior e inferior del círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] ¿Esto contradice el teorema 6?

36. (a) Suponga que **F** es un campo de fuerzas cuadrado inverso, es decir,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguna constante c, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine el trabajo realizado por **F** para mover un objeto de un punto P_1 a lo largo de una trayectoria a un punto P_2 en términos de las distancias d_1 y d_2 desde estos puntos al origen.

(b) Un ejemplo de un campo cuadrado inverso es el campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, explicado en el ejemplo 16.1.4. Use el inciso (a) para hallar el trabajo realizado por el campo gravitacional cuando la Tierra se mueve del afelio (en una distancia máxima de 1.52×10^8 km desde el sol) al perihelio (en una distancia mínima de 1.47×10^8 km). (Use los valores $m = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg y $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg².)

(c) Otro ejemplo de un campo cuadrado inverso es el campo de fuerzas eléctricas $\mathbf{F} = \varepsilon qQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, explicado en el ejemplo 16.1.5. Suponga que un electrón con una carga de -1.6×10^{-19} C se localiza en el origen. Una unidad de carga positiva está posicionada a una distancia de 10^{-12} m del electrón y se mueve a una posición a la mitad de esa distancia del electrón. Use el inciso (a) para determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas eléctricas. (Use el valor $\varepsilon = 8.985 \times 10^9$.)

16.4 Teorema de Green

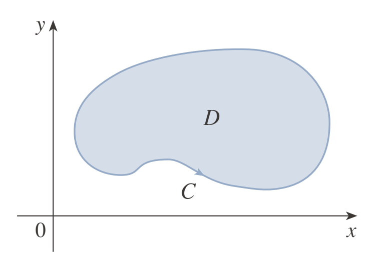


FIGURA 1

El teorema de Green da la relación entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple C y una integral doble en la región plana D acotada por C. (Véase la figura 1. Suponga que D consta de todos los puntos dentro de C, así como de todos los puntos en C.) Al enunciar el teorema de Green se usa la convención de que la **orientación positiva** de una curva cerrada simple C se refiere a un recorrido simple *en sentido contrario a las manecillas del reloj* de C. Así, si C está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, entonces la región D siempre está a la izquierda cuando el punto $\mathbf{r}(t)$ viaja a lo largo de C. (Véase la figura 2.)

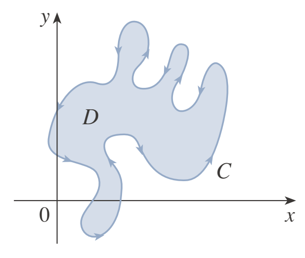


FIGURA 2 (a) Orientación positiva (b) Orientación negativa

> **Teorema de Green** Sea C una curva cerrada simple con orientación positiva y suave por partes en el plano y sea D la región acotada por C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene D, entonces
>
> $$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Recuerde que el miembro izquierdo de esta ecuación es otra manera de escribir $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$.

NOTA La notación

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \qquad \text{o} \qquad \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

se utiliza a veces para indicar que la integral de línea se calcula usando la orientación positiva de la curva cerrada C. Otra notación para la curva frontera con orientación positiva de D es ∂D, así que la ecuación en el teorema de Green puede escribirse como

1 $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

El teorema de Green debería considerarse la contraparte del teorema fundamental del cálculo para las integrales dobles. Compare la ecuación 1 con el enunciado del teorema fundamental del cálculo, parte 2, en la ecuación siguiente:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En ambos casos hay una integral que implica derivadas (F', $\partial Q/\partial x$ y $\partial P/\partial y$) en el miembro izquierdo de la ecuación. Y en ambos casos el miembro derecho implica los valores de las funciones originales (F, Q y P) solo en la *frontera* del dominio. (En el caso unidimensional, el dominio es un intervalo $[a, b]$ cuya frontera consta de solo dos puntos, a y b.)

El teorema de Green no es fácil de comprobar en general, pero se puede dar una comprobación para el caso especial en el que la región es tanto tipo I como tipo II (véase la sección 15.2). Llámese a esas regiones como **regiones simples**.

> **George Green**
> El teorema de Green debe su nombre al científico autodidacta inglés George Green (1793-1841). Green trabajó de tiempo completo en la panadería de su padre desde los nueve años y aprendió matemáticas por sí solo usando libros de bibliotecas. En 1828 publicó privadamente *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, pero solo se imprimieron 100 ejemplares, la mayoría de los cuales fueron para sus amigos. Este folleto contenía un teorema equivalente al que ahora se conoce como teorema de Green, pero no fue ampliamente conocido en esa época. Finalmente, a los 40 años, Green ingresó a la Universidad de Cambridge como estudiante, pero murió cuatro años después de graduarse. En 1846 William Thomson (Lord Kelvin) halló una copia del ensayo de Green, comprendió su importancia y lo hizo reimprimir. Green fue el primero en tratar de formular una teoría matemática de la electricidad y el magnetismo. Su trabajo fue la base para las subsecuentes teorías electromagnéticas de Thomson, Stokes, Rayleigh y Maxwell.

COMPROBACIÓN DEL TEOREMA DE GREEN PARA EL CASO EN EL QUE D ES UNA REGIÓN SIMPLE Nótese que el teorema de Green se comprueba si se puede demostrar que

$$\boxed{2} \qquad \int_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

y

$$\boxed{3} \qquad \int_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$$

Compruebe la ecuación 2 expresando D como una región tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son funciones continuas. Esto permite calcular la integral doble en el miembro derecho de la ecuación 2 como sigue:

$$\boxed{4} \qquad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\,dx$$

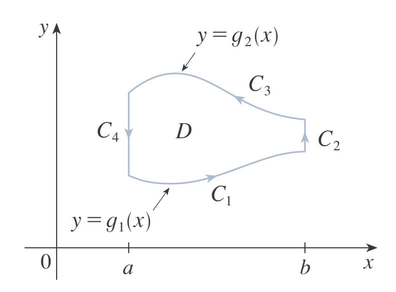


FIGURA 3

donde el último paso se sigue del teorema fundamental del cálculo.

Ahora se calcula el miembro izquierdo de la ecuación 2 descomponiendo C como la unión de las cuatro curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 que se muestran en la figura 3. En C_1 se toma x como el parámetro y se escriben las ecuaciones paramétricas como $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Así

$$\int_{C_1} P(x, y)\,dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx$$

Obsérvese que C_3 va de derecha a izquierda, pero $-C_3$ va de izquierda a derecha, así que se pueden escribir las ecuaciones paramétricas de $-C_3$ como $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Por tanto

$$\int_{C_3} P(x, y)\,dx = -\int_{-C_3} P(x, y)\,dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$$

En C_2 o C_4 (cualquiera de las cuales podría reducirse a un solo punto), x es constante, así que $dx = 0$ y

$$\int_{C_2} P(x, y)\,dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y)\,dx$$

De ahí que

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_{C_1} P(x, y)\,dx + \int_{C_2} P(x, y)\,dx + \int_{C_3} P(x, y)\,dx + \int_{C_4} P(x, y)\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$$

Al comparar esta expresión con la de la ecuación 4 se ve que

$$\int_C P(x, y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

La ecuación 3 puede comprobarse de la misma manera, expresando D como una región tipo II (véase el ejercicio 30). Luego, añadiendo las ecuaciones 2 y 3, se obtiene el teorema de Green. ■

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, donde C es la curva triangular que consta de los segmentos de recta de (0, 0) a (1, 0), de (1, 0) a (0, 1) y de (0, 1) a (0, 0).

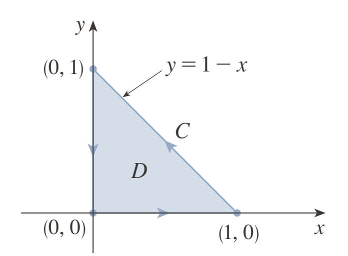


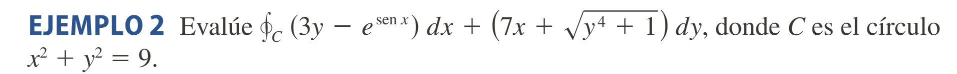
FIGURA 4

SOLUCIÓN Aunque la integral de línea dada podría evaluarse, como de costumbre, por los métodos de la sección 16.2, eso implicaría establecer tres integrales aparte a lo largo de los tres lados del triángulo, así que use en cambio el teorema de Green. Nótese que la región D encerrada por C es simple y que C tiene orientación positiva (véase la figura 4). Si se concede que $P(x, y) = x^4$ y $Q(x, y) = xy$, se tiene

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$ ■



EJEMPLO 2 Evalúe $\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUCIÓN La región D acotada por C es el disco $x^2 + y^2 \leq 9$, así que cambie a coordenadas polares después de aplicar el teorema de Green:

En vez de usar coordenadas polares, se podría simplemente usar el hecho de que D es un disco de radio 3 y escribir

$$\iint_D 4\,dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

$$\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(3y - e^{\operatorname{sen} x})\right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3)\,r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\,dr = 36\pi$$ ■

En los ejemplos 1 y 2 se determina que la integral doble era más fácil de evaluar que la integral de línea. (¡Intente establecer la integral de línea del ejemplo 2 y se convencerá!) Pero a veces es más fácil evaluar la integral de línea, y el teorema de Green se usa en la dirección inversa. Por ejemplo, si se sabe que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ en la curva C, el teorema de Green da

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

sin importar qué valores adopten P y Q en la región D.

Otra aplicación de la dirección inversa del teorema de Green es al calcular áreas. Como el área de D es $\iint_D 1\,dA$, se desea elegir P y Q de tal manera que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$



Hay varias posibilidades:

$$P(x, y) = 0 \qquad P(x, y) = -y \qquad P(x, y) = -\tfrac{1}{2}y$$

$$Q(x, y) = x \qquad Q(x, y) = 0 \qquad Q(x, y) = \tfrac{1}{2}x$$

El teorema de Green da entonces las fórmulas siguientes para el área de D:

5
$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

EJEMPLO 3 Determine el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUCIÓN La elipse tiene ecuaciones paramétricas $x = a\cos t$ y $y = b\,\text{sen}\,t$, donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Al usar la tercera fórmula de la ecuación 5, se tiene

$$A = \tfrac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t)\,dt$$
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

■

La fórmula 5 puede usarse para explicar cómo funcionan los planímetros. Un **planímetro** es un instrumento mecánico que sirve para medir el área de una región trazando su curva frontera. Estos dispositivos son útiles en todas las ciencias: en biología para medir el área de hojas o alas, en medicina para medir el tamaño de secciones transversales de órganos o tumores, en ingeniería forestal para estimar el tamaño de regiones arboladas a partir de fotografías.

La figura 5 muestra la operación de un planímetro polar: el polo está fijo y cuando el trazador se mueve a lo largo de la curva frontera de la región, la rueda se desliza en parte y gira en parte en posición perpendicular al brazo del trazador. El planímetro mide la distancia en que la rueda gira, la cual es proporcional al área de la región encerrada. La explicación como consecuencia de la fórmula 5 puede encontrarse en los artículos siguientes:

- R. W. Gatterman, "The planimeter as an example of Green's Theorem", *Amer. Math. Monthly*, vol. 88 (1981), pp. 701-704.
- Tanya Leise, "As the planimeter wheel turns", *College Math. Journal*, vol. 38 (2007), pp. 24-31.

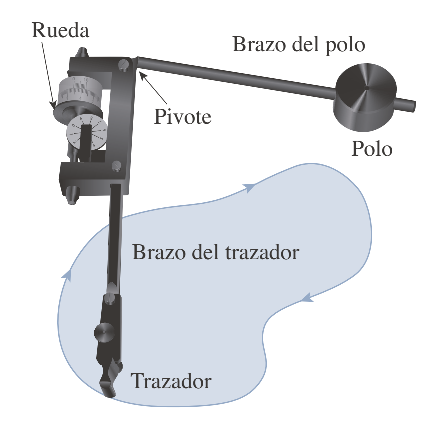


FIGURA 5
Un planímetro polar de Keuffel y Esser

Versiones ampliadas del teorema de Green

Aunque se ha demostrado el teorema de Green solo para el caso en el que D es simple, ahora puede ampliarse al caso en el que D es una unión finita de regiones simples. Por ejemplo, si D es la región que aparece en la figura 6, se puede escribir $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son ambas simples. La frontera de D_1 es $C_1 \cup C_3$ y la frontera de D_2 es $C_2 \cup (-C_3)$, así que, aplicando el teorema de Green a D_1 y D_2 por separado, se obtiene

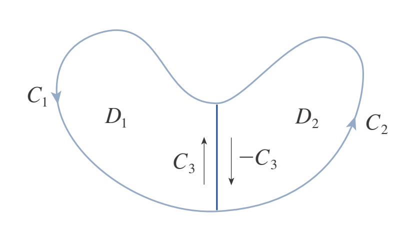


FIGURA 6

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$



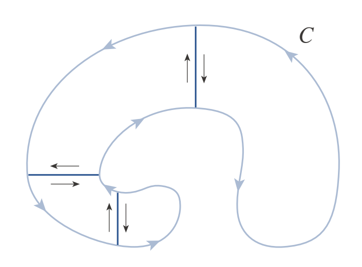


FIGURA 7

Si se suman estas dos ecuaciones, las integrales de línea a lo largo de C_3 y $-C_3$ se eliminan, así que se obtiene

$$\int_{C_1 \cup C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

lo cual es el teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$, ya que su frontera es $C = C_1 \cup C_2$.

El mismo tipo de argumento permite establecer el teorema de Green para cualquier unión finita de regiones simples no sobrepuestas (véase la figura 7).

EJEMPLO 4 Evalúe $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, donde C es la frontera de la región semianular D en el semiplano superior entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

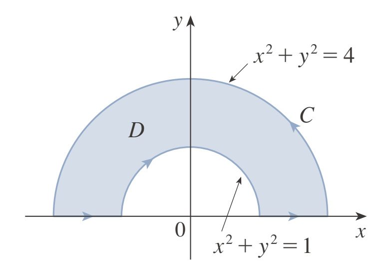


FIGURA 8

SOLUCIÓN Nótese que aunque D no es simple, el eje y la divide en dos regiones simples (véase la figura 8). En coordenadas polares se puede escribir

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

Por tanto, el teorema de Green da

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA$$

$$= \iint_D y\,dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = \Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi \Big[\tfrac{1}{3}r^3\Big]_1^2 = \frac{14}{3}$$ ■

El teorema de Green puede prolongarse para aplicarse a regiones con agujeros, es decir regiones que no están simplemente conectadas. Observe que la frontera C de la región D en la figura 9 consta de dos curvas simples cerradas C_1 y C_2. Suponga que estas curvas frontera están orientadas de tal forma que la región D siempre está a la izquierda cuando se recorre la curva C. Así, la dirección positiva es en sentido contrario a las manecillas del reloj para la curva externa C_1, pero en el sentido de las manecillas del reloj para la curva interna C_2. Si se divide D en dos regiones D' y D'' por medio de las líneas que se muestran en la figura 10 y luego se aplica el teorema de Green tanto a D' como a D'', se obtiene

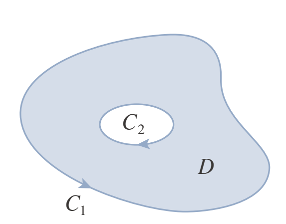


FIGURA 9

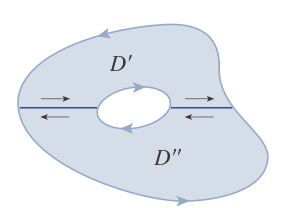


FIGURA 10

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \int_{\partial D'} P\,dx + Q\,dy + \int_{\partial D''} P\,dx + Q\,dy$$

Como las integrales de línea a lo largo de las rectas frontera comunes están en direcciones opuestas, se eliminan y se obtiene

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

el cual es el teorema de Green para la región D.

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, demuestre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para cada trayectoria cerrada simple con orientación positiva que encierra al origen.

SOLUCIÓN Como C es una trayectoria cerrada *arbitraria* que encierra al origen, es difícil calcular directamente la integral dada. Así, considere un círculo C' orientado

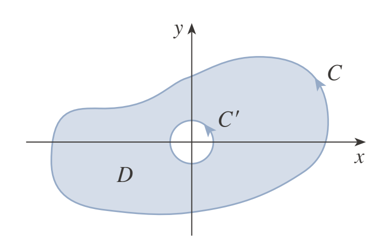


FIGURA 11

en sentido contrario a las manecillas del reloj con centro en el origen y radio a, donde a se elige lo suficientemente reducido para que C' resida dentro de C. (Véase la figura 11.) Sea D la región acotada por C y C'. Entonces, su frontera en orientación positiva es $C \cup (-C')$, así que la versión general del teorema de Green da

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0$$

Por tanto
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy$$

es decir,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Ahora calcule fácilmente esta última integral usando la parametrización dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Así

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$ ■

Se concluye esta sección usando el teorema de Green para examinar un resultado que fue enunciado en la sección precedente.

ESBOZO DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 16.3.6 Suponga que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ es un campo vectorial en una región abierta simplemente conectada D, que P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden y que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{a todo lo largo de } D$$

Si C es cualquier trayectoria cerrada simple en D y R es la región que C encierra, el teorema de Green da

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0\, dA = 0$$

Una curva que no es simple se cruza a sí misma en uno o más puntos y puede dividirse en varias curvas simples. Se ha demostrado que las integrales de línea de $\mathbf{F}$ alrededor de estas curvas simples son todas ellas de 0 y sumando estas integrales se ve que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier curva cerrada C. En consecuencia, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D por el teorema 16.3.3. De esto se sigue que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo. ■

16.4 EJERCICIOS

1-4 Evalúe la integral de línea por dos métodos: (a) directamente y (b) usando el teorema de Green.

1. $\oint_C y^2\,dx + x^2 y\,dy$,
   C es el rectángulo con vértices (0, 0), (5, 0), (5, 4) y (0, 4)

2. $\oint_C y\,dx - x\,dy$,
   C es el círculo con centro en el origen y radio 4

3. $\oint_C xy\,dx + x^2 y^3\,dy$,
   C es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 2)



4. $\oint_C x^2y^2\,dx + xy\,dy$, C consta del arco de la parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) y de los segmentos de recta de (1, 1) a (0, 1) y de (0, 1) a (0, 0)

5-10 Use el teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva con orientación positiva dada.

5. $\int_C ye^x\,dx + 2e^x\,dy$,
C es el rectángulo con vértices (0, 0), (3, 0), (3, 4) y (0, 4)

6. $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$,
C es el triángulo con vértices (0, 0), (2, 1) y (0, 1)

7. $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$,
C es la frontera de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$

8. $\int_C \cos y\,dx + x^2 \operatorname{sen} y\,dy$,
C es el rectángulo con vértices (0, 0), (5, 0), (5, 2) y (0, 2)

9. $\int_C y^3\,dx - x^3\,dy$, C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$

10. $\int_C xe^{-2x}\,dx + (x^4 + 2x^2y^2)\,dy$, C es la frontera de la región entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$

11-14 Use el teorema de Green para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Verifique la orientación de la curva antes de aplicar el teorema.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y \cos x - xy \operatorname{sen} x,\ xy + x \cos x \rangle$,
C es el triángulo de (0, 0) a (0, 4) a (2, 0) a (0, 0)

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^{-x} + y^2,\ e^{-y} + x^2 \rangle$,
C consta del arco de la curva $y = \cos x$ de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ y del segmento de recta de $(\pi/2, 0)$ a $(-\pi/2, 0)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y,\ x \operatorname{sen} y \rangle$,
C es el círculo $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ orientado en el sentido de las manecillas del reloj

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x^2 + 1},\ \tan^{-1} x \rangle$, C es el triángulo de (0, 0) a (1, 1) a (0, 1) a (0, 0)

SAC **15-16** Verifique el teorema de Green usando un sistema algebraico computacional para evaluar tanto la integral de línea como la integral doble.

15. $P(x, y) = x^3y^4$, $\quad Q(x, y) = x^5y^4$
C consta del segmento de recta de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ seguido por el arco de la curva $y = \cos x$ de $(\pi/2, 0)$ a $(-\pi/2, 0)$

16. $P(x, y) = 2x - x^3y^5$, $\quad Q(x, y) = x^3y^8$,
C es la elipse $4x^2 + y^2 = 4$

17. Use el teorema de Green para determinar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$ para mover una partícula del origen a lo largo del eje x hacia (1, 0), después a lo largo del segmento de recta hacia (0, 1), y luego de regreso al origen a lo largo del eje y.

18. Una partícula parte del origen, se mueve a lo largo del eje x hasta (5, 0), luego a lo largo del cuarto de círculo $x^2 + y^2 = 25$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ hasta el punto (0, 5) y después por el eje y de vuelta al origen. Use el teorema de Green para hallar el trabajo realizado sobre esta partícula por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = \langle \operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} y + xy^2 + \frac{1}{3}x^3 \rangle$.

19. Use una de las fórmulas en (5) para determinar el área bajo un arco del cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.

20. Si un círculo C con radio 1 rueda a lo largo de la parte exterior del círculo $x^2 + y^2 = 16$, un punto fijo P en C traza una curva llamada *epicicloide*, con ecuaciones paramétricas $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t$. Grafique el epicicloide y use (5) para determinar el área que encierra.

21. (a) Si C es el segmento de recta que une el punto (x_1, y_1) con el punto (x_2, y_2), demuestre que

$$\int_C x\,dy - y\,dx = x_1y_2 - x_2y_1$$

(b) Si los vértices de un polígono, en sentido contrario a las manecillas del reloj, son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, demuestre que el área del polígono es

$$A = \tfrac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)]$$

(c) Determine el área del pentágono con vértices (0, 0), (2, 1), (1, 3), (0, 2) y (–1, 1).

22. Sea D una región acotada por una trayectoria cerrada simple C en el plano xy. Use el teorema de Green para comprobar que las coordenadas del centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de D son

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

donde A es el área de D.

23. Use el ejercicio 22 para determinar el centroide de una región de un cuarto de círculo de radio a.

24. Use el ejercicio 22 para determinar el centroide del triángulo con vértices (0, 0), $(a, 0)$ y (a, b), donde $a > 0$ y $b > 0$.

25. Una lámina plana con densidad constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa una región en el plano xy acotada por una trayectoria cerrada simple C. Demuestre que sus momentos de inercia alrededor de los ejes son

$$I_x = -\frac{\rho}{3}\oint_C y^3\,dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3}\oint_C x^3\,dy$$

26. Use el ejercicio 25 para determinar el momento de inercia de un disco circular de radio a con densidad constante ρ alrededor de un diámetro. (Compare con el ejemplo 15.4.4.)

27. Use el método del ejemplo 5 para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2xy\,\mathbf{i} + (y^2 - x^2)\,\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$$

y C es cualquier curva cerrada simple con orientación positiva que encierra al origen.

28. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = (2x^2 + 3y,\ 7x + y^3)$ y C es la curva frontera con orientación positiva de una región D que tiene área 5.

29. Si $\mathbf{F}$ es el campo vectorial del ejemplo 5, demuestre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las trayectorias cerradas simples que no pasan por ni encierran el origen.

30. Complete la comprobación del caso especial del teorema de Green comprobando la ecuación 3.

31. Use el teorema de Green para comprobar la fórmula de cambio de variables para una integral doble (fórmula 15.9.9) para el caso en que $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx\,dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv$$

Aquí R es la región en el plano xy que corresponde a la región S en el plano uv bajo la transformación dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$.

[*Sugerencia*: Nótese que el miembro izquierdo es $A(R)$ y aplique la primera parte de la ecuación 5. Convierta la integral de línea en ∂R a una integral de línea en ∂S y aplique el teorema de Green en el plano uv.]

16.5 Rotacional y divergencia

En esta sección se definirán dos operaciones que pueden realizarse en campos vectoriales y que desempeñan un papel básico en las aplicaciones del cálculo vectorial al flujo de fluidos y la electricidad y magnetismo. Cada una de estas operaciones se asemeja a la derivación, pero una de ellas produce un campo vectorial, mientras que la otra produce un campo escalar.

Rotacional

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y todas las derivadas parciales de P, Q y R existen, el rotacional de $\mathbf{F}$ es el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definido por

1
$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Para ayudar a la memoria, reescriba la ecuación 1 usando la notación del operador. Introduzca el operador diferencial de vectores ∇ ("nabla" u operador "del") como

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Este elemento tiene significado cuando opera en una función escalar para producir el gradiente de f:

$$\nabla f = \mathbf{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

Si se concibe a ∇ como un vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$, se puede considerar también el producto cruz formal de ∇ con el campo vectorial $\mathbf{F}$ como sigue:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$= \text{rot } \mathbf{F}$$

Así, la manera más fácil de recordar la definición 1 es por medio de la expresión simbólica

2

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

SOLUCIÓN Usando la ecuación 2, se tiene

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k}$$

$$= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k}$$

$$= -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

■

SAC La mayoría de los sistemas algebraicos computacionales tienen comandos que calculan el rotacional y la divergencia de campos vectoriales. Si usted tiene acceso a un SAC, use esos comandos para verificar las respuestas de los ejemplos y ejercicios de esta sección.

Recuerde que el gradiente de una función f de tres variables es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, así que puede calcular su rotacional. El teorema siguiente indica que el rotacional de un campo vectorial gradiente es $\mathbf{0}$.

3 Teorema Si f es una función de tres variables que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, entonces

$$\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

COMPROBACIÓN Se tiene

$$\text{rot}\,(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Nótese la semejanza con lo que se sabe por la sección 12.4: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para todos los vectores tridimensionales $\mathbf{a}$.

por el teorema de Clairaut. ■

Como un campo vectorial conservativo es aquel para el cual $\mathbf{F} = \nabla f$, el teorema 3 puede reformularse como sigue:

Compare esto con el ejercicio 16.3.29.

$$\text{Si } \mathbf{F} \text{ es conservativo, entonces rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Esto da una manera de verificar que un campo vectorial no es conservativo.

EJEMPLO 2 Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ no es conservativo.

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 se demostró que

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Esto demuestra que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ y en consecuencia, por lo visto antes de este ejemplo, $\mathbf{F}$ no es conservativo. ■

Lo contrario del teorema 3 no es cierto en general, pero el teorema siguiente establece que es cierto si $\mathbf{F}$ está definida en todas partes. (En términos más generales, es cierto si el dominio está simplemente conectado, es decir si "no tiene agujeros".) El teorema 4 es la versión tridimensional del teorema 16.3.6. Su comprobación requiere el teorema de Stokes y se esbozará al final de la sección 16.8.

4 **Teorema** Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en la totalidad de $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

EJEMPLO 3
(a) Demuestre que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$$

es un campo vectorial conservativo.
(b) Determine una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

SOLUCIÓN
(a) Calcule el rotacional de $\mathbf{F}$:

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)\,\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\,\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0}$$

Como rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y el dominio de $\mathbf{F}$ es $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo por el teorema 4.

(b) La técnica para determinar f se dio en la sección 16.3. Se tiene

5 $$f_x(x, y, z) = y^2z^3$$

6 $$f_y(x, y, z) = 2xyz^3$$

7 $$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Al integrar (5) con respecto a x, se obtiene

8 $$f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z)$$

Derivando (8) con respecto a y, se obtiene $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$, así que la comparación con (6) da $g_y(y, z) = 0$. Por tanto, $g(y, z) = h(z)$ y

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

Entonces (7) da $h'(z) = 0$. Así

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$

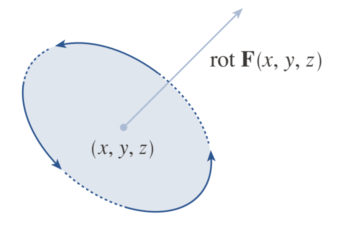


FIGURA 1

La razón del nombre *rotacional* es que el vector rotacional se asocia con rotaciones. Una relación se explica en el ejercicio 37. Otra ocurre cuando **F** representa el campo de velocidad en el flujo de fluidos (véase el ejemplo 16.1.3). Partículas cerca de (x, y, z) en el fluido tienden a rotar alrededor del eje que apunta en la dirección de rot $\mathbf{F}(x, y, z)$ y la longitud de este vector rotacional es una medida de lo rápido que se mueven las partículas alrededor del eje (véase la figura 1). Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en un punto P, el fluido está libre de rotaciones en P y **F** se llama **irrotacional** en P. En otras palabras, no hay ningún remolino en P. Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, una minúscula rueda de paletas se mueve con el fluido, pero no rota alrededor de su eje. Si rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, la rueda de paletas rota alrededor de su eje. Se dará una explicación más detallada en la sección 16.8 como consecuencia del teorema de Stokes.

Divergencia

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ y $\partial R/\partial z$ existen, entonces la **divergencia de F** es la función de tres variables definida por

9 $$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Obsérvese que rot **F** es un campo vectorial, mientras que div **F** es un campo escalar. En términos del operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, la divergencia de **F** puede escribirse simbólicamente como el producto punto de ∇ y **F**:

10 $$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

EJEMPLO 4 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine div **F**.

SOLUCIÓN Por la definición de divergencia (ecuación 9 o 10), se tiene

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$

Si **F** es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, entonces rot **F** es también un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Como tal, se puede calcular su divergencia. El teorema siguiente muestra que el resultado es 0.

11 Teorema Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y P, Q y R tienen derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\text{div rot}\,\mathbf{F} = 0$$

COMPROBACIÓN Usando las definiciones de divergencia y rotacional, se tiene

Nótese la analogía con el triple producto escalar: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y}\\ &= 0\end{aligned}$$

porque los términos se eliminan en pares por el teorema de Clairaut. ■

EJEMPLO 5 Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ no puede escribirse como el rotacional de otro campo vectorial, es decir, $\mathbf{F} \neq \operatorname{rot}\mathbf{G}$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 4 se demostró que

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = z + xz$$

y por tanto $\operatorname{div}\mathbf{F} \neq 0$. Si fuera cierto que $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$, el teorema 11 daría

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{G} = 0$$

lo que contradice $\operatorname{div}\mathbf{F} \neq 0$. Así, $\mathbf{F}$ no es el rotacional de otro campo vectorial. ■

La razón de esta interpretación de div **F** se explicará al final de la sección 16.9 como consecuencia del teorema de la divergencia.

Una vez más, la razón del nombre *divergencia* puede comprenderse en el contexto del flujo de fluidos. Si $\mathbf{F}(x, y, z)$ es la velocidad de un fluido (o gas), entonces $\operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z)$ representa la razón de cambio neta (con respecto al tiempo) de la masa del fluido (o gas) que fluye desde el punto (x, y, z) por unidad de volumen. En otras palabras, $\operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z)$ mide la tendencia del fluido a divergir desde el punto (x, y, z). Si $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, se dice que $\mathbf{F}$ es **incompresible**.

Otro operador diferencial ocurre cuando se calcula la divergencia de un campo vectorial gradiente ∇f. Si f es una función de tres variables, se tiene

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

y esta expresión ocurre tan a menudo que se abrevia como $\nabla^2 f$. El operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

se llama **operador de Laplace** a causa de su relación con la **ecuación de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

También se puede aplicar el operador de Laplace ∇^2 a un campo vectorial

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

en términos de sus componentes:

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,\mathbf{k}$$



Formas vectoriales del teorema de Green

Los operadores rotacional y de divergencia permiten reescribir el teorema de Green en versiones que serán útiles en el trabajo posterior. Suponga que la región plana D, su curva frontera C y las funciones P y Q satisfacen las hipótesis del teorema de Green. Entonces se considera el campo vectorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$. Su integral de línea es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

y considerando a $\mathbf{F}$ como un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ con tercer componente 0, se tiene

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Por tanto

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y ahora se puede reescribir la ecuación del teorema de Green en la forma vectorial

12 $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

La ecuación 12 expresa la integral de línea del componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de C como la integral doble del componente vertical de rot $\mathbf{F}$ en la región D encerrada por C. Ahora se deriva una fórmula similar que implica al componente *normal* de $\mathbf{F}$.

Si C está dada por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Entonces el vector tangente unitario (véase la sección 13.2) es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

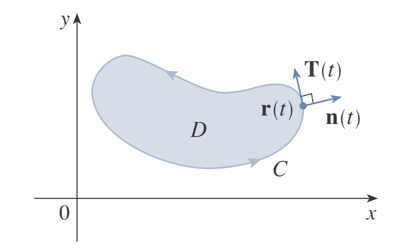


FIGURA 2

Usted puede verificar que el vector normal unitario externo a C está dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

(Véase la figura 2.) Así, de la ecuación 16.2.3 se tiene

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t)\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))\, y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))\, x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt - Q(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$$

$$= \int_C P\,dy - Q\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

por el teorema de Green. Pero el integrando en esta integral doble es justo la divergencia de **F**. Por lo que se tiene una segunda forma vectorial del teorema de Green.

13
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

Esta versión indica que la integral de línea del componente normal de **F** a lo largo de C es igual a la integral doble de la divergencia de **F** en la región D encerrada por C.

16.5 EJERCICIOS

1-8 Determine (a) el rotacional y (b) la divergencia del campo vectorial.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\,\mathbf{i} + x^2yz^2\,\mathbf{j} + x^2y^2z\,\mathbf{k}$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3yz^2\,\mathbf{j} + y^4z^3\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+z}\,\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{y}}{1+x}\,\mathbf{j} + \dfrac{\sqrt{z}}{1+y}\,\mathbf{k}$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(2y + 3z)\,\mathbf{i} + \ln(x + 3z)\,\mathbf{j} + \ln(x + 2y)\,\mathbf{k}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$

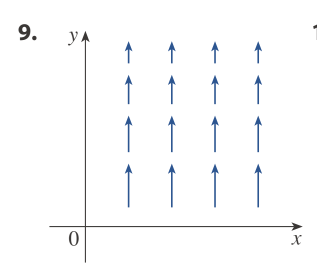
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \arctan(xy), \arctan(yz), \arctan(zx) \rangle$

9-11 El campo vectorial **F** se muestra en el plano xy y parece igual en todos los demás planos horizontales. (En otras palabras, **F** es independiente de z y su componente z es 0.)

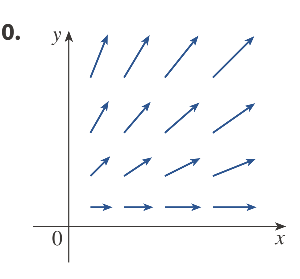
(a) ¿Div **F** es positiva, negativa o cero? Explique su respuesta.

(b) Determine si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Si no, ¿en qué dirección apunta rot **F**?

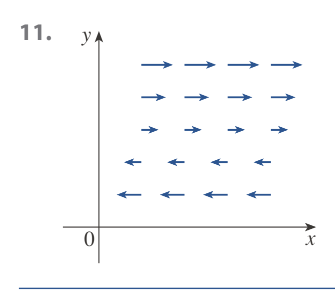
9.



10.



11.



12. Sea f un campo escalar y **F** un campo vectorial. Diga si cada una de las expresiones siguientes es significativa. Si no lo es, explique por qué. Si lo es, diga si es un campo escalar o un campo vectorial.

(a) rot f
(b) grad f
(c) div **F**
(d) rot (grad f)
(e) grad **F**
(f) grad(div **F**)
(g) div(grad f)
(h) grad(div f)
(i) rot (rot **F**)
(j) div(div **F**)
(k) (grad f) × (div **F**)
(l) div(rot (grad f))

13-18 Determine si el campo vectorial es conservativo o no. Si lo es, halle una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^4\,\mathbf{i} + x^2z^4\,\mathbf{j} + 4x^2yz^3\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\cos y\,\mathbf{i} + xz\operatorname{sen} y\,\mathbf{j} + x\cos y\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^2\,\mathbf{i} + x^2yz^2\,\mathbf{j} + x^2y^2z\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz}\,\mathbf{i} + xze^{yz}\,\mathbf{j} + xye^{yz}\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\operatorname{sen} yz\,\mathbf{i} + ze^x\cos yz\,\mathbf{j} + ye^x\cos yz\,\mathbf{k}$

19. ¿Existe un campo vectorial **G** en $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy \rangle$? Explique su respuesta.

20. ¿Existe un campo vectorial **G** en $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle x, y, z \rangle$? Explique su respuesta.

21. Demuestre que todo campo vectorial de la forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$$

donde f, g, h son funciones derivables, es irrotacional.

22. Demuestre que todo campo vectorial de la forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\,\mathbf{i} + g(x, z)\,\mathbf{j} + h(x, y)\,\mathbf{k}$$

es incompresible.

23-29 Compruebe la identidad, suponiendo que las derivadas parciales apropiadas existen y son continuas. Si f es un campo escalar y **F**, **G** son campos vectoriales, entonces $f\mathbf{F}$, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ y $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ pueden ser definidas por

$$(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\,\mathbf{F}(x, y, z)$$
$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\cdot\mathbf{G}(x, y, z)$$
$$(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\times\mathbf{G}(x, y, z)$$

23. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$

24. $\operatorname{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{G}$

25. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$

26. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{rot}\mathbf{F} + (\nabla f)\times\mathbf{F}$

27. $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}$

28. $\operatorname{div}(\nabla f\times\nabla g) = 0$

29. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

30-32 Sea $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y $r = |\mathbf{r}|$.

30. Verifique cada identidad.

(a) $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla\cdot(r\mathbf{r}) = 4r$

(c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

31. Verifique cada identidad.

(a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$ (b) $\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$

(c) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ (d) $\nabla\ln r = \mathbf{r}/r^2$

32. Si $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, determine div **F**. ¿Existe un valor de p para el que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$?

---

33. Use el teorema de Green en la forma de ecuación 13 para comprobar la **primera identidad de Green**:

$$\iint_D f\nabla^2 g\,dA = \oint_C f(\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,ds - \iint_D \nabla f\cdot\nabla g\,dA$$

donde D y C satisfacen las hipótesis del teorema de Green y las derivadas parciales apropiadas de f y g existen y son continuas. (La cantidad $\nabla g\cdot\mathbf{n} = D_n g$ ocurre en la integral de línea. Esta es la derivada direccional en la dirección del vector normal **n** y se llama **derivada normal** de g.)

34. Use la primera identidad de Green (ejercicio 33) para comprobar la **segunda identidad de Green**:

$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,ds$$

donde D y C satisfacen las hipótesis del teorema de Green y las derivadas parciales apropiadas de f y g existen y son continuas.

35. Recuerde de la sección 14.3 que una función g se llama *armónica* en D si satisface la ecuación de Laplace, es decir $\nabla^2 g = 0$ en D. Use la primera identidad de Green (con las mismas hipótesis que en el ejercicio 33) para demostrar que si g es armónica en D, entonces $\oint_C D_n g\,ds = 0$. Aquí $D_n g$ es la derivada normal de g definida en el ejercicio 33.

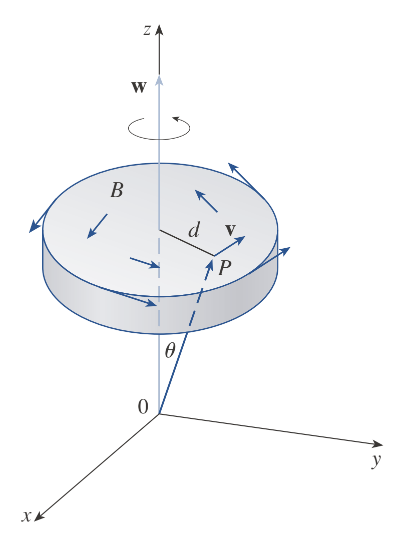
36. Use la primera identidad de Green para demostrar que si f es armónica en D y si $f(x, y) = 0$ en la curva frontera C, entonces $\iint_D |\nabla f|^2\,dA = 0$. (Suponga las mismas hipótesis que en el ejercicio 33.)

37. Este ejercicio demuestra una relación entre el vector rotacional y rotaciones. Sea B un cuerpo rígido que rota alrededor del eje z. La rotación puede ser descrita por el vector $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$, donde ω es la velocidad angular de B, es decir la velocidad tangencial de cualquier punto P en B dividida entre la distancia d del eje de rotación. Sea $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ el vector de posición de P.

(a) Considerando el ángulo θ de la figura, demuestre que el campo de velocidad de B está dado por $\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r}$.

(b) Demuestre que $\mathbf{v} = -\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j}$.

(c) Demuestre que $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



38. Las ecuaciones de Maxwell que relacionan el campo eléctrico **E** y el campo magnético **H** cuando varían con el tiempo en una región que no contiene ninguna carga ni corriente pueden enunciarse como sigue:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

donde c es la velocidad de la luz. Use estas ecuaciones para comprobar lo siguiente:

(a) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$

(b) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$

(c) $\nabla^2\mathbf{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$ [*Sugerencia:* Use el ejercicio 29.]

(d) $\nabla^2\mathbf{H} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$

39. Se ha visto que todos los campos vectoriales de la forma $\mathbf{F} = \nabla g$ satisfacen la ecuación rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y que todos los campos vectoriales de la forma $\mathbf{F} =$ rot $\mathbf{G}$ satisfacen la ecuación div $\mathbf{F} = 0$ (suponiendo continuidad de las derivadas parciales apropiadas). Esto sugiere la pregunta: ¿existen ecuaciones que todas las funciones de la forma $f =$ div $\mathbf{G}$ deban satisfacer? Demuestre que la respuesta a esta pregunta es "No" comprobando que *cada* función continua f en $\mathbb{R}^3$ es la divergencia de algún campo vectorial.

[*Sugerencia*: sea $\mathbf{G}(x, y, z) = \langle g(x, y, z), 0, 0\rangle$ donde $g(x, y, z) = \int_0^x f(t, y, z)\, dt$.]

16.6 Superficies paramétricas y sus áreas

Hasta aquí se han considerado tipos especiales de superficies: cilindros, superficies cuádricas, gráficas de funciones de dos variables y superficies de nivel de funciones de tres variables. Aquí se usarán funciones vectoriales para describir superficies más generales, llamadas *superficies paramétricas*, y se calcularán sus áreas. Luego se tomará la fórmula general del área de una superficie y se verá cómo se aplica a superficies especiales.

Superficies paramétricas

Igual que como se describió una curva en el espacio mediante una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ de un parámetro t, se puede describir una superficie mediante una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dos parámetros u y v. Suponga que

1 $$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

es una función con un vector como valor definida en una región D en el plano uv. Por lo que, x, y y z, las funciones componentes de $\mathbf{r}$, son funciones de dos variables u y v con dominio D. El conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ es tal que

2 $$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

y (u, v) varía a todo lo largo de D, se llama **superficie paramétrica** S y las ecuaciones 2 se llaman **ecuaciones paramétricas** de S. Cada elección de u y v da un punto en S; haciendo todas las elecciones, se obtiene la totalidad de S. En otras palabras, la superficie S es trazada por la punta del vector de posición $\mathbf{r}(u, v)$ conforme (u, v) se mueve por la región D. (Véase la figura 1.)

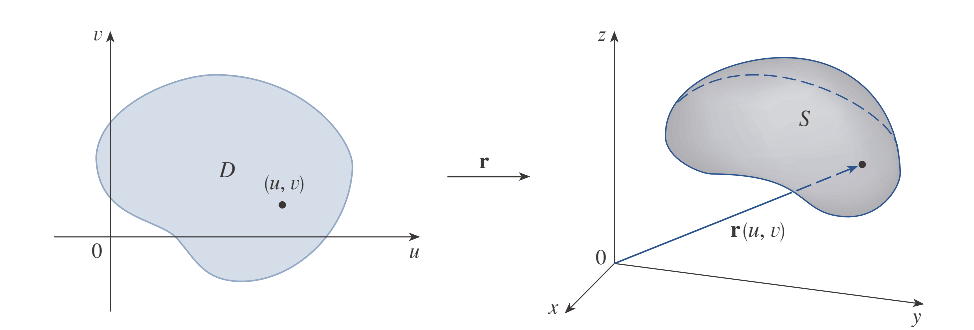


FIGURA 1
Una superficie paramétrica

EJEMPLO 1 Identifique y trace la superficie con ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\, u\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas para esta superficie son

$$x = 2\cos u \qquad y = v \qquad z = 2\,\text{sen}\, u$$



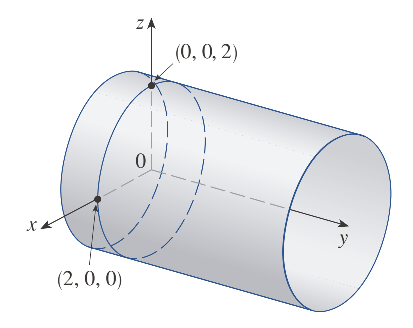


FIGURA 2

Así, para cualquier punto (x, y, z) en la superficie, se tiene

$$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\,\text{sen}^2 u = 4$$

Esto significa que las secciones transversales verticales paralelas al plano xz (es decir, con y constante) son todos los círculos con radio 2. Como $y = v$ y no hay ninguna restricción sobre v, la superficie es un cilindro circular con radio 2 cuyo eje es el eje y (véase la figura 2). ■

En el ejemplo 1 no se pusieron restricciones a los parámetros u y v, por tanto se obtuvo el cilindro entero. Si, por ejemplo, se restringe u y v escribiendo el dominio paramétrico como

$$0 \leqslant u \leqslant \pi/2 \qquad 0 \leqslant v \leqslant 3$$

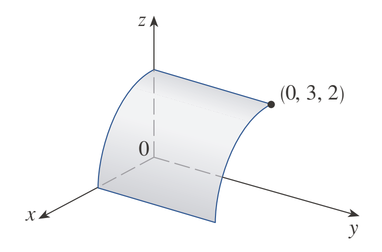


FIGURA 3

entonces $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, y se obtiene el cuarto de cilindro con longitud 3 ilustrado en la figura 3.

Si una superficie paramétrica S es dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, entonces hay dos familias útiles de curvas que residen en S, una familia con u constante y otra con v constante. Estas familias corresponden a las rectas verticales y horizontales en el plano uv. Si se mantiene u constante poniendo $u = u_0$, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ se convierte en una función vectorial del parámetro v y define una curva C_1 que se tiende en S. (Véase la figura 4.)

TEC Visual 16.6 muestra versiones animadas de las figuras 4 y 5, con curvas reticulares móviles, para varias superficies paramétricas.

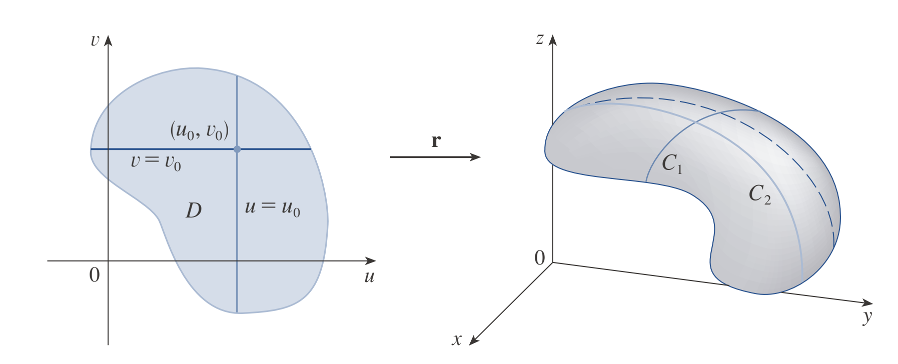


FIGURA 4

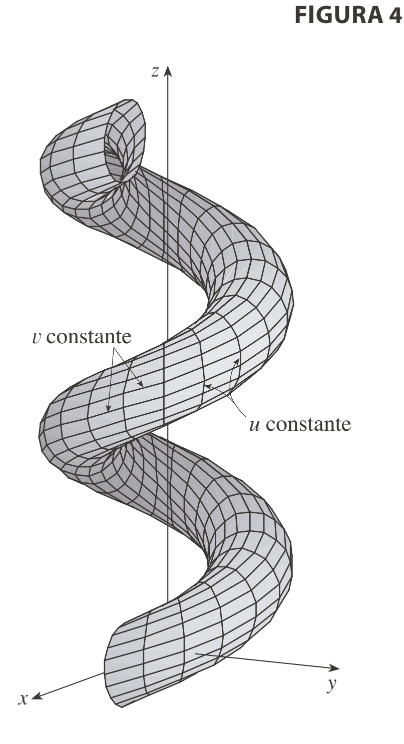


FIGURA 5

De igual forma, si se mantiene v constante poniendo $v = v_0$, se obtiene una curva C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que reside en S. Se llama a estas curvas **curvas reticulares**. (En el ejemplo 1, por citar un caso, las curvas reticulares obtenidas concediendo que u es constante son rectas horizontales, mientras que las curvas reticulares con v constante son círculos.) De hecho, cuando una computadora grafica una superficie paramétrica, usualmente describe la superficie trazando estas curvas reticulares, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Use un sistema algebraico computacional para graficar la superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \text{sen}\, v)\cos u,\ (2 + \text{sen}\, v)\,\text{sen}\, u,\ u + \cos v \rangle$$

¿Qué curvas reticulares tienen u constante? ¿Cuáles tienen v constante?

SOLUCIÓN Se grafica la porción de la superficie con dominio paramétrico $0 \leqslant u \leqslant 4\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ en la figura 5. Tiene la apariencia de un tubo en espiral. Para identificar las curvas reticulares, se escriben las ecuaciones paramétricas correspondientes:

$$x = (2 + \text{sen}\, v)\cos u \qquad y = (2 + \text{sen}\, v)\,\text{sen}\, u \qquad z = u + \cos v$$

Si v es constante, entonces sen v y cos v son constantes, así que las ecuaciones paramétricas se asemejan a las de la hélice en el ejemplo 13.1.4. De este modo, las curvas reticulares con v constante son las curvas en espiral de la figura 5. Se deduce que las



curvas reticulares con u constante deben ser las curvas que parecen círculos en la figura. Una evidencia adicional para esta afirmación es que si u se mantiene constante, $u = u_0$, entonces la ecuación $z = u_0 + \cos v$ muestra que los valores de z varían de $u_0 - 1$ a $u_0 + 1$. ■

En los ejemplos 1 y 2 se dio una ecuación vectorial y se pidió graficar la superficie paramétrica correspondiente. En los ejemplos siguientes, en cambio, se dará el problema más desafiante de encontrar una función vectorial que represente una superficie dada. En el resto de este capítulo, a menudo se tendrá que hacer precisamente eso.

EJEMPLO 3 Encuentre una función vectorial que represente el plano que pasa por el punto P_0 con vector de posición $\mathbf{r}_0$ y que contiene dos vectores no paralelos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

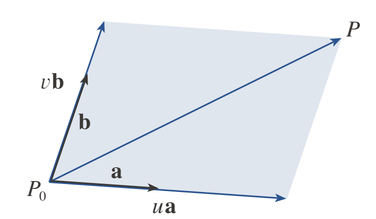


FIGURA 6

SOLUCIÓN Si P es cualquier punto en el plano, se puede pasar de P_0 a P moviéndose cierta distancia en la dirección de $\mathbf{a}$ y otra distancia en la dirección de $\mathbf{b}$. Así, hay escalares u y v tales que $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. (La figura 6 ilustra cómo opera esto, por medio de la ley del paralelogramo, para el caso en el que u y v son positivas. Véase también el ejercicio 12.2.46.) Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de P, entonces

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

Así, la ecuación vectorial del plano puede escribirse como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

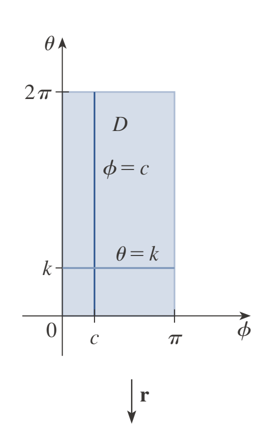
donde u y v son números reales.

Si se escribe $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, se pueden escribir las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) como sigue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \qquad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \qquad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$ ■

EJEMPLO 4 Encuentre la representación paramétrica de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



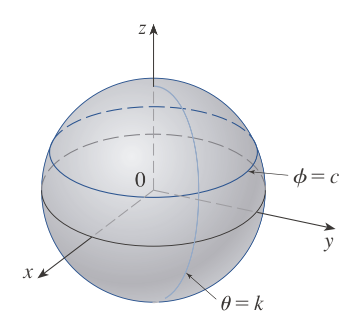


FIGURA 7

SOLUCIÓN La esfera tiene una representación simple $\rho = a$ en coordenadas esféricas, así que elija los ángulos ϕ y θ en coordenadas esféricas como los parámetros (véase la sección 15.8). Luego, al poner $\rho = a$ en la ecuación para la conversión de coordenadas esféricas a rectangulares (ecuaciones 15.8.1), se obtiene

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

como las ecuaciones paramétricas de la esfera. La ecuación vectorial correspondiente es

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{j} + a \cos \phi\, \mathbf{k}$$

Se tiene $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, así que el dominio paramétrico es el rectángulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Las curvas reticulares con ϕ constante son los círculos de latitud constante (incluido el ecuador). Las curvas reticulares con θ constante son los meridianos (semicírculos), los cuales unen los polos norte y sur (véase la figura 7). ■

NOTA En el ejemplo 4 se vio que las curvas reticulares para una esfera son curvas de latitud constante o longitud constante. Para una superficie paramétrica general, en realidad se hace un mapa y las curvas reticulares son similares a líneas de latitud y longitud. Describir un punto en una superficie paramétrica (como la de la figura 5) dando valores específicos de u y v es como dar la latitud y longitud de un punto.



Uno de los usos de las superficies paramétricas es el de gráficos por computadora. La figura 8 muestra el resultado de tratar de graficar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ despejando z en la ecuación y graficando los hemisferios superior e inferior por separado. Parte de la esfera parece faltar, a causa del sistema reticular rectangular usado por la computadora. La imagen que está mucho mejor de la figura 9 fue producida por una computadora usando las ecuaciones paramétricas determinadas en el ejemplo 4.

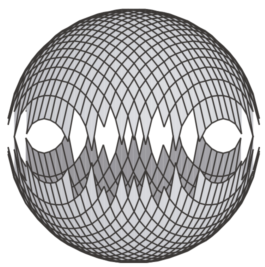


FIGURA 8

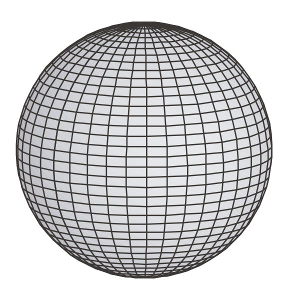


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Halle una representación paramétrica para el cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

SOLUCIÓN El cilindro tiene una representación simple $r = 2$ en coordenadas cilíndricas, así que se elige como parámetros θ y z en coordenadas cilíndricas. Entonces, las ecuaciones paramétricas del cilindro son

$$x = 2 \cos \theta \qquad y = 2 \operatorname{sen} \theta \qquad z = z$$

donde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant z \leqslant 1$. ■

EJEMPLO 6 Halle una función vectorial que represente al paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$.

SOLUCIÓN Si se considera a x y y como parámetros, las ecuaciones paramétricas son simplemente

$$x = x \qquad y = y \qquad z = x^2 + 2y^2$$

y la ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2)\,\mathbf{k}$$ ■

TEC En Module 16.6 usted puede investigar varias familias de superficies paramétricas.

En general, una superficie dada como la gráfica de una función de x y y, es decir con una ecuación de la forma $z = f(x, y)$, siempre puede considerarse una superficie paramétrica tomando x y y como parámetros y escribiendo las ecuaciones paramétricas como

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

Las representaciones paramétricas (también llamadas parametrizaciones) de superficies no son únicas. El ejemplo siguiente muestra dos maneras de parametrizar un cono.

EJEMPLO 7 Determine una representación paramétrica para la superficie $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, es decir la mitad superior del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

SOLUCIÓN 1 Una posible representación se obtiene eligiendo a x y y como parámetros:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Así, la ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$$



Para algunos propósitos, las representaciones paramétricas de las soluciones 1 y 2 son igualmente satisfactorias, pero la solución 2 podría ser preferible en ciertas situaciones. Si solo interesa la parte del cono que se encuentra bajo el plano $z = 1$, por ejemplo, todo lo que se tiene que hacer en la solución 2 es cambiar el dominio paramétrico a

$$0 \leqslant r \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN 2 Otra representación resulta de elegir como parámetros las coordenadas polares r y θ. Un punto (x, y, z) en el cono satisface $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ y $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Por lo que una ecuación vectorial para el cono es

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}$$

donde $r \geqslant 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. ■

Superficies de revolución

Las superficies de revolución pueden representarse paramétricamente y por tanto graficarse usando una computadora. Por ejemplo, considere la superficie S obtenida rotando la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, alrededor del eje x, donde $f(x) \geqslant 0$. Sea θ el ángulo de rotación como se muestra en la figura 10. Si (x, y, z) es un punto en S, entonces

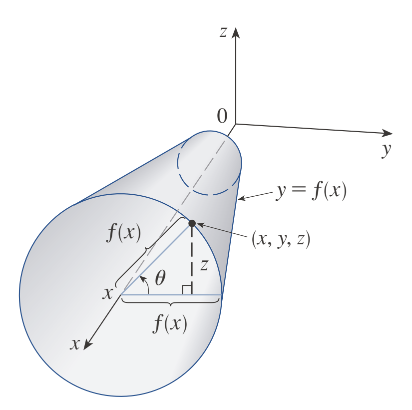


FIGURA 10

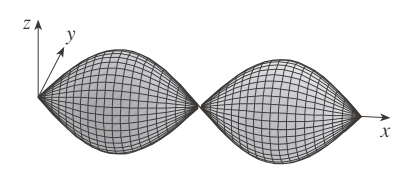


FIGURA 11

3 $$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\operatorname{sen}\theta$$

Por tanto, tome x y θ como parámetros y considere las ecuaciones 3 como ecuaciones paramétricas de S. El dominio paramétrico está dado por $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

EJEMPLO 8 Determine ecuaciones paramétricas para la superficie generada rotando la curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, alrededor del eje x. Use estas ecuaciones para graficar la superficie de la revolución.

SOLUCIÓN Con base en las ecuaciones 3, las ecuaciones paramétricas son

$$x = x \qquad y = \operatorname{sen} x\cos\theta \qquad z = \operatorname{sen} x\operatorname{sen}\theta$$

y el dominio paramétrico es $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Al usar una computadora para trazar estas ecuaciones y rotando después la imagen, se obtiene la gráfica de la figura 11. ■

Se pueden adaptar las ecuaciones 3 para representar una superficie obtenida mediante revolución alrededor del eje y o z (véase el ejercicio 30).

Planos tangentes

Ahora se determinará el plano tangente a una superficie paramétrica S trazada por una función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

en un punto P_0 con vector de posición $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Si se mantiene constante a u poniendo $u = u_0$, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ se convierte en una función vectorial del parámetro v y define una curva reticular C_1 que está en S. (Véase la figura 12.) El vector tangente a C_1 en P_0 se obtiene tomando la derivada parcial de $\mathbf{r}$ con respecto a v:

4 $$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

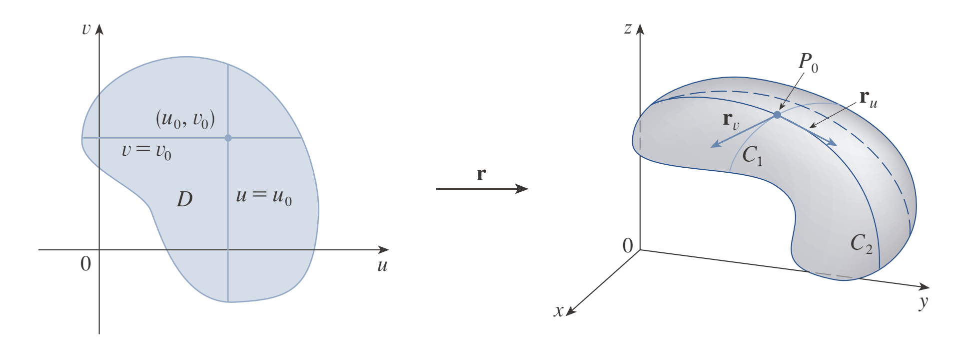


FIGURA 12

De igual forma, si se mantiene constante a v poniendo $v = v_0$, se obtiene la curva reticular C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que yace en S, y su vector tangente en P_0 es

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

Si $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ no es $\mathbf{0}$, la superficie S se llama **suave** (no tiene "esquinas"). Para una superficie suave, el **plano tangente** es el plano que contiene los vectores tangentes $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$, y el vector tangente $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es un vector normal al plano tangente.

La figura 13 muestra la superficie que se interseca a sí misma del ejemplo 9 y su plano tangente en (1, 1, 3).

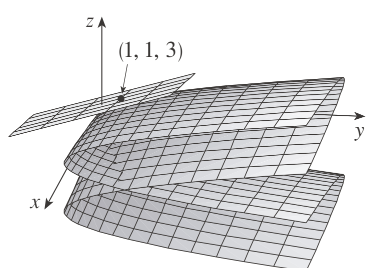


FIGURA 13

EJEMPLO 9 Determine el plano tangente a la superficie con ecuaciones paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ en el punto (1, 1, 3).

SOLUCIÓN Calcule primero los vectores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k} = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Así, un vector normal al plano tangente es

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

Nótese que el punto (1, 1, 3) corresponde a los valores paramétricos $u = 1$ y $v = 1$, así que el vector paramétrico ahí es

$$-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

Por tanto, una ecuación del plano tangente en (1, 1, 3) es

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

o

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

■

Área de una superficie

Ahora se define el área de una superficie paramétrica general dada por la ecuación 1. Para mayor simplicidad, se empieza considerando una superficie cuyo dominio paramétrico D es un rectángulo y se divide en subrectángulos R_{ij}. Se elige (u_i^*, v_j^*) como la esquina inferior izquierda de R_{ij}. (Véase la figura 14.)

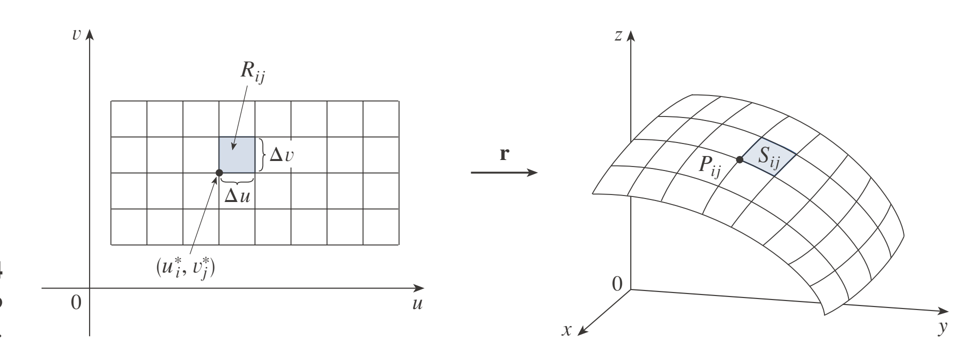


FIGURA 14
La imagen del subrectángulo R_{ij} es la parcela S_{ij}.

La parte S_{ij} de la superficie S que corresponde a R_{ij} se llama *parcela* y tiene el punto P_{ij} con vector de posición $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ como una de sus esquinas. Sean

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

los vectores tangentes en P_{ij}, dados por las ecuaciones 5 y 4.

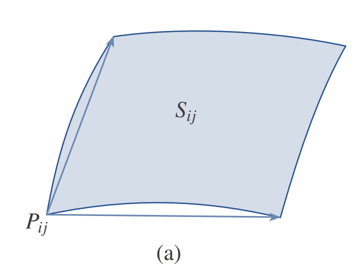
La figura 15(a) muestra cómo las dos orillas de la parcela que se encuentran en P_{ij} pueden ser aproximadas por vectores. Estos vectores pueden ser aproximados a su vez por los vectores $\Delta u\, \mathbf{r}_u^*$ y $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$, porque las derivadas parciales pueden ser aproximadas por cocientes de diferencias. Así, se aproxima S_{ij} mediante el paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u\, \mathbf{r}_u^*$ y $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$. Este paralelogramo aparece en la figura 15(b) y se ubica en el plano tangente a S en P_{ij}. El área de este paralelogramo es

$$|(\Delta u\, \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\, \Delta u\, \Delta v$$

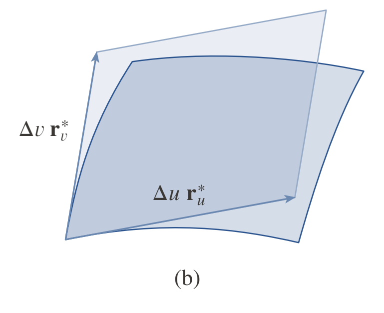
así que una aproximación al área de S es

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\, \Delta u\, \Delta v$$

La intuición dice que esta aproximación mejora cuando se aumenta el número de subrectángulos, y se reconoce la doble suma como una suma de Riemann para la integral doble $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv$. Esto motiva la definición siguiente.



(a)



(b)

FIGURA 15
Aproximación de una parcela por medio de un paralelogramo

6 Definición Si una superficie paramétrica suave S está dada por la ecuación

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

y S es cubierta solo una vez cuando (u, v) abarca todo el dominio paramétrico D, entonces el **área** de S es

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

donde $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

EJEMPLO 10 Determine el área de una esfera de radio a.

SOLUCIÓN En el ejemplo 4 se determinó la representación paramétrica

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

donde el dominio paramétrico es

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

Calcule primero el producto cruz de los vectores tangentes:

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{sen} \phi \\ -a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos \theta\, \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi\, \mathbf{k}$$



Así

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi \cos^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^4\phi \operatorname{sen}^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2 \operatorname{sen}\phi$$

ya que $\phi \geqslant 0$ para $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Por tanto, por la definición 6, el área de la esfera es

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2$$ ■

Área de la gráfica de una función

Para el caso especial de una superficie S con ecuación $z = f(x, y)$, donde (x, y) se sitúa en D y f tiene derivadas parciales continuas, se toma x y y como parámetros. Las ecuaciones paramétricas son

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

así que $$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

y

7 $$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Por tanto, se tiene

8 $$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

y la fórmula del área en la definición 6 se convierte en

9 $$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Nótese la semejanza entre la fórmula del área en la ecuación 9 y la fórmula de la longitud de arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

de la sección 8.1.

EJEMPLO 11 Halle el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se ubica bajo el plano $z = 9$.

SOLUCIÓN El plano interseca el paraboloide en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Por tanto, la superficie dada se encuentra sobre el disco D con centro en el origen y radio 3.

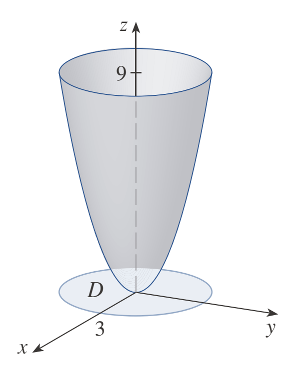


FIGURA 16

(Véase la figura 16.) Usando la fórmula 9, se tiene

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Al convertir a coordenadas polares se obtiene

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$ ■

Persiste la pregunta de si nuestra definición del área (6) es congruente con la fórmula del área del cálculo de una variable (8.2.4).

Considere la superficie S obtenida rotando la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ alrededor del eje x, donde $f(x) \geqslant 0$ y f' es continua. Por las ecuaciones 3 se sabe que las ecuaciones paramétricas de S son

$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\text{sen}\,\theta \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Para calcular el área de S se necesitan los vectores tangenciales

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + f'(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -f(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + f(x)\cos\theta\,\mathbf{k}$$

Así

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\,\text{sen}\,\theta \\ 0 & -f(x)\,\text{sen}\,\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= f(x)f'(x)\,\mathbf{i} - f(x)\cos\theta\,\mathbf{j} - f(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

y por tanto

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{[f(x)]^2[f'(x)]^2 + [f(x)]^2\cos^2\theta + [f(x)]^2\,\text{sen}^2\theta}$$

$$= \sqrt{[f(x)]^2[1 + [f'(x)]^2]} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

porque $f(x) \geqslant 0$. En consecuencia, el área de S es

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta|\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Esta es precisamente la fórmula que se usó para definir el área de una superficie de revolución en el cálculo de una variable (8.2.4).

16.6 EJERCICIOS

1-2 Determine si los puntos P y Q están en la superficie dada.

1. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u - 2v, 3 + u - v \rangle$
$P(4, -5, 1)$, $Q(0, 4, 6)$

2. $\mathbf{r}(u, v) = \langle 1 + u - v, u + v^2, u^2 - v^2 \rangle$
$P(1, 2, 1)$, $Q(2, 3, 3)$

3-6 Identifique la superficie con la ecuación vectorial dada.

3. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\,\mathbf{i} + (3 - v)\,\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + u \cos v\,\mathbf{j} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s \cos t, s \operatorname{sen} t, s \rangle$

6. $\mathbf{r}(s, t) = \langle 3 \cos t, s, \operatorname{sen} t \rangle, \quad -1 \leqslant s \leqslant 1$

7-12 Use una computadora para graficar la superficie paramétrica. Obtenga una impresión e indique en ella cuáles curvas reticulares tienen u constante y cuáles tienen v constante.

7. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2, v^2, u + v \rangle$,
$-1 \leqslant u \leqslant 1, \ -1 \leqslant v \leqslant 1$

8. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v^3, -v \rangle$,
$-2 \leqslant u \leqslant 2, \ -2 \leqslant v \leqslant 2$

9. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^3, u \operatorname{sen} v, u \cos v \rangle$,
$-1 \leqslant u \leqslant 1, \ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

10. $x = \operatorname{sen} u, \quad y = \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} v$
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

11. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^5 \rangle$,
$-1 \leqslant u \leqslant 1, \ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

12. $x = \cos u, \quad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = \cos v$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

13-18 Asocie la ecuaciones con las gráficas rotuladas I-VI y dé razones para sus respuestas. Determine qué familias de curvas reticulares tienen u constante y cuáles tienen v constante.

13. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$

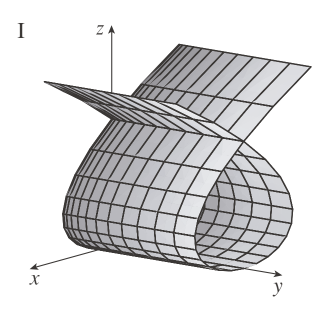
14. $\mathbf{r}(u, v) = uv^2\,\mathbf{i} + u^2 v\,\mathbf{j} + (u^2 - v^2)\,\mathbf{k}$

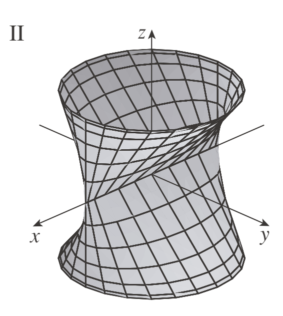
15. $\mathbf{r}(u, v) = (u^3 - u)\,\mathbf{i} + v^2\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k}$

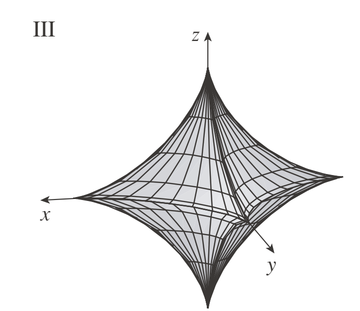
16. $x = (1 - |u|) \cos v, \quad y = (1 - |u|) \operatorname{sen} v, \quad z = u$

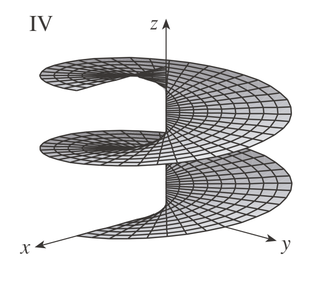
17. $x = \cos^3 u \cos^3 v, \quad y = \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v, \quad z = \operatorname{sen}^3 v$

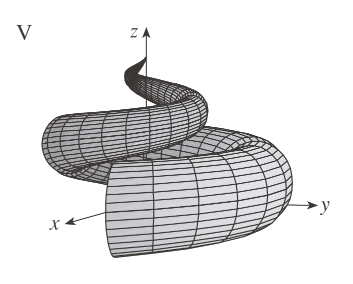
18. $x = \operatorname{sen} u, \quad y = \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} v$

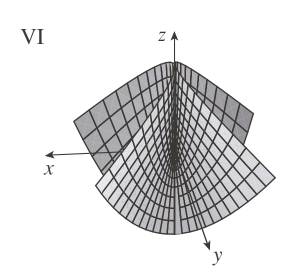
I


II


III


IV


V


VI


19-26 Halle una representación paramétrica para la superficie.

19. El plano que pasa por el origen y que contiene los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} - \mathbf{k}$

20. El plano que pasa por el punto $(0, -1, 5)$ y que contiene los vectores $\langle 2, 1, 4 \rangle$ y $\langle -3, 2, 5 \rangle$

21. La parte del cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que está entre los planos $x = 0$ y $x = 5$

22. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está entre los planos $z = -2$ y $z = 2$

23. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

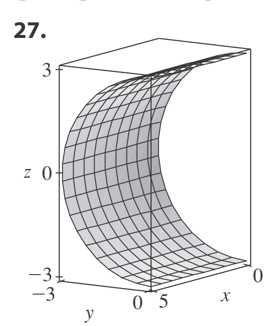
24. La parte del cilindro $x^2 + z^2 = 9$ que está sobre el plano xy y entre los planos $y = -4$ y $y = 4$

25. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que está entre los planos $z = 0$ y $z = 3\sqrt{3}$

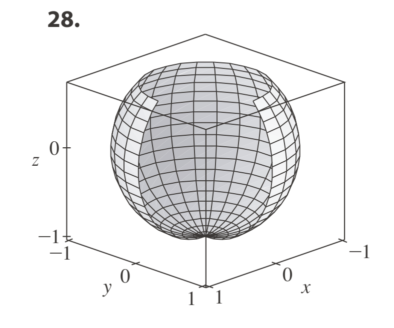
26. La parte del plano $z = x + 3$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

27-28 Use un dispositivo de graficación para producir una gráfica que se parezca a la que se da.

27.



28.



29. Halle ecuaciones paramétricas para la superficie obtenida rotando la curva $y = 1/(1 + x^2)$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$ alrededor del eje x y úselas para graficar la superficie.

30. Halle ecuaciones paramétricas para la superficie obtenida rotando la curva $x = 1/y$, $y \geqslant 1$ alrededor del eje y y úselas para graficar la superficie.

31. (a) ¿Qué sucede con el tubo en espiral del ejemplo 2 (véase la figura 5) si reemplaza cos u por sen u y sen u por cos u?
(b) ¿Qué sucede si reemplaza cos u por cos $2u$ y sen u por sen $2u$?

32. La superficie con ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$y = 2\operatorname{sen}\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$z = r\operatorname{sen}(\theta/2)$$

donde $-\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, se llama **banda de Möbius**. Grafique esta superficie con varios puntos de vista. ¿Qué es inusual en ella?

33-36 Determine una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica dada en el punto especificado.

33. $x = u + v, \quad y = 3u^2, \quad z = u - v; \quad (2, 3, 0)$

34. $x = u^2 + 1, \quad y = v^3 + 1, \quad z = u + v; \quad (5, 2, 3)$

35. $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}; \quad u = 1, \ v = \pi/3$

36. $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u\,\mathbf{i} + \cos u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{k};$ $u = \pi/6, \ v = \pi/6$

SAC **37-38** Determine una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica dada en el punto especificado. Grafique la superficie y el plano tangente.

37. $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\cos v\,\mathbf{k}; \quad u = 1, \ v = 0$

38. $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u^2 - v^2)\,\mathbf{i} - v\,\mathbf{j} - u\,\mathbf{k}; \quad (-1, -1, -1)$

39-50 Encuentre el área de la superficie.

39. La parte del plano $3x + 2y + z = 6$ que está en el primer octante

40. La parte del plano con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, 2 - 3u, 1 + u - v \rangle$ que está dada por $0 \leqslant u \leqslant 2$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$

41. La parte del plano $x + 2y + 3z = 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 3$

42. La parte de la superficie $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(2, 1)$

43. La parte de la superficie $y = 4x + z^2$ que está entre los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ y $z = 1$

44. La parte de la superficie $z = 4 - 2x^2 + y$ que está sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$

45. La parte de la superficie $z = xy$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

46. La parte de la superficie $x = z^2 + y$ que está entre los planos $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ y $z = 2$

47. La parte del paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 16$

48. La parte del paraboloide $x = y^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 9$

49. La superficie con ecuaciones paramétricas $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

50. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, donde $0 < a < b$

51. Si la ecuación de una superficie S es $z = f(x, y)$, donde $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, y usted sabe que $|f_x| \leqslant 1$ y $|f_y| \leqslant 1$, ¿qué puede decir de $A(S)$?

52-53 Determine el área de la superficie con cuatro decimales expresando el área en términos de una integral simple y usando su calculadora para estimar la integral.

52. La parte de la superficie $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

53. La parte de la superficie $z = \ln(x^2 + y^2 + 2)$ que está sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$

SAC **54.** Determine, con cuatro decimales, el área de la parte de la superficie $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está sobre el cuadrado $|x| + |y| \leqslant 1$. Ilustre graficando esta parte de la superficie.

55. (a) Use la regla del punto medio para integrales dobles (véase la sección 15.1) con seis cuadrados para estimar el área de la superficie $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.
SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar el área en el inciso (a) con cuatro decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).

SAC **56.** Determine el área de la superficie con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 v \rangle$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Enuncie su respuesta con cuatro decimales.

SAC **57.** Determine el área exacta de la superficie $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 1$.

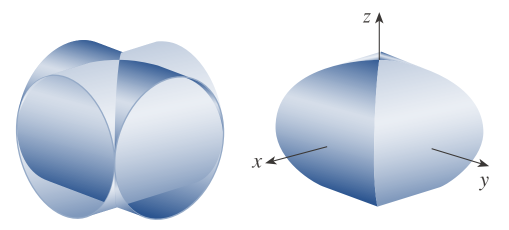
58. (a) Establezca pero no evalúe una integral doble para el área de la superficie con ecuaciones paramétricas $x = au \cos v$, $y = bu \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
(b) Elimine los parámetros para demostrar que la superficie es un paraboloide elíptico y establezca otra integral doble para el área.
(c) Use las ecuaciones paramétricas del inciso (a) con $a = 2$ y $b = 3$ para graficar la superficie.
SAC (d) Para el caso $a = 2$, $b = 3$, use un sistema algebraico computacional para hallar el área con cuatro decimales.

59. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = c \cos u$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ representan un elipsoide.
(b) Use las ecuaciones paramétricas del inciso (a) para graficar el elipsoide para el caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
(c) Establezca pero no evalúe una integral doble para el área del elipsoide del inciso (b).

60. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{senh} u$, representan un hiperboloide de una hoja.
(b) Use las ecuaciones paramétricas del inciso (a) para graficar el hiperboloide para el caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
(c) Establezca pero no evalúe una integral doble para el área de la parte del hiperboloide en el inciso (b) que está entre los planos $z = -3$ y $z = 3$.

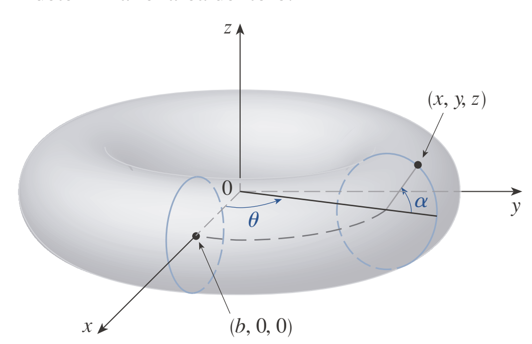
61. Determine el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

62. La figura muestra la superficie creada cuando el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ interseca el cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Determine el área de esta superficie.



63. Halle el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

64. (a) Halle una representación paramétrica para el toro obtenido al rotar alrededor del eje z el círculo en el plano xz con centro $(b, 0, 0)$ y radio $a < b$. [*Sugerencia*: tome como parámetros los ángulos θ y α que se muestran en la figura.]
(b) Use las ecuaciones paramétricas determinadas en el inciso (a) para graficar el toro para varios valores de a y b.
(c) Use la representación paramétrica del inciso (a) para determinar el área del toro.



16.7 Integrales de superficie

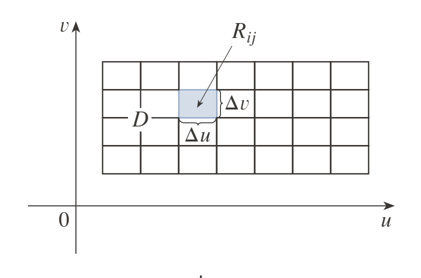
La relación entre integrales de superficie y el área de una superficie es muy parecida a la relación entre integrales de línea y longitud de arco. Suponga que f es una función de tres variables cuyo dominio incluye una superficie S. Se definirá la integral de superficie de f en S de tal modo que, en el caso en el que $f(x, y, z) = 1$, el valor de la integral de superficie sea igual al área de S. Se comenzará con superficies paramétricas y después se tratará con el caso especial en el que S es la gráfica de una función de dos variables.

Superficies paramétricas

Suponga que una superficie S tiene una ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

Suponga primero que el dominio paramétrico D es un rectángulo y se divide en subrectángulos R_{ij} con dimensiones Δu y Δv. Luego la superficie S se divide en las parcelas S_{ij}



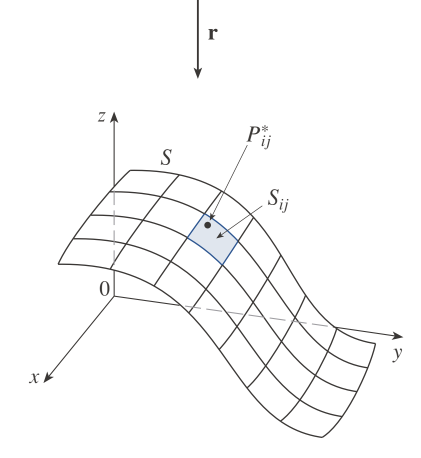


FIGURA 1

correspondientes, como en la figura 1. Se evalúa f en un punto P_{ij}^* en cada parcela, se multiplica por el área ΔS_{ij} de la parcela y se forma la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$

Se toma entonces como límite el número de aumentos de parcelas y se define la **integral de superficie de *f* en la superficie *S*** como

1
$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$

Nótese la analogía con la definición de una integral de línea (16.2.2) y también la analogía con la definición de una integral doble (15.1.5).

Para evaluar la integral de superficie de la ecuación 1 se aproxima el área de la parcela ΔS_{ij} por medio del área de un paralelogramo de aproximación en el plano tangente. En el análisis del área de una superficie en la sección 16.6 se hizo la aproximación

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u\, \Delta v$$

donde
$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

son los vectores tangentes en una esquina de S_{ij}. Si los componentes son continuos y $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son diferentes de cero y no paralelos en el interior de D, se puede demostrar con base en la definición 1, aun si D no es un rectángulo, que

Suponga que la superficie es cubierta solo una vez cuando (u, v) abarca D. El valor de la integral de superficie no depende de la parametrización usada.

2
$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Esto debería compararse con la fórmula para una integral de línea:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Obsérvese también que

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = A(S)$$

La fórmula 2 permite calcular una integral de superficie convirtiéndola en una integral doble en el dominio paramétrico D. Al usar esta fórmula, recuerde que $f(\mathbf{r}(u, v))$ se evalúa escribiendo $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$ en la fórmula para $f(x, y, z)$.

EJEMPLO 1 Calcule la integral de superficie $\iint_S x^2\, dS$, donde S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 16.6.4, use la representación paramétrica

$$x = \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \cos\phi \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

es decir, $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi \cos\theta\, \mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j} + \cos\phi\, \mathbf{k}$

Como en el ejemplo 16.6.10, se puede calcular que

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \operatorname{sen}\phi$$

Así, por la fórmula 2,

$$\iint_S x^2\, dS = \iint_D (\operatorname{sen}\phi \cos\theta)^2 |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi)\, d\phi$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{2\pi} \Big[-\cos\phi + \tfrac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}$$ ■

Aquí se usan las identidades

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$
$$\operatorname{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi$$

En cambio, se podrían usar las fórmulas 64 y 67 de la tabla de integrales, que se encuentra al final del libro.

Las integrales de superficie tienen aplicaciones similares a las de las integrales que ya se consideraron. Por ejemplo, si una hoja delgada (de lámina) tiene la forma de una superficie S y la densidad (masa por unidad de área) en el punto (x, y, z) es $\rho(x, y, z)$, entonces la **masa** total de la hoja es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

y el **centro de masa** es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\,\rho(x, y, z)\, dS$$

Momentos de inercia también pueden definirse, como ya se hizo antes (véase el ejercicio 41).

Gráficas de funciones

Toda superficie S con ecuación $z = g(x, y)$ puede considerarse una superficie paramétrica con ecuaciones paramétricas

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y)$$

así que se tiene $\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$

Por tanto

3 $$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Por consiguiente, en este caso, la fórmula 2 se convierte en

4
$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

Fórmulas similares se aplican cuando es más conveniente proyectar S en el plano yz o el plano xz. Por ejemplo, si S es una superficie con ecuación $y = h(x, z)$ y D es su proyección en el plano xz, entonces

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, h(x, z), z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA$$

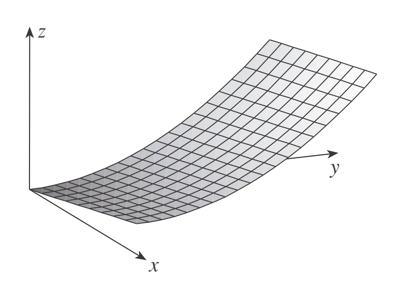


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Evalúe $\iint_S y\, dS$, donde S es la superficie $z = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. (Véase la figura 2.)

SOLUCIÓN Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

la fórmula 4 da

$$\iint_S y\, dS = \iint_D y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 dx\, \sqrt{2}\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\, dy$$

$$= \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 2y^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$ ■

Si S es una superficie suave por partes, es decir, una unión finita de superficies suaves $S_1, S_2, \ldots, S_n$ que intersecan solo a lo largo de sus fronteras, la integral de superficie de f en S está definida por

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)\, dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x, y, z)\, dS$$

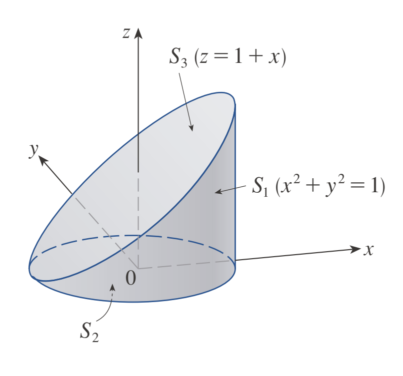


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_S z\, dS$, donde S es la superficie cuyos lados S_1 están dados por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cuya base S_2 es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en el plano $z = 0$ y cuya parte superior S_3 es la parte del plano $z = 1 + x$ que se ubica sobre S_2.

SOLUCIÓN La superficie S aparece en la figura 3. (Se ha cambiado la posición usual de los ejes para obtener un mejor aspecto de S.) Para S_1 se usan θ y z como parámetros (véase el ejemplo 16.6.5) y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

donde

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \qquad \text{y} \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1 + x = 1 + \cos\theta$$



Por tanto

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

y
$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

Así la integral de superficie en S_1 es

$$\iint_{S_1} z\,dS = \iint_D z\,|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} z\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[1 + 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

Como S_2 está en el plano $z = 0$, se tiene

$$\iint_{S_2} z\,dS = \iint_{S_2} 0\,dS = 0$$

La superficie superior S_3 se halla sobre el disco unitario D y forma parte del plano $z = 1 + x$. Así, tomando $g(x, y) = 1 + x$ en la fórmula 4 y al convertir a coordenadas polares, se tiene

$$\iint_{S_3} z\,dS = \iint_D (1 + x)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r\cos\theta)\sqrt{1 + 1 + 0}\;r\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + r^2\cos\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi$$

Por tanto

$$\iint_S z\,dS = \iint_{S_1} z\,dS + \iint_{S_2} z\,dS + \iint_{S_3} z\,dS$$

$$= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\,\pi = \left(\tfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$$ ■

Superficies orientadas

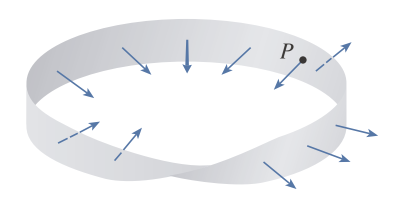


FIGURA 4
Una banda de Möbius

Para definir integrales de superficie de campos vectoriales, se debe descartar superficies no orientables como la banda de Möbius que aparece en la figura 4. [Este objeto debe su nombre al geómetra alemán August Möbius (1790-1868).] Usted puede construir una por sí mismo tomando una larga tira de papel de forma rectangular, dándole media vuelta y uniendo las orillas cortas como en la figura 5. Si una hormiga se arrastrara a lo largo de la banda de Möbius partiendo del punto P, terminaría en el "otro lado" de la banda (es decir, con el lado superior apuntando en la dirección opuesta). Entonces, si la hormiga siguiera arrastrándose en la misma dirección, acabaría de vuelta en el mismo punto P sin haber cruzado nunca una orilla. (Si usted ha construido una banda de Möbius, trate de dibujar a lápiz una línea intermedia.) Por tanto, una banda de Möbius tiene en realidad un solo lado. Usted puede graficar la banda de Möbius usando las ecuaciones paramétricas del ejercicio 16.6.32.

TEC Visual 16.7 muestra una banda de Möbius con un vector normal que puede moverse a lo largo de la superficie.

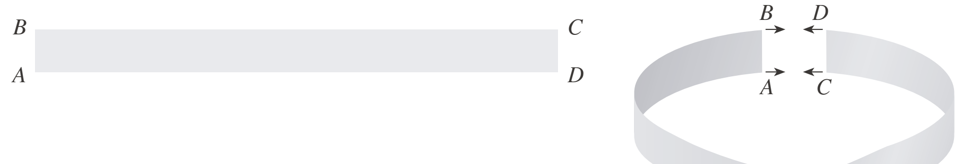



FIGURA 5
Construcción de una banda de Möbius

En lo sucesivo solo se considerarán superficies orientables (de dos lados). Comience con una superficie S que tiene un plano tangente en cada punto (x, y, z) en S (excepto en cualquier punto frontera). Hay dos vectores normales unitarios $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ en (x, y, z). (Véase la figura 6.)

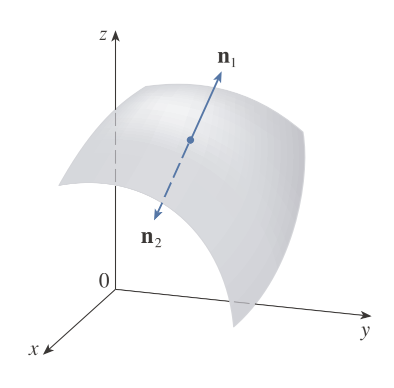
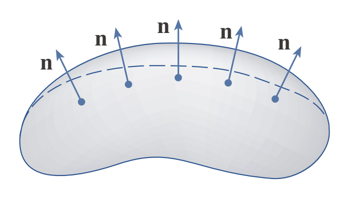


FIGURA 6

Es posible elegir un vector normal unitario $\mathbf{n}$ en cada uno de esos puntos (x, y, z) de tal forma que $\mathbf{n}$ varíe continuamente en S, y entonces S se llama una **superficie orientada** y la selección dada de $\mathbf{n}$ proporciona a S una **orientación**. Existen dos orientaciones posibles para cualquier superficie orientable (véase la figura 7).



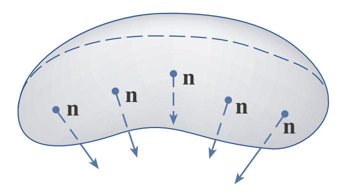


FIGURA 7
Las dos orientaciones de una superficie orientable

Para una superficie $z = g(x, y)$ dada como la gráfica de g, se usa la ecuación 3 para asociar con la superficie una orientación natural dada por el vector normal unitario

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Como el componente $\mathbf{k}$ es positivo, esto da la orientación *hacia arriba* de la superficie.

Si S es una superficie orientable suave dada en forma paramétrica por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, es automáticamente provista con la orientación del vector normal unitario

$$\boxed{6} \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$



y la orientación opuesta está dada por $-\mathbf{n}$. Por ejemplo, en el ejemplo 16.6.4 se determina la representación paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a \cos \phi \, \mathbf{k}$$

para la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Luego, en el ejemplo 16.6.10 se determina que

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, \mathbf{k}$$

y
$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \operatorname{sen} \phi$$

Así, la orientación inducida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ es definida por el vector normal unitario

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + \cos \phi \, \mathbf{k} = \frac{1}{a}\mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Obsérvese que $\mathbf{n}$ apunta en la misma dirección que el vector de posición, es decir hacia fuera de la esfera (véase la figura 8). La orientación opuesta (hacia dentro) se habría obtenido si se hubiera invertido el orden de los parámetros porque $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$ (véase la figura 9).

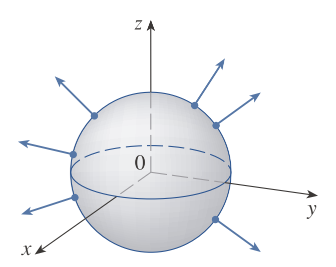


FIGURA 8
Orientación positiva

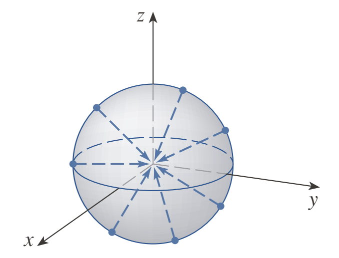


FIGURA 9
Orientación negativa

Para una **superficie cerrada**, es decir, una superficie que es la frontera de una región sólida E, la convención es que la **orientación positiva** es aquella para la que los vectores normales apuntan *hacia fuera* de E, y los normales que apuntan hacia dentro dan la orientación negativa (véanse las figuras 8 y 9).

Integrales de superficie de campos vectoriales

Suponga que S es una superficie orientada con vector normal unitario $\mathbf{n}$ e imagine un fluido con densidad $\rho(x, y, z)$ y campo de velocidad $\mathbf{v}(x, y, z)$ que fluye a través de S. (Conciba a S como una superficie imaginaria que no impide que el fluido fluya, como una red para pescar de un lado a otro de un río.) Entonces, la razón de flujo (masa por unidad de tiempo) por unidad de área es $\rho\mathbf{v}$. Si se divide S en pequeñas parcelas S_{ij}, como en la figura 10 (compare con la figura 1), S_{ij} es casi planar y por tanto se puede aproximar la masa de fluido por unidad de tiempo que cruza S_{ij} en la dirección del normal $\mathbf{n}$ mediante la cantidad

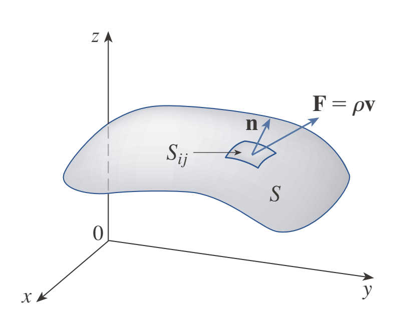


FIGURA 10

$$(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$$

donde ρ, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{n}$ son evaluados en algún punto en S_{ij}. (Recuerde que el componente del vector $\rho\mathbf{v}$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{n}$ es $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.) Al sumar estas cantidades y tomar el límite se obtiene, de acuerdo con la definición 1, la integral de superficie de la función $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ en S:

7
$$\iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, dS$$

y esto se interpreta físicamente como la razón de flujo por S.



Si se escribe $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{F}$ es también un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y la integral de la ecuación 7 se convierte en

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Una integral de superficie de esta forma ocurre con frecuencia en física, aun si $\mathbf{F}$ no es $\rho\mathbf{v}$, y se llama *integral de superficie* (o *integral de flujo*) de $\mathbf{F}$ en S.

8 Definición Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo definido en una superficie orientada S con vector normal unitario $\mathbf{n}$, entonces la **integral de superficie de F en *S*** es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Esta integral también se llama **flujo** de $\mathbf{F}$ por S.

En palabras, la definición 8 establece que la integral de superficie de un campo vectorial en S es igual a la integral de superficie de su componente normal en S (como se definió previamente).

Si S está dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, entonces $\mathbf{n}$ está dado por la ecuación 6, y de la definición 8 y la ecuación 2 se tiene

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, dS$$

$$= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

donde D es el dominio paramétrico. Así se tiene

Compare la ecuación 9 con la expresión similar para evaluar integrales de línea de campos vectoriales en la definición 16.2.13:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

9
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

La figura 11 muestra el campo vectorial $\mathbf{F}$ del ejemplo 4 en puntos en la esfera unitaria.

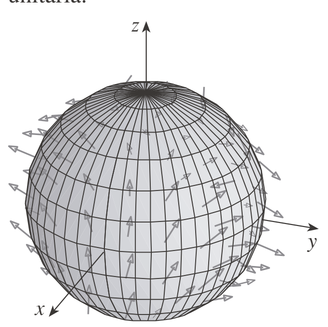


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Determine el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ a través de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 1, use la representación paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Entonces $$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{k}$$

y, del ejemplo 16.6.10,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \operatorname{sen}^2\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{k}$$

Por tanto

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos\phi \operatorname{sen}^2\phi \cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \cos\theta$$

y, por la fórmula 9, el flujo es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (2 \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi \operatorname{sen}^2\theta)\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \qquad \left(\text{ya que } \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

por el mismo cálculo que en el ejemplo 1. ■

Si, por ejemplo, el campo vectorial del ejemplo 4 es un campo de velocidad que describe el flujo de un fluido con densidad 1, la respuesta, $4\pi/3$, representa la razón de flujo por la esfera unitaria en unidades de masa por unidad de tiempo.

En el caso de una superficie S dada por una gráfica $z = g(x, y)$, se puede concebir a x y y como parámetros y usar la ecuación 3 para escribir

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Por lo que la fórmula 9 se convierte en

10
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA$$

Esta fórmula supone la orientación hacia arriba de S; para una orientación hacia abajo se multiplica por –1. Pueden elaborarse fórmulas similares si S está dada por $y = h(x, z)$ o $x = k(y, z)$. (Véanse los ejercicios 37 y 38.)

EJEMPLO 5 Evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y S es la frontera de la región sólida E encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

SOLUCIÓN S consta de una superficie parabólica superior S_1 y una superficie circular inferior S_2. (Véase la figura 12.) Como S es una superficie cerrada, use la convención de orientación positiva (hacia fuera). Esto significa que S_1 está orientada hacia arriba y se puede usar la ecuación 10, siendo D la proyección de S_1 en el plano xy, es decir el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. Puesto que

$$P(x, y, z) = y \qquad Q(x, y, z) = x \qquad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

en S_1 y
$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

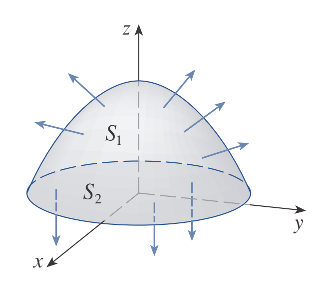


FIGURA 12

se tiene

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA$$

$$= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2]\, dA$$

$$= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 4r^2\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3 + 4r^3\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4} + \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\right) d\theta = \tfrac{1}{4}(2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}$$

El disco S_2 está orientado hacia abajo, así que su vector normal unitario es $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ y se tiene

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})\, dS = \iint_D (-z)\, dA = \iint_D 0\, dA = 0$$

ya que $z = 0$ en S_2. Por último, por definición se calcula $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ como la suma de las integrales de superficie de $\mathbf{F}$ en las piezas S_1 y S_2:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$ ■

Aunque se motiva la integral de superficie de un campo vectorial con el ejemplo de flujo de un fluido, este concepto también surge en otras situaciones físicas. Por ejemplo, si $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico (véase el ejemplo 16.1.5), la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

se llama **flujo eléctrico** de $\mathbf{E}$ por la superficie S. Una de las leyes más importantes de la electrostática es la **ley de Gauss**, la cual sostiene que la carga neta encerrada por una superficie cerrada S es

11 $$Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

donde ε_0 es una constante (llamada permitividad del espacio libre) que depende de las unidades usadas. (En el sistema SI, $\varepsilon_0 \approx 8.8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}$.) Por tanto, si el campo vectorial $\mathbf{F}$ en el ejemplo 4 representa un campo eléctrico, se puede concluir que la carga encerrada por S es $Q = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0$.

Otra aplicación de integrales de superficie ocurre en el estudio del flujo de calor. Suponga que la temperatura en un punto (x, y, z) en un cuerpo es $u(x, y, z)$. Entonces, el **flujo de calor** se define como el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -K\,\nabla u$$

donde K es una constante determinada experimentalmente llamada **conductividad** de la sustancia. La razón de flujo de calor por la superficie S en el cuerpo está dada entonces por la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

EJEMPLO 6 La temperatura u en una pelota de metal es proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la pelota. Determine la razón de flujo de calor por una esfera S de radio a con centro en el centro de la pelota.

SOLUCIÓN Al tomar el origen como el centro de la pelota, se tiene

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

donde C es la constante de proporcionalidad. Entonces, el flujo de calor es

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K \nabla u = -KC(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k})$$

donde K es la conductividad del metal. En vez de emplear la parametrización usual de la esfera como en el ejemplo 4, se observa que el vector normal unitario hacia fuera respecto a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el punto (x, y, z) es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

así que
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Pero en S se tiene $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, de manera que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. En consecuencia, la razón de flujo de calor por S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -2aKC \iint_S dS$$

$$= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3$$ ■

16.7 EJERCICIOS

1. Sea S la superficie de la caja encerrada por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$. Aproxime $\iint_S \cos(x + 2y + 3z)\, dS$ con una suma de Riemann como en la definición 1, tomando las parcelas S_{ij} como los cuadrados que son las caras de la caja S y los puntos P_{ij}^* como los centros de los cuadrados.

2. Una superficie S consta del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, junto con sus discos superior e inferior. Suponga que sabe que f es una función continua con

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2 \qquad f(0, \pm 1, 0) = 3 \qquad f(0, 0, \pm 1) = 4$$

Estime el valor de $\iint_S f(x, y, z)\, dS$ con una suma de Riemann, tomando las parcelas S_{ij} como los cuatro cuartos de cilindro y los discos superior e inferior.

3. Sea H el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geqslant 0$, y suponga que f es una función continua con $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ y $f(-3, -4, 5) = 12$. Al dividir H en cuatro parcelas, estime el valor de $\iint_H f(x, y, z)\, dS$.

4. Suponga que $f(x, y, z) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, donde g es una función de una variable tal que $g(2) = -5$. Evalúe $\iint_S f(x, y, z)\, dS$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5-20 Evalúe la integral de superficie.

5. $\iint_S (x + y + z)\, dS$,
S es el paralelogramo con ecuaciones paramétricas $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 + 2u + v$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 1$

6. $\iint_S xyz\, dS$,
S es el cono con ecuaciones paramétricas $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$

7. $\iint_S y\, dS$, S es el helicoide con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \operatorname{sen} v, v \rangle$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

8. $\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$,
S es la superficie con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2 \rangle$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$

9. $\iint_S x^2yz\, dS$,
S es la parte del plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está sobre el rectángulo $[0, 3] \times [0, 2]$

10. $\iint_S xz\, dS$,
S es la parte del plano $2x + 2y + z = 4$ que está en el primer octante

11. $\iint_S x^2z^2\, dS$,
S es la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre los planos $z = 1$ y $z = 3$

12. $\iint_S y^2\, dS$,
S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el plano xy

13. $\iint_S z^2\, dS$,
S es la parte del paraboloide $x = y^2 + z^2$ dada por $0 \leqslant x \leqslant 1$

14. $\iint_S y^2z^2\, dS$,
S es la parte del cono $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ dado por $0 \leqslant y \leqslant 5$

15. $\iint_S x\, dS$,
S es la superficie $y = x^2 + 4z$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

16. $\iint_S y^2\, dS$,
S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

17. $\iint_S (x^2z + y^2z)\, dS$,
S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$

18. $\iint_S (x + y + z)\, dS$,
S es la parte del medio cilindro $x^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$, que está entre los planos $y = 0$ y $y = 2$

19. $\iint_S y\, dS$,
S es la parte del paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 4$

20. $\iint_S xz\, dS$,
S es la frontera de la región encerrada por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$ y $x + y = 5$

21-32 Evalúe la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para el campo vectorial dado $\mathbf{F}$ y la superficie orientada S. En otras palabras, determine el flujo de $\mathbf{F}$ por S. Para superficies cerradas, use la orientación positiva (hacia fuera).

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^{xy}\, \mathbf{i} - 3ze^{xy}\, \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$
S es el paralelogramo del ejercicio 5 con orientación hacia arriba

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + x\, \mathbf{k}$,
S es el helicoide del ejercicio 7 con orientación hacia arriba

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\, \mathbf{i} + yz\, \mathbf{j} + zx\, \mathbf{k}$, S es la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está sobre el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ y tiene orientación hacia arriba.

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} + y\, \mathbf{k}$,
S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geqslant 0$ orientado en la dirección del eje y positivo

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$, S es la esfera con radio 1 y centro en el origen

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\, \mathbf{i} - x\, \mathbf{j} + 2z\, \mathbf{k}$, S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$, orientado hacia abajo

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\, \mathbf{j} - z\, \mathbf{k}$,
S consta del paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ y el disco $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 1$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\, \mathbf{i} + zx\, \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$,
S es la superficie $z = x \operatorname{sen} y$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ con orientación hacia arriba

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\, \mathbf{i} - z\, \mathbf{j} + y\, \mathbf{k}$,
S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante, con orientación hacia el origen

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\, \mathbf{i} + 4x^2\, \mathbf{j} + yz\, \mathbf{k}$, S es la superficie $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, con orientación hacia arriba

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\, \mathbf{i} + y^2\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$, S es la frontera del medio cilindro sólido $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\, \mathbf{i} + (z - y)\, \mathbf{j} + x\, \mathbf{k}$,
S es la superficie del tetraedro con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

SAC **33.** Evalúe $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$ con cuatro decimales, donde S es la superficie $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

SAC **34.** Determine el valor exacto de $\iint_S xyz\, dS$, donde S es la superficie $z = x^2y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$

SAC **35.** Determine el valor de $\iint_S x^2y^2z^2\, dS$ con cuatro decimales, donde S es la parte del paraboloide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy.

SAC **36.** Halle el flujo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)\, \mathbf{i} - x^2y\, \mathbf{j} + z^2e^{x/5}\, \mathbf{k}$$

a través de la parte del cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está sobre el plano xy y entre los planos $x = -2$ y $x = 2$ con orientación hacia arriba. Ilustre con un sistema algebraico computacional para dibujar el cilindro y el campo vectorial en la misma pantalla.

37. Halle una fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ similar a la fórmula 10 para el caso en que S está dada por $y = h(x, z)$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario que apunta a la izquierda.



38. Halle una fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ similar a la fórmula 10 para el caso en que S está dada por $x = k(y, z)$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario que apunta al frente (es decir, hacia el espectador cuando los ejes se trazan en la forma habitual).

39. Halle el centro de masa del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$ si tiene densidad constante.

40. Determine la masa de un embudo delgado en forma de un cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 4$, si su función de densidad es $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

41. (a) Dé una expresión integral para el momento de inercia I_z alrededor del eje z de una hoja delgada en forma de una superficie S, si la función de densidad es ρ.
(b) Determine el momento de inercia alrededor del eje z del embudo del ejercicio 40.

42. Sea S la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está sobre el plano $z = 4$. Si S tiene densidad constante k, determine (a) el centro de masa y (b) el momento de inercia alrededor del eje z.

43. Un fluido tiene una densidad 870 kg/m^3 y fluye con velocidad $\mathbf{v} = z\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, donde x, y y z se miden en metros y los componentes de $\mathbf{v}$ en metros por segundo. Determine la razón de flujo hacia fuera por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

44. El agua de mar tiene una densidad de 1025 kg/m^3 y fluye en un campo de velocidad $\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, donde x, y y z se miden en metros y los componentes de $\mathbf{v}$ en metros por segundo. Determine la razón de flujo hacia fuera por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$.

45. Use la ley de Gauss para determinar la carga contenida en el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$ si el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

46. Use la ley de Gauss para determinar la carga encerrada por el cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ si el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

47. La temperatura en el punto (x, y, z) en una sustancia con conductividad $K = 6.5$ es $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine la razón de flujo de calor hacia dentro por la superficie cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

48. La temperatura en un punto en una pelota con conductividad K es inversamente proporcional a la distancia del centro de la pelota. Determine la razón de flujo de calor por una esfera S de radio a con centro en el centro de la pelota.

49. Sea $\mathbf{F}$ un campo cuadrado inverso, es decir $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = c\mathbf{r}/|\,\mathbf{r}\,|^3$ para alguna constante c, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Demuestre que el flujo de $\mathbf{F}$ por una esfera S con centro en el origen es independiente del radio de S.

16.8 Teorema de Stokes

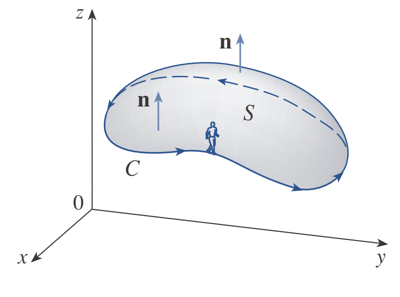


FIGURA 1

El teorema de Stokes puede considerarse una versión en dimensiones superiores del teorema de Green. Mientras que el teorema de Green relaciona una integral doble en una región plana D con una integral de línea alrededor de su curva frontera plana, el teorema de Stokes relaciona una integral de superficie en una superficie S con una integral de línea alrededor de la curva frontera de S (la cual es una curva en el espacio). La figura 1 muestra una superficie orientada con vector normal uniforme $\mathbf{n}$. La orientación de S induce la **orientación positiva de la curva frontera C** que aparece en la figura. Esto significa que si usted camina en la dirección positiva alrededor de C con la cabeza en la dirección de $\mathbf{n}$, entonces la superficie siempre estará a su izquierda.

Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada, suave por partes y acotada por una curva frontera cerrada simple suave por partes, C, con orientación positiva. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyos componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Puesto que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad \text{y} \qquad \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

George Stokes

El teorema de Stokes toma su nombre del físico matemático irlandés Sir George Stokes (1819-1903). Stokes fue profesor de la Universidad de Cambridge (de hecho, ocupó el mismo puesto que Newton, profesor lucasiano de matemáticas) y fue especialmente notable por sus estudios de luz y flujo de fluidos. Lo que se llama teorema de Stokes en realidad fue descubierto por el físico escocés Sir William Thomson (1824-1907, conocido como Lord Kelvin). Stokes se enteró de este teorema en una carta de Thomson en 1850 y pidió a sus alumnos comprobarlo en un examen en la Universidad de Cambridge en 1854. No se sabe si alguno de esos estudiantes fue capaz de hacer eso.

el teorema de Stokes establece que la integral de línea alrededor de la curva frontera de S del componente tangencial de $\mathbf{F}$ es igual a la integral de superficie en S del componente normal del rotacional de $\mathbf{F}$.

La curva frontera con orientación positiva de la superficie orientada S suele escribirse como ∂S, así que el teorema de Stokes puede expresarse como

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Existe una analogía entre el teorema de Stokes, el teorema de Green y el teorema fundamental del cálculo. Como antes, hay una integral que implica derivadas en el miembro izquierdo de la ecuación 1 (recuerde que rot $\mathbf{F}$ es una especie de derivada de $\mathbf{F}$) y el miembro derecho implica los valores de $\mathbf{F}$ solo en la *frontera* de S.

De hecho, en el caso especial en el que la superficie S es plana y se tiende en el plano xy con orientación hacia arriba, el vector normal unitario es $\mathbf{k}$, la integral de superficie se convierte en una integral doble y el teorema de Stokes se convierte en

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Este es precisamente el vector del teorema de Green dado en la ecuación 16.5.12. Se ve así que el teorema de Green es en realidad un caso especial del teorema de Stokes.

Aunque el teorema de Stokes es demasiado difícil para comprobarse en su plena generalidad, se puede dar una comprobación cuando S es una gráfica y $\mathbf{F}$, S y C se comportan sin irregularidades.

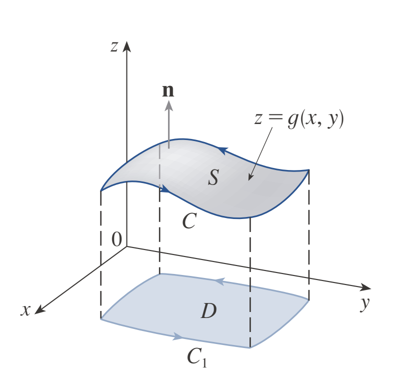
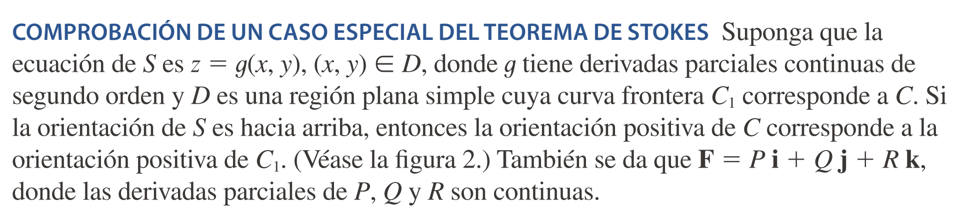


FIGURA 2



COMPROBACIÓN DE UN CASO ESPECIAL DEL TEOREMA DE STOKES Suponga que la ecuación de S es $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde g tiene derivadas parciales continuas de segundo orden y D es una región plana simple cuya curva frontera C_1 corresponde a C. Si la orientación de S es hacia arriba, entonces la orientación positiva de C corresponde a la orientación positiva de C_1. (Véase la figura 2.) También se da que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, donde las derivadas parciales de P, Q y R son continuas.

Como S es una gráfica de una función, se puede aplicar la fórmula 16.7.10 con $\mathbf{F}$ reemplazada por rot $\mathbf{F}$. El resultado es

$$\boxed{2} \qquad \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA$$

donde las derivadas parciales de P, Q y R se evalúan en $(x, y, g(x, y))$. Si

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

es una representación paramétrica de C_1, una representación paramétrica de C es

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = g(x(t), y(t)) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$



Esto permite, con la ayuda de la regla de la cadena, evaluar la integral de línea como sigue:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right) dt \\
&= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right] dt \\
&= \int_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right] dt \\
&= \int_{C_1} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] dA
\end{aligned}$$

donde se ha usado el teorema de Green en el último paso. Luego, usando de nuevo la regla de la cadena y recordando que P, Q y R son funciones de x, y y z, además que z es en sí misma una función de x y y, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \Bigg[&\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) \\
&- \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right)\Bigg] dA
\end{aligned}$$

Cuatro de los términos de esta integral doble se eliminan y los seis términos restantes pueden disponerse para coincidir con el lado derecho de la ecuación 2. Por consiguiente

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$ ■

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ y C es la curva de intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C en sentido contrario a las manecillas del reloj, cuando se mira desde arriba.)

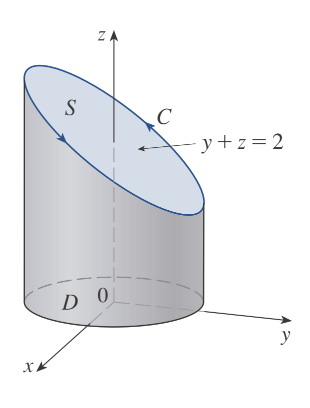


FIGURA 3

SOLUCIÓN La curva C (una elipse) aparece en la figura 3. Aunque $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ podría evaluarse directamente, es más fácil usar el teorema de Stokes. Primero calcule

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\,\mathbf{k}$$

Aunque hay muchas superficies con frontera C, la elección más conveniente es la región elíptica S en el plano $y + z = 2$ acotado por C. Si se orienta S hacia arriba, entonces C tiene la

orientación positiva inducida. La proyección D de S en el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, así que al usar la ecuación 16.7.10 con $z = g(x, y) = 2 - y$, se tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \operatorname{sen} \theta \right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi$$ ■

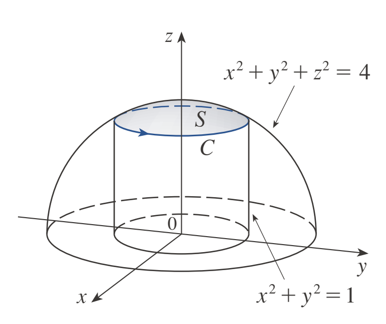


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Use el teorema de Stokes para calcular la integral $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\, \mathbf{i} + yz\, \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$ y S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el plano xy. (Véase la figura 4.)

SOLUCIÓN Para hallar la curva frontera C se resuelven las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$. Al restar, se obtiene $z^2 = 3$, así que $z = \sqrt{3}$ (ya que $z > 0$). De este modo, C es el círculo dado por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. Una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \sqrt{3}\, \mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

así que $\quad \mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j}$

Igualmente se tiene

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3} \cos t\, \mathbf{i} + \sqrt{3} \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \cos t \operatorname{sen} t\, \mathbf{k}$$

Por tanto, por el teorema de Stokes,

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3} \cos t \operatorname{sen} t + \sqrt{3} \operatorname{sen} t \cos t \right) dt$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$ ■

Adviértase que en el ejemplo 2 se calcula una integral de superficie simplemente conociendo los valores de $\mathbf{F}$ en la curva frontera C. Esto significa que si se tiene otra superficie orientada con la misma curva frontera C, ¡se obtiene exactamente el mismo valor para la integral de superficie!

En general, si S_1 y S_2 son superficies orientadas con la misma curva frontera orientada C y ambas satisfacen las hipótesis del teorema de Stokes, entonces

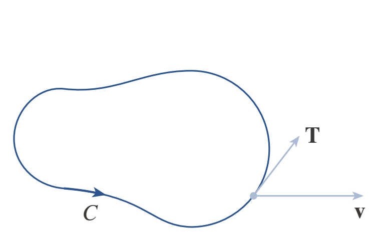
3 $$\iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Este hecho es útil cuando es difícil integrar en una superficie pero fácil integrar en la otra.

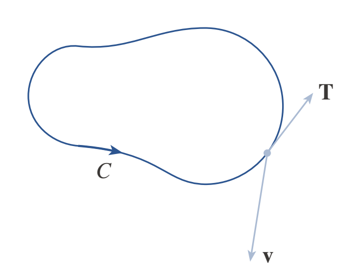
Ahora se usa el teorema de Stokes para arrojar un poco de luz sobre el significado del vector rotacional. Suponga que C es una curva orientada cerrada y $\mathbf{v}$ representa el campo de velocidad en el flujo de fluidos. Considere la integral de línea

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

y recuerde que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ es el componente de $\mathbf{v}$ en la dirección del vector tangente unitario $\mathbf{T}$. Esto significa que cuanto más se acerca la dirección de $\mathbf{v}$ a la dirección de $\mathbf{T}$, mayor es el valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Así, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ es una medida de la tendencia del fluido a moverse alrededor de C y se llama la **circulación** de $\mathbf{v}$ alrededor de C. (Véase la figura 5.)



(a) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} > 0$, circulación positiva



(b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} < 0$, circulación negativa

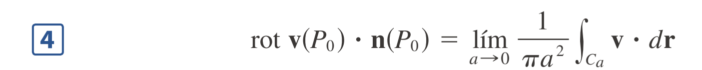
FIGURA 5

Sea ahora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto en el fluido y S_a un disco pequeño con radio a y centro P_0. Entonces $(\text{rot } \mathbf{F})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{F})(P_0)$ para todos los puntos P en S_a, porque rot $\mathbf{F}$ es continua. Así, por el teorema de Stokes, se obtiene la aproximación de la circulación alrededor del círculo frontera C_a:

$$\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \, dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2$$

Esta aproximación mejora cuando $a \to 0$ y se tiene



4 $$\text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Imagine una minúscula rueda de paletas colocada en el fluido en un punto P, como en la figura 6; la rueda de paletas rota más rápido cuando su eje es paralelo a rot $\mathbf{v}$.

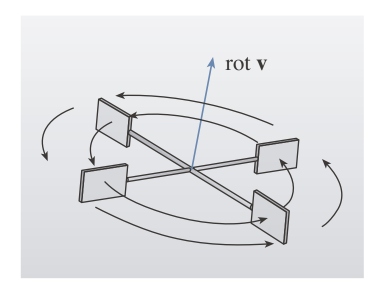


FIGURA 6

La ecuación 4 da la relación entre el rotacional y la circulación. Indica que rot $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ es una medida del efecto de rotación del fluido alrededor del eje $\mathbf{n}$. El efecto de rotación es mayor alrededor del eje paralelo a rot $\mathbf{v}$.

Por último, se menciona que el teorema de Stokes puede usarse para comprobar el teorema 16.5.4 (el cual establece que si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en la totalidad de $\mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo). Por el trabajo previo (teoremas 16.3.3 y 16.3.4) se sabe que $\mathbf{F}$ es conservativo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las trayectorias cerradas C. Dada C, suponga que se puede encontrar una superficie orientable S cuya frontera sea C. (Esto puede hacerse, pero la comprobación requiere técnicas avanzadas.) Entonces, el teorema de Stokes da

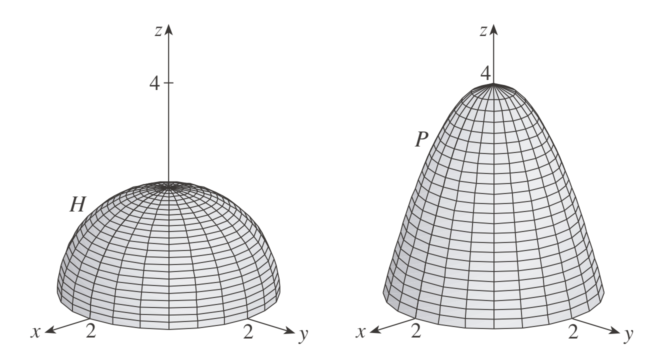
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Una curva que no es simple puede dividirse en varias curvas simples, y las integrales en torno a esas curvas simples son todas ellas 0. Sumando esas integrales se obtiene $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier curva cerrada C.

16.8 EJERCICIOS

1. Se muestran un hemisferio H y una porción P de un paraboloide. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ cuyos componentes tienen derivadas parciales continuas. Explique por qué

$$\iint_H \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



2-6 Use el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} z\, \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$,
S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy, orientado hacia arriba

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^y\, \mathbf{i} + x \cos y\, \mathbf{j} + xz \operatorname{sen} y\, \mathbf{k}$,
S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $y \geqslant 0$ orientado en la dirección del eje y positivo

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\, \mathbf{i} + y^2z^2\, \mathbf{j} + xyz\, \mathbf{k}$,
S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientado hacia arriba

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\, \mathbf{i} + xy\, \mathbf{j} + x^2yz\, \mathbf{k}$,
S consta de la parte superior y los cuatro lados (pero no de la base) del cubo con vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$, orientado hacia fuera

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy}\, \mathbf{i} + e^{xz}\, \mathbf{j} + x^2z\, \mathbf{k}$,
S es la mitad del elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ que está a la derecha del plano xz, orientado en la dirección del eje y positivo.

7-10 Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. En cada caso C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, vista desde arriba.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\, \mathbf{i} + (y + z^2)\, \mathbf{j} + (z + x^2)\, \mathbf{k}$,
C es el triángulo con vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1)

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\, \mathbf{i} + 2xz\, \mathbf{j} + e^{xy}\, \mathbf{k}$,
C es el círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\, \mathbf{i} + yz\, \mathbf{j} + zx\, \mathbf{k}$, C es la frontera de la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ en el primer octante

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\, \mathbf{i} + xz\, \mathbf{j} + (x + y)\, \mathbf{k}$, C es la curva de intersección del plano $z = y + 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

11. (a) Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\, \mathbf{i} + xy^2\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$$

y C es la curva de intersección del plano $x + y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, vista desde arriba.

(b) Grafique tanto el plano como el cilindro con dominios elegidos de tal forma que usted pueda ver la curva C y la superficie que usó en el inciso (a).

(c) Determine ecuaciones paramétricas para C y úselas para graficar C.

12. (a) Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\, \mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\, \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$ y C es la curva de intersección del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, vista desde arriba.

(b) Grafique tanto el paraboloide hiperbólico como el cilindro con dominios elegidos de tal forma que usted pueda ver la curva C y la superficie que usó en el inciso (a).

(c) Determine ecuaciones paramétricas para C y úselas para graficar C.

13-15 Verifique que el teorema de Stokes es cierto para el campo vectorial $\mathbf{F}$ y la superficie S dados.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} - 2\, \mathbf{k}$,
S es el cono $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$ orientado hacia abajo

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2yz\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + 3x\, \mathbf{k}$,
S es la parte del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano $z = 1$, orientado hacia arriba

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\, \mathbf{i} + z\, \mathbf{j} + x\, \mathbf{k}$,
S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geqslant 0$, orientado en la dirección del eje y positivo

16. Sea C una curva suave cerrada simple que se encuentra en el plano $x + y + z = 1$. Demuestre que la integral de línea

$$\int_C z\, dx - 2x\, dy + 3y\, dz$$

depende solo del área de la región encerrada por C y no de la forma de C ni de su ubicación en el plano.

17. Una partícula se mueve a lo largo de segmentos de recta del origen a los puntos (1, 0, 0), (1, 2, 1), (0, 2, 1) y de vuelta al origen bajo la influencia del campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\, \mathbf{i} + 2xy\, \mathbf{j} + 4y^2\, \mathbf{k}$$

Halle el trabajo realizado.

18. Evalúe

$$\int_C (y + \text{sen}\, x)\, dx + (z^2 + \cos y)\, dy + x^3\, dz$$

donde C es la curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, t, \cos t, \text{sen}\, 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. [*Sugerencia*: observe que C yace en la superficie $z = 2xy$.]

19. Si S es una esfera y $\mathbf{F}$ satisface las hipótesis del teorema de Stokes, demuestre que $\iint_S \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

20. Suponga que S y C satisfacen las hipótesis del teorema de Stokes y que f, g tienen derivadas parciales continuas de segundo orden. Use los ejercicios 24 y 26 de la sección 16.5 para demostrar lo siguiente.

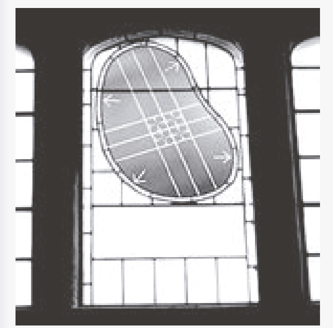
(a) $\int_C (f\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\int_C (f\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

(c) $\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

PROYECTO DE REDACCIÓN TRES HOMBRES Y DOS TEOREMAS

La fotografía muestra un vitral en la Universidad de Cambridge en honor a George Green.



Cortesía de © Masters and Fellows of Gonville and Caius College, Cambridge University, Inglaterra.

Aunque dos de los más importantes teoremas en cálculo vectorial llevan los nombres de George Green y George Stokes, un tercer hombre, William Thomson (también conocido como Lord Kelvin), desempeñó un papel significativo en la formulación, diseminación y aplicación de esos dos resultados. A esos tres hombres les interesó cómo podían ayudar aquellos dos teoremas a explicar y predecir fenómenos físicos en electricidad, magnetismo y flujo de fluidos. Los hechos básicos de este caso se dan en las notas al margen de las páginas 1097 y 1135.

Escriba un reporte sobre los orígenes históricos del teorema de Green y el teorema de Stokes. Explique las semejanzas y relación entre los teoremas. Exponga los papeles que Green, Thomson y Stokes desempeñaron en el descubrimiento de estos teoremas y en volverlos ampliamente conocidos. Muestre cómo ambos teoremas surgieron de la investigación de la electricidad y magnetismo, fueron usados posteriormente para estudiar varios problemas físicos.

El diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente de información tanto biográfica como científica. El libro de Hutchinson [5] hace un recuento de la vida de Stokes y el libro de Thompson [8] es una biografía de Lord Kelvin. Los artículos de Grattan-Guinness [3] y Gray [4] y el libro de Cannell [1] dan información de referencia sobre la extraordinaria vida y obras de Green. Información histórica y matemática adicional se encuentra en los libros de Katz [6] y Kline [7].

1. D. M. Cannell, George Green, *Mathematician and Physicist, 1793-1841: The Background to His Life and Work* (Filadelfia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001).

2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York, Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Green de P. J. Wallis en el volumen XV y los artículos sobre Thomson de Jed Buchwald y sobre Stokes de E. M. Parkinson en el volumen XIII.

3. I. Grattan-Guinness, "Why Did George Green Write his Essay of 1828 on Electricity and Magnetism?", *Amer. Math. Monthly*, vol. 102 (1995), pp. 387-396.

4. J. Gray, "There Was a Jolly Miller", *The New Scientist*, vol. 139 (1993), pp. 24-27.

5. G. E. Hutchinson, *The Enchanted Voyage and Other Studies* (Westport, CT, Greenwood Press, 1978).

6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (New York, HarperCollins, 1993), pp. 678-680.

7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York, Oxford University Press, 1972), pp. 683-685.

8. Sylvanus P. Thompson, *The Life of Lord Kelvin* (New York, Chelsea, 1976).

16.9 El teorema de la divergencia

En la sección 16.5 se reescribió el teorema de Green en una versión vectorial como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

donde C es la curva frontera con orientación positiva de la región plana D. Si se quisiera prolongar este teorema a campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$, se podría hacer la conjetura de que

1 $$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dV$$

donde S es la superficie frontera de la región sólida E. Resulta que la ecuación 1 es cierta, bajo hipótesis apropiadas, y se llama teorema de la divergencia. Nótese su semejanza con el teorema de Green y el teorema de Stokes en cuanto que relaciona la integral de una derivada de una función (div $\mathbf{F}$ en este caso) en una región con la integral de la función original $\mathbf{F}$ en la frontera de la región.

En esta etapa tal vez usted desee repasar los varios tipos de regiones en los que se pudo evaluar integrales triples en la sección 15.6. Se enunciará y comprobará el teorema de la divergencia para regiones E que son simultáneamente de los tipos 1, 2 y 3 y se llamará a esas regiones **regiones sólidas simples**. (Por ejemplo, regiones acotadas por elipsoides o cajas rectangulares son regiones sólidas simples.) La frontera de E es una superficie cerrada, y se usa la convención, presentada en la sección 16.7, de que la orientación positiva es hacia fuera; es decir, de que el vector normal unitario $\mathbf{n}$ está dirigido hacia fuera de E.

El teorema de la divergencia también se conoce como teorema de Gauss, en honor al gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), quien descubrió este teorema durante su investigación sobre la electrostática. En Europa oriental el teorema de la divergencia se conoce como teorema de Ostrogradsky, en honor al matemático ruso Mijail Ostrogradsky (1801-1862), quien publicó este resultado en 1826.

El teorema de la divergencia Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, dada con orientación positiva (hacia fuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a E. Entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Así, el teorema de la divergencia sostiene que, en las condiciones dadas, el flujo de $\mathbf{F}$ por la superficie de frontera de E es igual a la integral triple de la divergencia de $\mathbf{F}$ en E.

COMPROBACIÓN Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

así que $$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

Si $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario hacia fuera de S, la integral de superficie en el miembro izquierdo del teorema de la divergencia es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_S P\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S Q\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Por tanto, para comprobar el teorema de la divergencia basta con comprobar las tres



ecuaciones siguientes:

2 $$\iint_S P\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV$$

3 $$\iint_S Q\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV$$

4 $$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

Para comprobar la ecuación 4 se usa el hecho de que E es una región tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xy. Por la ecuación 15.6.6 se tiene

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\,dz\right] dA$$

y por tanto, por el teorema fundamental del cálculo,

5 $$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \left[R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))\right] dA$$

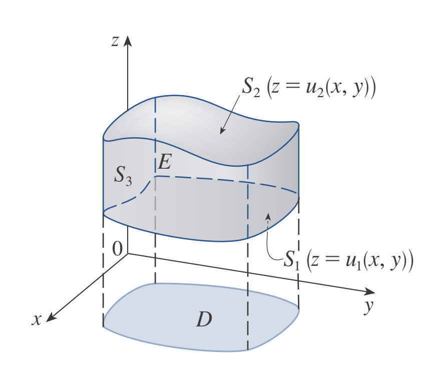


FIGURA 1

La superficie frontera S consta de tres piezas: la superficie inferior S_1, la superficie superior S_2 y posiblemente una superficie vertical S_3, ubicada sobre la curva frontera de D. (Véase la figura 1. Podría ocurrir que S_3 no aparezca, como en el caso de una esfera.) Adviértase que en S_3 se tiene $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$, porque $\mathbf{k}$ es vertical y $\mathbf{n}$ horizontal, de modo que

$$\iint_{S_3} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_3} 0\,dS = 0$$

Así, independientemente de si hay una superficie vertical o no, se puede escribir

6 $$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_2} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

La ecuación de S_2 es $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, y el vector normal hacia fuera $\mathbf{n}$ apunta hacia arriba, así que de la ecuación 16.7.10 (con $\mathbf{F}$ reemplazada por $R\,\mathbf{k}$) se tiene

$$\iint_{S_2} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D R(x, y, u_2(x, y))\,dA$$

En S_1 se tiene $z = u_1(x, y)$, pero aquí el normal hacia fuera $\mathbf{n}$ apunta hacia abajo, así que se multiplica por -1:

$$\iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_D R(x, y, u_1(x, y))\,dA$$

Por consiguiente, la ecuación 6 da

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \left[R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))\right] dA$$

La comparación con la ecuación 5 muestra que

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

Nótese que el método de comprobación del teorema de la divergencia es muy similar al del teorema de Green.

Las ecuaciones 2 y 3 se comprueban en forma similar usando las expresiones para E como región tipo 2 o tipo 3, respectivamente. ■

EJEMPLO 1 Determine el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ en la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN Primero se calcula la divergencia de $\mathbf{F}$:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

La esfera unitaria S es la frontera de la pelota unitaria B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Así, el teorema de la divergencia da el flujo como

La solución del ejemplo 1 debería compararse con la solución del ejemplo 16.7.4.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_B 1\,dV = V(B) = \tfrac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$ ■

EJEMPLO 2 Evalúe $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + \left(y^2 + e^{xz^2}\right)\mathbf{j} + \text{sen}(xy)\,\mathbf{k}$$

y S es la superficie de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, así como $y + z = 2$. (Véase la figura 2.)

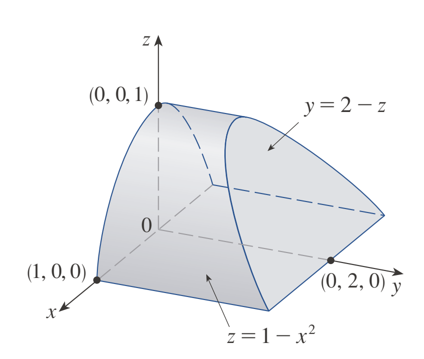


FIGURA 2

SOLUCIÓN Sería extremadamente difícil evaluar directamente la integral de superficie dada. (Se tendrían que evaluar cuatro integrales de superficie correspondientes a las cuatro piezas de S.) Además, la divergencia de $\mathbf{F}$ es mucho menos complicada que la propia $\mathbf{F}$:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + e^{xz^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\text{sen}\,xy) = y + 2y = 3y$$

Por tanto, use el teorema de la divergencia para transformar la integral de superficie dada en una integral triple. La manera más fácil de evaluar la integral triple es expresar E como una región tipo 3:

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - z\right\}$$

Entonces se tiene

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_E 3y\,dV$$

$$= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y\,dy\,dz\,dx = 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\,dz\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[(x^2+1)^3 - 8\right]dx$$

$$= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)\,dx = \frac{184}{35}$$ ■



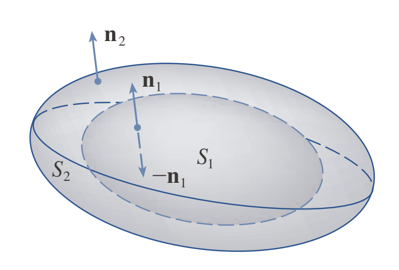


FIGURA 3

Aunque se ha comprobado el teorema de la divergencia solo para regiones sólidas simples, puede demostrarse para regiones que son uniones finitas de regiones sólidas simples. (El procedimiento es similar al que se usó en la sección 16.4 para ampliar el teorema de Green.)

Por ejemplo, considere la región E que se ubica entre las superficies cerradas S_1 y S_2, donde S_1 está dentro de S_2. Sean $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ los vectores normales hacia fuera de S_1 y S_2. Entonces, la superficie frontera de E es $S = S_1 \cup S_2$ y su vector normal $\mathbf{n}$ está dado por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ en S_1 y por $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ en S_2. (Véase la figura 3.) Al aplicar el teorema de la divergencia a S se obtiene

7
$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$
$$= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1)\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, dS$$
$$= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

EJEMPLO 3 En el ejemplo 16.1.5 se considera el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

donde la carga eléctrica Q se localiza en el origen y $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ es un vector de posición. Use el teorema de la divergencia para demostrar que el flujo eléctrico de $\mathbf{E}$ por cualquier superficie cerrada S_2 que encierra al origen es

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\varepsilon Q$$

SOLUCIÓN La dificultad es que no se tiene una ecuación explícita para S_2, porque es *cualquier* superficie cerrada que encierra al origen. La más simple de esas superficies sería una esfera, así que sea S_1 una esfera pequeña con radio a y centro en el origen. Usted puede verificar que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. (Véase el ejercicio 23.) Por tanto, la ecuación 7 da

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

La cuestión de este cálculo es que se puede calcular la integral de superficie en S_1 porque S_1 es una esfera. El vector normal en $\mathbf{x}$ es $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. En consecuencia

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

ya que la ecuación de S_1 es $|\mathbf{x}| = a$. Así se tiene

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q$$

Esto indica que el flujo eléctrico de $\mathbf{E}$ es $4\pi\varepsilon Q$ a través de *cualquier* superficie cerrada S_2 que contenga al origen. [Este es un caso especial de la ley de Gauss (ecuación 16.7.11) para una carga. La relación entre ε y ε_0 es $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.] ■



Otra aplicación del teorema de la divergencia ocurre en el flujo de fluidos. Sea $\mathbf{v}(x, y, z)$ el campo de velocidad de un fluido con densidad constante ρ. Entonces $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ es la razón de flujo por unidad de área. Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto en el fluido y B_a una pelota con centro P_0 y radio a muy pequeño, entonces div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ para todos los puntos P en B_a, ya que div $\mathbf{F}$ es continua. Se aproxima el flujo en la esfera frontera S_a como sigue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \text{div } \mathbf{F} \, dV \approx \iiint_{B_a} \text{div } \mathbf{F}(P_0) \, dV = \text{div } \mathbf{F}(P_0) V(B_a)$$

Esta aproximación mejora cuando $a \to 0$ y sugiere que

8 $$\text{div } \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

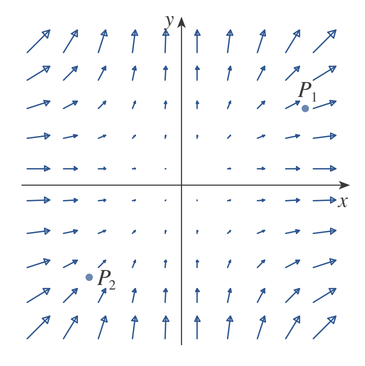


FIGURA 4
El campo vectorial $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y2\,\mathbf{j}$

La ecuación 8 indica que div $\mathbf{F}(P_0)$ es la razón neta de flujo hacia fuera por unidad de volumen en P_0. (Esta es la razón del nombre *divergencia*.) Si div $\mathbf{F}(P) > 0$, el flujo neto es hacia fuera cerca de P y P se llama **fuente**. Si div $\mathbf{F}(P) < 0$, el flujo neto es hacia dentro cerca de P y P se llama **sumidero**.

Para el campo vectorial en la figura 4, parece que los vectores que terminan cerca de P_1 son más cortos que los vectores que empiezan cerca de P_1. Así, el flujo neto es hacia fuera cerca de P_1, de modo que div $\mathbf{F}(P_1) > 0$ y P_1 es una fuente. Cerca de P_2, por su parte, las flechas entrantes son más largas que las salientes. Aquí el flujo neto es hacia dentro, así que div $\mathbf{F}(P_2) < 0$ y P_2 es un sumidero. Se puede usar la fórmula para $\mathbf{F}$ para confirmar esta impresión. Como $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, se tiene div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, la cual es positiva cuando $y > -x$. Así, los puntos arriba de la recta $y = -x$ son fuentes y los que están abajo son sumideros.

16.9 EJERCICIOS

1-4 Verifique que el teorema de la divergencia es cierto para el campo vectorial $\mathbf{F}$ en la región E.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$,
E es el cubo acotado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} + 4z^2\,\mathbf{k}$,
E es el sólido encerrado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 9$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$,
E es la pelota sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
E es el sólido acotado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy

5-15 Use el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; es decir, calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z\,\mathbf{i} + xy^2z^3\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$,
S es la superficie de la caja acotada por los planos de coordenadas y los planos $x = 3$, $y = 2$ y $z = 1$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$,
S es la superficie de la caja encerrada por los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ y $z = c$, donde a, b y c son números positivos

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\text{sen } y\,\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j} + xz\text{ sen } y\,\mathbf{k}$,
S es la "esfera gorda" $x^8 + y^8 + z^8 = 8$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^y\,\mathbf{i} + (z - e^y)\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$,
S es el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del tetraedro encerrado por los planos de coordenadas y el plano
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$
donde a, b, y c son números positivos

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^3 + y^3)\,\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\,\mathbf{j} - 3y^2z\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano xy

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy + 2xz)\,\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{j} + (xy - z^2)\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = y - 2$ y $z = 0$

13. $\mathbf{F} = |\mathbf{r}|\,\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S consta del hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano xy

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4\,\mathbf{i} - x^3z^2\,\mathbf{j} + 4xy^2z\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = x + 2$ y $z = 0$

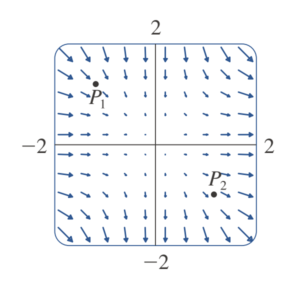
SAC **15.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \tan z\,\mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2}\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido que está sobre el plano xy y bajo la superficie $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

SAC **16.** Use un sistema algebraico computacional para trazar el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos^2 y\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 y \cos^4 z\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^5 z \cos^6 x\,\mathbf{k}$ en el cubo cortado del primer octante por los planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ y $z = \pi/2$. Calcule después el flujo por la superficie del cubo.

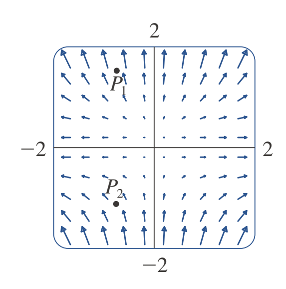
17. Use el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2x\,\mathbf{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \tan z)\,\mathbf{j} + (x^2z + y^2)\,\mathbf{k}$ y S es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [*Sugerencia*: nótese que S no es una superficie cerrada. Calcule primero integrales en S_1 y S_2, donde S_1 es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, orientado hacia abajo, y $S_2 = S \cup S_1$.]

18. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = z \tan^{-1}(y^2)\,\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine el flujo de $\mathbf{F}$ por la parte del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está sobre el plano $z = 1$ y orientado hacia arriba.

19. Se muestra un campo vectorial $\mathbf{F}$. Use la interpretación de divergencia derivada en esta sección para determinar si div $\mathbf{F}$ es positiva o negativa en P_1 y en P_2.



20. (a) ¿Los puntos P_1 y P_2 son fuentes o sumideros para el campo vectorial $\mathbf{F}$ que se muestra en la figura? Dé una explicación basada exclusivamente en la imagen.
(b) Dado que $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, use la definición de divergencia para verificar su respuesta al inciso (a).



SAC **21-22** Trace el campo vectorial y conjeture dónde div $\mathbf{F} > 0$ y dónde div $\mathbf{F} < 0$. Calcule después div $\mathbf{F}$ para verificar sus suposiciones.

21. $\mathbf{F}(x, y) = \langle xy, x + y^2 \rangle$ **22.** $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2, y^2 \rangle$

23. Verifique que div $\mathbf{E} = 0$ para el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}.$$

24. Use el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint_S (2x + 2y + z^2)\,dS$$

donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

25-30 Compruebe cada identidad, suponiendo que S y E satisfagan las condiciones del teorema de la divergencia y que las funciones escalares y componentes de los campos vectoriales tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

25. $\displaystyle\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante

26. $V(E) = \frac{1}{3}\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

27. $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ **28.** $\displaystyle\iint_S D_{\mathbf{n}} f\,dS = \iiint_E \nabla^2 f\,dV$

29. $\displaystyle\iint_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dV$

30. $\displaystyle\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV$

31. Suponga que S y E satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y que f es una función escalar con derivadas parciales continuas. Compruebe que

$$\iint_S f\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \nabla f\,dV$$

Esta superficie e integrales triples de funciones vectoriales son vectores definidos integrando cada función componente. [*Sugerencia*: comience aplicando el teorema de la divergencia a $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante arbitrario.]

32. Un sólido ocupa una región E con superficie S y está sumergido en un líquido con densidad constante ρ. Se establece un sistema de coordenadas de tal forma que el plano xy coincida con la superficie del líquido, y valores positivos de z se miden hacia abajo en el líquido. Entonces, la presión a la profundidad z es $p = \rho gz$, donde g es la aceleración debida a la gravedad (véase la sección 8.3). La fuerza boyante total sobre el sólido debida a la distribución de la presión está dada por la integral de superficie

$$\mathbf{F} = -\iint_S p\mathbf{n}\,dS$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario externo. Use el resultado del ejercicio 31 para demostrar que $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$, donde W es el peso del líquido desplazado por el sólido. (Nótese que $\mathbf{F}$ está dirigido hacia arriba porque z está dirigida hacia abajo.) El resultado es el *principio de Arquímedes*: la fuerza boyante sobre un objeto es igual al peso del líquido desplazado.

16.10 Resumen

Los principales resultados de este capítulo son todos ellos versiones en dimensiones superiores del teorema fundamental del cálculo. Para ayudarle a recordarlas, se han reunido aquí (sin hipótesis) para que pueda advertir más fácilmente su semejanza esencial. Obsérvese que en cada caso se tiene una integral de una "derivada" en una región en el miembro izquierdo, y el miembro derecho implica los valores de la función original solo en la *frontera* de la región.

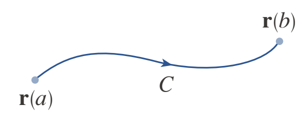
Teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



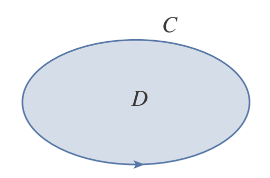
Teorema fundamental para integrales de línea

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



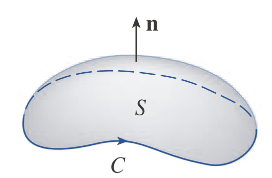
Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy$$



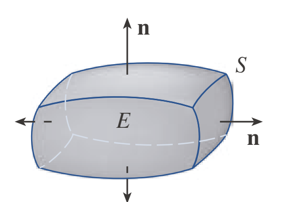
Teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Teorema de la divergencia

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



16 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. ¿Qué es un campo vectorial? Dé tres ejemplos que tengan significado físico.

2. (a) ¿Qué es un campo vectorial conservativo?
   (b) ¿Qué es una función potencial?

3. (a) Escriba la definición de la integral de línea de una función escalar f a lo largo de una curva suave C con respecto a la longitud de arco.
   (b) ¿Cómo se evalúa tal integral de línea?
   (c) Escriba expresiones para la masa y centro de masa de un alambre delgado en forma de una curva C si el alambre tiene una función de densidad lineal $\rho(x, y)$.
   (d) Escriba las definiciones de las integrales de línea a lo largo de C de una función escalar f con respecto a x, y y z.
   (e) ¿Cómo se evalúan estas integrales de línea?

4. (a) Defina la integral de línea de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.
   (b) Si **F** es un campo de fuerzas, ¿qué representa esta integral de línea?
   (c) Si $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$, ¿cuál es la relación entre la integral de línea de **F** y las integrales de línea de las funciones componentes P, Q y R?

5. Enuncie el teorema fundamental para las integrales de línea.

6. (a) ¿Qué significa decir que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria?
   (b) Si usted sabe que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, ¿qué puede decir de **F**?

7. Enuncie el teorema de Green.

8. Escriba expresiones para el área encerrada por una curva C en términos de las integrales de línea alrededor de C.

9. Suponga que **F** es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$.
   (a) Defina rot **F**. (b) Defina div **F**.
   (c) Si **F** es un campo de velocidad en flujo de fluidos, ¿cuáles son las interpretaciones físicas de rot **F** y div **F**?

10. Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, ¿cómo se determina si **F** es conservativo? ¿Y si **F** fuera un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$?

11. (a) ¿Qué es una superficie paramétrica? ¿Qué son sus curvas reticulares?
    (b) Escriba una expresión para el área de una superficie paramétrica.
    (c) ¿Cuál es el área de una superficie dada por una ecuación $z = g(x, y)$?

12. (a) Escriba la definición de la integral de superficie de una función escalar f en una superficie S.
    (b) ¿Cómo se evalúa esa integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?
    (c) ¿Y si S estuviera dada por una ecuación $z = g(x, y)$?
    (d) Si una hoja delgada tiene la forma de una superficie S y la densidad en (x, y, z) es $\rho(x, y, z)$, escriba expresiones para la masa y centro de masa de la hoja.

13. (a) ¿Qué es una superficie orientada? Dé un ejemplo de una superficie no orientable.
    (b) Defina la integral de superficie (o flujo) de un campo vectorial **F** en una superficie orientada S con vector normal unitario **n**.
    (c) ¿Cómo se evalúa esa integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?
    (d) ¿Y si S estuviera dada por una ecuación $z = g(x, y)$?

14. Enuncie el teorema de Stokes.

15. Enuncie el teorema de la divergencia.

16. ¿En qué sentidos son similares el teorema fundamental para las integrales de línea, el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si **F** es un campo vectorial, entonces div **F** es un campo vectorial.

2. Si **F** es un campo vectorial, entonces rot **F** es un campo vectorial.

3. Si f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en $\mathbb{R}^3$, entonces $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \nabla f) = 0$.

4. Si f tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^3$ y C es cualquier círculo, entonces $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$.

5. Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ y $P_y = Q_x$ en una región abierta D, entonces **F** es conservativo.

6. $\int_{-C} f(x, y)\, ds = -\int_C f(x, y)\, ds$

7. Si **F** y **G** son campos vectoriales y div **F** = div **G**, entonces **F** = **G**.

8. El trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo para mover una partícula alrededor de una trayectoria cerrada es cero.

9. Si **F** y **G** son campos vectoriales, entonces
$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$$

10. Si **F** y **G** son campos vectoriales, entonces
$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$$

11. Si S es una esfera y **F** un campo vectorial constante, entonces $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

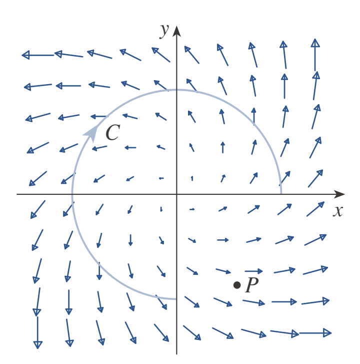
12. Hay un campo vectorial **F** tal que
$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

13. El área de la región acotada por la curva cerrada simple con orientación positiva y suave por partes C es $A = \oint_C y\, dx$.



EJERCICIOS

1. Se muestran un campo vectorial **F**, una curva C y un punto P.
(a) ¿$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o cero? Explique su respuesta.
(b) ¿Es div **F** (P) positiva, negativa o cero? Explique su respuesta.



2-9 Evalúe la integral de línea.

2. $\int_C x\, ds$,
C es el arco de la parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1)

3. $\int_C yz \cos x\, ds$,
C: $x = t$, $y = 3\cos t$, $z = 3\,\mathrm{sen}\, t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

4. $\int_C y\, dx + (x + y^2)\, dy$, C es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ con orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj

5. $\int_C y^3\, dx + x^2\, dy$, C es el arco de la parábola $x = 1 - y^2$ de $(0, -1)$ a $(0, 1)$

6. $\int_C \sqrt{xy}\, dx + e^y\, dy + xz\, dz$,
C está dada por $\mathbf{r}(t) = t^4\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} - t^3\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

7. $\int_C xy\, dx + y^2\, dy + yz\, dz$,
C es el segmento de recta de $(1, 0, -1)$ a $(3, 4, 2)$

8. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = \mathrm{sen}\, t\,\mathbf{i} + (1 + t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

9. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} - t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

10. Determine el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$$

para mover una partícula del punto (3, 0, 0) al punto $(0, \pi/2, 3)$ a lo largo de
(a) una recta
(b) la hélice $x = 3\cos t$, $y = t$, $z = 3\,\mathrm{sen}\, t$

11-12 Demuestre que **F** es un campo vectorial conservativo. Determine después una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{i} + (e^y + x^2e^{xy})\,\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathrm{sen}\, y\,\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j} - \mathrm{sen}\, z\,\mathbf{k}$

13-14 Demuestre que **F** es conservativo y use este hecho para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva dada.

13. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^2 - 2xy^3)\,\mathbf{i} + (2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = (t + \mathrm{sen}\,\pi t)\,\mathbf{i} + (2t + \cos \pi t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + (xe^y + e^z)\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$,
C es el segmento de recta de (0, 2, 0) a (4, 0, 3)

15. Verifique que el teorema de Green es cierto para la integral de línea $\int_C xy^2\, dx - x^2y\, dy$, donde C consta de la parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ y del segmento de recta de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.

16. Use el teorema de Green para evaluar

$$\int_C \sqrt{1 + x^3}\, dx + 2xy\, dy$$

donde C es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 3).

17. Use el teorema de Green para evaluar $\int_C x^2y\, dx - xy^2\, dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$ con orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj.

18. Halle rot **F** y div **F** si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x}\,\mathrm{sen}\, y\,\mathbf{i} + e^{-y}\,\mathrm{sen}\, z\,\mathbf{j} + e^{-z}\,\mathrm{sen}\, x\,\mathbf{k}$$

19. Demuestre que no existe un campo vectorial **G** tal que

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{G} = 2x\,\mathbf{i} + 3yz\,\mathbf{j} - xz^2\,\mathbf{k}$$

20. Si **F** y **G** son campos vectoriales cuyas funciones componentes tienen primeras derivadas parciales continuas, demuestre que

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}\,\mathrm{div}\,\mathbf{G} - \mathbf{G}\,\mathrm{div}\,\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

21. Si C es cualquier curva simple plana cerrada suave por partes y f y g son funciones derivables, demuestre que $\int_C f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0$.

22. Si f y g son funciones dos veces derivables, demuestre que

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

23. Si f es una función armónica, es decir $\nabla^2 f = 0$, demuestre que la integral de línea $\int f_y\, dx - f_x\, dy$ es independiente de la trayectoria en cualquier región simple D.

24. (a) Trace la curva C con ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t \qquad y = \mathrm{sen}\, t \qquad z = \mathrm{sen}\, t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(b) Halle $\int_C 2xe^{2y}\, dx + (2x^2e^{2y} + 2y\cot z)\, dy - y^2\csc^2 z\, dz$.

25. Halle el área de la parte de la superficie $z = x^2 + 2y$ que está arriba del triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 2).

26. (a) Determine una ecuación del plano tangente en el punto (4, –2, 1) a la superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = v^2\,\mathbf{i} - uv\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant u \leqslant 3,\ -3 \leqslant v \leqslant 3$$

(b) Use una computadora para graficar la superficie S y el plano tangente determinado en el inciso (a).

(c) Establezca pero no evalúe una integral para el área de S.

SAC (d) Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + \frac{x^2}{1 + y^2}\,\mathbf{j} + \frac{y^2}{1 + z^2}\,\mathbf{k}$$

determine $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ con cuatro decimales.

27-30 Evalúe la integral de superficie.

27. $\iint_S z\, dS$, donde S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está bajo el plano $z = 4$

28. $\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS$, donde S es la parte del plano $z = 4 + x + y$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

29. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con orientación hacia fuera

30. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ bajo el plano $z = 1$ con orientación hacia arriba

---

31. Verifique que el teorema de Stokes es cierto para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy y S tiene orientación hacia arriba.

32. Use el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + z^3e^{xy}\,\mathbf{k}$, S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que está sobre el plano $z = 1$ y S está orientada hacia arriba.

33. Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ y C es el triángulo con vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj, visto desde arriba.

34. Use el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ y S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 2$.

35. Verifique que el teorema de la divergencia es cierto para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, donde E es la pelota unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

36. Calcule el flujo hacia fuera de

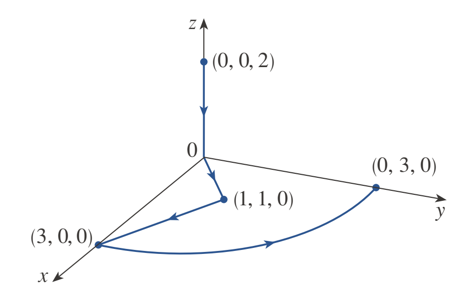
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

por el elipsoide $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$.

37. Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\,\mathbf{i} + (x^3z - 3x)\,\mathbf{j} + (x^3y - 2z)\,\mathbf{k}$$

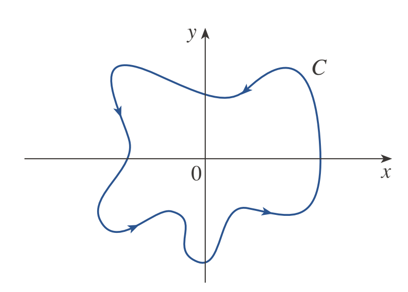
Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva con punto inicial (0, 0, 2) y punto terminal (0, 3, 0) que aparece en la figura.



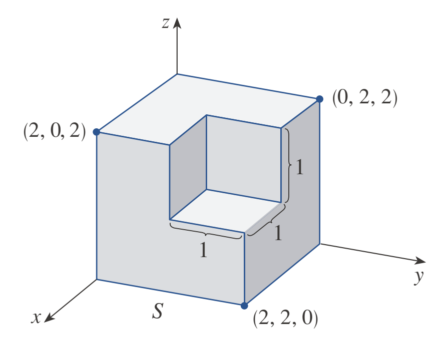
38. Sea

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(2x^3 + 2xy^2 - 2y)\,\mathbf{i} + (2y^3 + 2x^2y + 2x)\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Evalúe $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C se muestra en la figura.



39. Determine $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y S es la superficie orientada hacia fuera que se muestra en la figura (la superficie frontera de un cubo de la que se ha quitado un cubo unitario de esquina).



40. Si los componentes de $\mathbf{F}$ tienen segundas derivadas parciales continuas y S es la superficie frontera de una región sólida simple, demuestre que $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

41. Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, y S es una superficie suave orientada con una curva frontera simple cerrada suave con orientación positiva C, demuestre que

$$\iint_S 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_C (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

Problemas adicionales

1. Sea S una superficie paramétrica suave y P un punto tal que cada recta que parte de P interseca S a lo sumo una vez. El **ángulo sólido** $\Omega(S)$ subtendido por S en P es un conjunto de rectas que parten de P y pasan por S. Sea $S(a)$ la intersección de $\Omega(S)$ con la superficie de la esfera con centro P y radio a. Entonces, la medida del ángulo sólido (en *esterradianes*) se define como

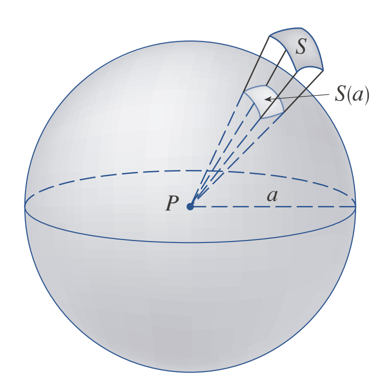
$$|\Omega(S)| = \frac{\text{área de } S(a)}{a^2}$$

Aplique el teorema de la divergencia a la parte de $\Omega(S)$ entre $S(a)$ y S para demostrar que

$$|\Omega(S)| = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector radio de P a cualquier punto en S, $r = |\mathbf{r}|$, y el vector normal unitario $\mathbf{n}$ se aleja de P.

Esto demuestra que la definición de la medida de un ángulo sólido es independiente del radio a de la esfera. Así, la medida del ángulo sólido es igual al área subtendida sobre una esfera *unitaria*. (Nótese la analogía con la definición de la medida radián.) El ángulo sólido total subtendido por una esfera en su centro es entonces de 4π esterradianes.



2. Determine la curva cerrada simple con orientación positiva C para la cual el valor de la integral de línea

$$\int_C (y^3 - y)\, dx - 2x^3\, dy$$

es un máximo.

3. Sea C una curva cerrada simple en el espacio, suave por partes, ubicada en un plano con vector normal unitario $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ y con orientación positiva con respecto a $\mathbf{n}$. Demuestre que el área del plano encerrada por C es

$$\tfrac{1}{2}\int_C (bz - cy)\, dx + (cx - az)\, dy + (ay - bx)\, dz$$

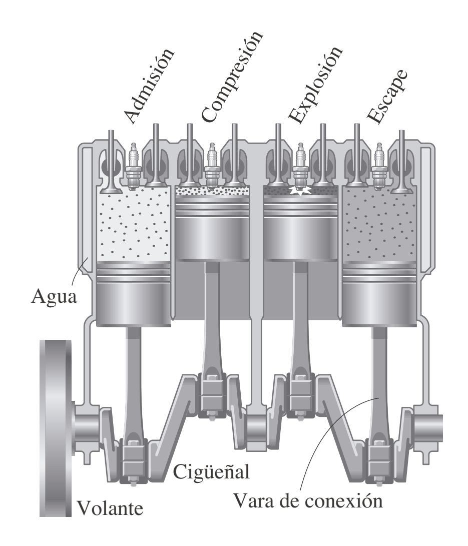


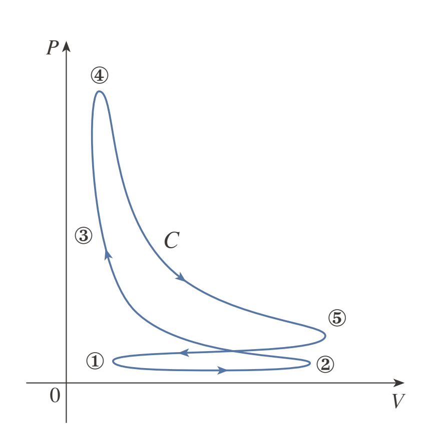
4. Investigue la forma de la superficie con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} u$, $y = \operatorname{sen} v$, $z = \operatorname{sen}(u + v)$. Empiece graficando la superficie desde varios puntos de vista. Explique la apariencia de las gráficas determinando las trazas en los planos horizontales $z = 0$, $z = \pm 1$ y $z = \pm\frac{1}{2}$.

5. Compruebe la identidad siguiente:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

6. La figura describe la sucesión de eventos en cada cilindro de un motor de combustión interna de cuatro cilindros. Cada pistón sube y baja y está conectado mediante un brazo de báscula a un cigüeñal giratorio. Sean $P(t)$ y $V(t)$ la presión y el volumen dentro de un cilindro en el momento t, donde $a \leqslant t \leqslant b$ da el tiempo requerido para un ciclo completo. La gráfica muestra cómo varían P y V a lo largo de un ciclo de un motor de cuatro tiempos.





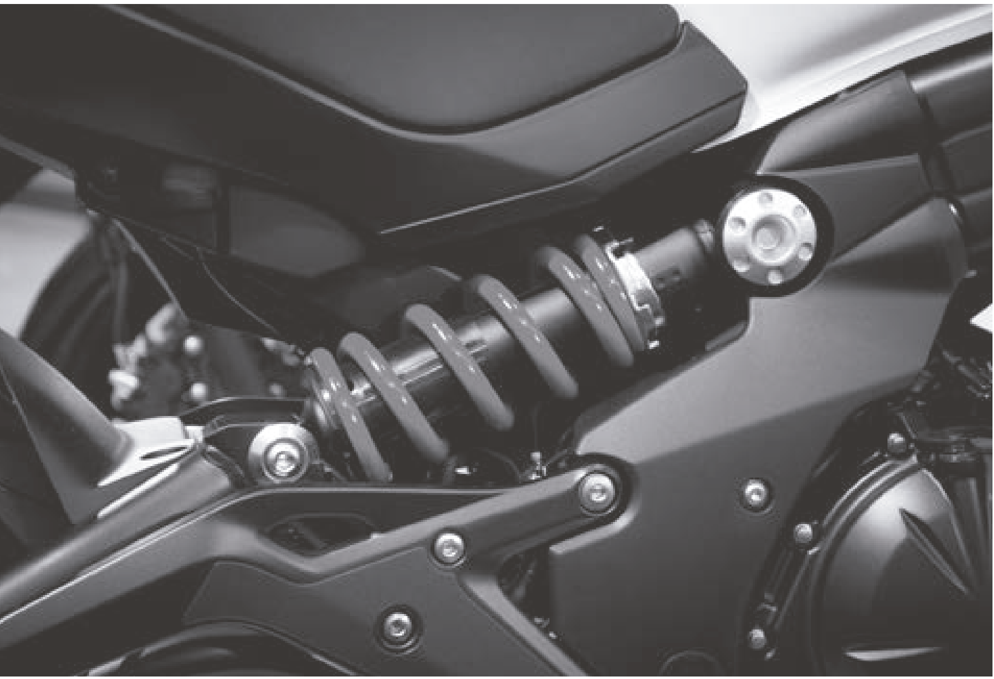
Durante el tiempo de admisión (de ① a ②) una mezcla de aire y gasolina a presión atmosférica entra a un cilindro a través de la válvula de admisión cuando el pistón baja. Entonces el pistón comprime rápidamente la mezcla con las válvulas cerradas en el tiempo de compresión (de ② a ③), durante el cual la presión aumenta y el volumen disminuye. En ③ la bujía inflama el combustible, lo que eleva la temperatura y la presión a un volumen casi constante en ④. Luego, con las válvulas cerradas, la rápida expansión obliga a bajar al pistón durante el tiempo de potencia (de ④ a ⑤). La válvula de descarga se abre, la temperatura y presión descienden y la energía mecánica almacenada en un volante giratorio empuja el pistón hacia arriba, expulsando los productos residuales de la válvula de descarga en el tiempo de escape. La válvula de descarga se cierra y la de admisión se abre. Se vuelve entonces a ① y el ciclo comienza de nuevo.

(a) Demuestre que el trabajo realizado sobre el pistón durante un ciclo de un motor de cuatro tiempos es $W = \int_C P\, dV$, donde C es la curva en el plano PV que se muestra en la figura.

[*Sugerencia*: sea $x(t)$ la distancia del pistón a la punta del cilindro y nótese que la fuerza sobre el pistón es $\mathbf{F} = AP(t)\,\mathbf{i}$, donde A es el área de la punta del pistón. Entonces $W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C_1 está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}$, $a \leqslant t \leqslant b$. Un enfoque alternativo es trabajar directamente con sumas de Riemann.]

(b) Use la fórmula 16.4.5 para demostrar que el trabajo es la diferencia de las áreas encerradas por los dos lazos de C.

17 Ecuaciones diferenciales de segundo orden



© CS Stock/Shutterstock.com

El movimiento de un amortiguador en una motocicleta es descrito por las ecuaciones diferenciales que se resolverán en la sección 17.3.

LAS IDEAS BÁSICAS DE LAS ECUACIONES diferenciales se explicaron en el capítulo 9; principalmente las ecuaciones de primer orden. En este capítulo se estudiarán las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y se aprenderá cómo pueden aplicarse para resolver problemas concernientes a las vibraciones de resortes y el análisis de circuitos eléctricos. También se verá cómo las series infinitas pueden usarse para resolver ecuaciones diferenciales.

17.1 Ecuaciones lineales de segundo orden

Una **ecuación diferencial lineal de segundo orden** tiene la forma

1 $$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

donde P, Q, R y G son funciones continuas. En la sección 9.1 se vio que las ecuaciones de este tipo surgen con el estudio del movimiento de un resorte. En la sección 17.3 se abordará más esta aplicación, así como la aplicación a circuitos eléctricos.

En esta sección se estudiará el caso en el que $G(x) = 0$, para todas las x, en la ecuación 1. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones lineales **homogéneas**. Así, la forma de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es

2 $$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Si $G(x) \neq 0$ para algunas x, la ecuación 1 es **no homogénea** y se analizará en la sección 17.2.

Dos hechos básicos permiten resolver ecuaciones lineales homogéneas. El primero de ellos indica que si se conocen dos soluciones y_1 y y_2 de una ecuación de ese tipo, entonces la **combinación lineal** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ también es una solución.

3 Teorema Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea (2) y c_1 y c_2 son cualesquiera constantes, entonces la función

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

también es una solución de la ecuación 2.

COMPROBACIÓN Como y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación 2, se tiene

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0$$

y

$$P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0$$

Por tanto, usando las reglas básicas de la derivación, se tiene

$$\begin{aligned}
&P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y \\
&\qquad = P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&\qquad = P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&\qquad = c_1[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2] \\
&\qquad = c_1(0) + c_2(0) = 0
\end{aligned}$$

Así, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución de la ecuación 2. ■

El otro hecho que se necesita está dado por el teorema siguiente, que se comprueba en cursos más avanzados el cual sostiene que la solución general es una combinación lineal de dos soluciones **linealmente independientes** y_1 y y_2. Esto significa que ni y_1 ni y_2 son un múltiplo constante uno de otro. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5x^2$ son linealmente dependientes, pero $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$ son linealmente independientes.

4 Teorema Si y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación 2 en un intervalo y $P(x)$ nunca es de 0, entonces la solución general está dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

El teorema 4 es muy útil porque indica que si se conocen *dos* soluciones particulares linealmente independientes, se conocen *todas* las soluciones.

En general, no es fácil descubrir soluciones particulares de una ecuación lineal de segundo orden. Pero siempre es posible hacerlo si las funciones coeficientes P, Q y R son funciones constantes, es decir, si la ecuación diferencial tiene la forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (5)$$

donde a, b, y c son constantes y $a \neq 0$.

No es difícil pensar en algunas probables candidatas a soluciones particulares de la ecuación 5 si se enuncia verbalmente la ecuación. Se debe buscar una función y tal que una constante multiplicada por su segunda derivada y'' sumada a otra constante multiplicada por y' sumada a una tercera constante multiplicada por y sea igual a 0. Se sabe que la función exponencial $y = e^{rx}$ (donde r es una constante) tiene la propiedad de que su derivada es un múltiplo constante de sí misma: $y' = re^{rx}$. Además, $y'' = r^2e^{rx}$. Si se sustituyen estas expresiones en la ecuación 5, se verá que $y = e^{rx}$ es una solución si

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

o

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Pero e^{rx} nunca es 0. Así, $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación 5 si r es una raíz de la ecuación

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (6)$$

La ecuación 6 se llama **ecuación auxiliar** (o **ecuación característica**) de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Note que es una ecuación algebraica que se obtiene de la ecuación diferencial reemplazando y'' por r^2, y' por r, así como y por 1.

A veces las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar pueden determinarse por factorización. En otros casos se les determina usando la fórmula cuadrática:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (7)$$

Se destacan tres casos de acuerdo con el signo del discriminante $b^2 - 4ac$.

CASO I $b^2 - 4ac > 0$

En este caso las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar son reales y distintas, de modo que $y_1 = e^{r_1x}$ y $y_2 = e^{r_2x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación 5. (Observe que e^{r_2x} no es un múltiplo constante de e^{r_1x}.) Así, por el teorema 4, se tiene el hecho siguiente.

8 Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ son reales y desiguales, la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$



En la figura 1 las gráficas de las soluciones básicas $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^{-3x}$ de la ecuación diferencial del ejemplo 1 aparecen en azul fuerte y azul claro respectivamente. Algunas de las demás soluciones, combinaciones lineales de f y g, se muestran en negro.

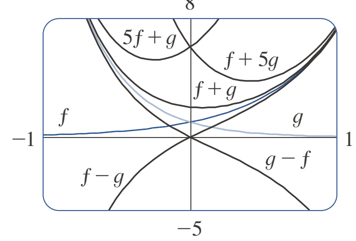



FIGURA 1

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $y'' + y' - 6y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$$

cuyas raíces son $r = 2, -3$. Por tanto, por (8), la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$$

Podría verificarse que es en efecto una solución derivando y sustituyendo en la ecuación diferencial. ■

EJEMPLO 2 Resuelva $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$.

SOLUCIÓN Para resolver la ecuación auxiliar $3r^2 + r - 1 = 0$, use la fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Como las raíces son reales y distintas, la solución general es

$$y = c_1e^{(-1+\sqrt{13})x/6} + c_2e^{(-1-\sqrt{13})x/6}$$ ■

CASO II $b^2 - 4ac = 0$

En este caso $r_1 = r_2$; es decir, las raíces de la ecuación auxiliar son reales e iguales. Se denota con r el valor común de r_1 y r_2. Entonces, de las ecuaciones 7, se tiene

9 $$r = -\frac{b}{2a} \quad \text{de modo que} \quad 2ar + b = 0$$

Se sabe que $y_1 = e^{rx}$ es una solución de la ecuación 5. Ahora se verifica que $y_2 = xe^{rx}$ es también una solución:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + 0(xe^{rx}) = 0 \end{aligned}$$



En el primer término, $2ar + b = 0$ por las ecuaciones 9; en el segundo término, $ar^2 + br + c = 0$ porque r es una raíz de la ecuación auxiliar. Como $y_1 = e^{rx}$ y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones linealmente independientes, el teorema 4 proporciona la solución general.

10 Si la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tiene solo una raíz real r, entonces la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

La figura 2 muestra las soluciones básicas $f(x) = e^{-3x/2}$ y $g(x) = xe^{-3x/2}$ del ejemplo 3 y otros miembros de la familia de soluciones. Note que todas ellas se aproximan a 0 cuando $x \to \infty$.

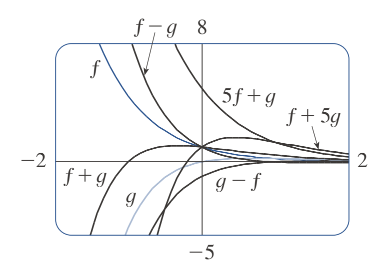


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar $4r^2 + 12r + 9 = 0$ puede factorizarse como

$$(2r + 3)^2 = 0$$

así que la única raíz es $r = -\frac{3}{2}$. Por (10) la solución general es

$$y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2}$$

■

CASO III $b^2 - 4ac < 0$

En este caso las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar son números complejos. (Véase el apéndice H para información sobre los números complejos.) Se puede escribir

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

donde α y β son números reales. [De hecho, $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.] Entonces, usando la ecuación de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

del apéndice H, se escribe la solución de la ecuación diferencial como

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\beta x] \\ &= e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x) \end{aligned}$$

donde $c_1 = C_1 + C_2$, $c_2 = i(C_1 - C_2)$. Esto da todas las soluciones (reales o complejas) de la ecuación diferencial. Las soluciones son reales cuando las constantes c_1 y c_2 son reales. El análisis se resume como sigue.

11 Si las raíces de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ son los números complejos $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, entonces la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x)$$

La figura 3 muestra las gráficas de las soluciones del ejemplo 4, $f(x) = e^{3x} \cos 2x$ y $g(x) = e^{3x}$ sen $2x$, junto con algunas combinaciones lineales. Todas las soluciones se aproximan a 0 cuando $x \to \infty$.

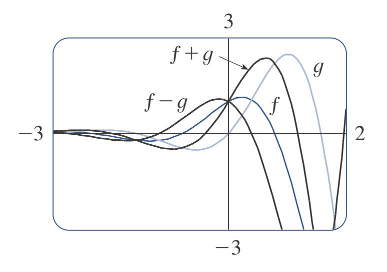


FIGURA 3

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $y'' - 6y' + 13y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 - 6r + 13 = 0$. Por la fórmula cuadrática, las raíces son

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por (11), la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x)$$ ■

Problemas de valor inicial y valor frontera

Un **problema de valor inicial** para la ecuación 1 o 2 de segundo orden consiste en determinar una solución y de la ecuación diferencial que también satisfaga condiciones iniciales de la forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1$$

donde y_0 y y_1 son constantes dadas. Si P, Q, R y G son continuas en un intervalo y $P(x) \neq 0$ ahí, entonces un teorema que se encuentra en libros más avanzados garantiza la existencia y singularidad de una solución a este problema de valor inicial. Los ejemplos 5 y 6 ilustran la técnica para resolver un problema de esta clase.

EJEMPLO 5 Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN Por el ejemplo 1 se sabe que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$$

Al derivar esta solución se obtiene

$$y'(x) = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

Para satisfacer las condiciones iniciales se requiere que

12 $$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

13 $$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0$$

De (13), se tiene $c_2 = \frac{2}{3}c_1$, de modo que (12) da

$$c_1 + \tfrac{2}{3}c_1 = 1 \qquad c_1 = \tfrac{3}{5} \qquad c_2 = \tfrac{2}{5}$$

Así, la solución requerida del problema de valor inicial es

$$y = \tfrac{3}{5}e^{2x} + \tfrac{2}{5}e^{-3x}$$ ■

La figura 4 muestra la gráfica de la solución del problema de valor inicial del ejemplo 5. Compare con la figura 1.

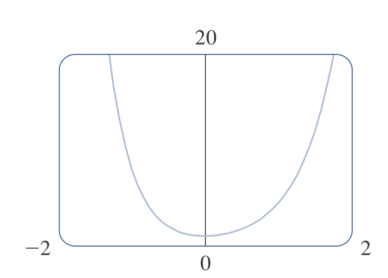


FIGURA 4

EJEMPLO 6 Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 3$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$, o $r^2 = -1$, cuyas raíces son $\pm i$. Así, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y como $e^{0x} = 1$, la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x$$

Dado que $$y'(x) = -c_1 \text{ sen } x + c_2 \cos x$$



La solución del ejemplo 6 se grafica en la figura 5. Parece una curva seno desplazada y, en efecto, usted puede verificar que otra manera de escribir la solución es

$y = \sqrt{13}\ \text{sen}(x + \phi)$ donde $\tan \phi = \frac{2}{3}$

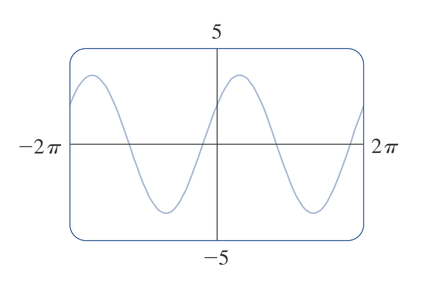


FIGURA 5

las condiciones iniciales se convierten en

$$y(0) = c_1 = 2 \qquad y'(0) = c_2 = 3$$

Por tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$y(x) = 2\cos x + 3\ \text{sen}\ x$$ ■

Un **problema de valor frontera** para la ecuación 1 o 2 consiste en determinar una solución y de la ecuación diferencial que también satisfaga condiciones frontera de la forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

En contraste con la situación para los problemas de valor inicial, un problema de valor frontera no siempre tiene una solución. El método se ilustra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Resuelva el problema de valor frontera

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad (r + 1)^2 = 0$$

cuya única raíz es $r = -1$. En consecuencia, la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

La figura 6 muestra la gráfica de la solución del problema de valor frontera del ejemplo 7.

5

-1 5

-5

FIGURA 6

Las condiciones de frontera se satisfacen si

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

La primera condición da $c_1 = 1$, de manera que la segunda condición se convierte en

$$e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

Al despejar c_2 en esta ecuación multiplicando primero por e, se obtiene

$$1 + c_2 = 3e \qquad \text{de modo que} \qquad c_2 = 3e - 1$$

Así, la solución del problema de valor frontera es

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$ ■

Resumen: soluciones de $ay'' + by' + c = 0$

Raíces de $ar^2 + br + c = 0$	Solución general
r_1, r_2 reales y distintas	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$
r_1, r_2 complejas: $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2\ \text{sen}\ \beta x)$

17.1 EJERCICIOS

1-13 Resuelva la ecuación diferencial.

1. $y'' - y' - 6y = 0$

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$

3. $y'' + 2y = 0$

4. $y'' + y' - 12y = 0$

5. $4y'' + 4y' + y = 0$

6. $9y'' + 4y = 0$

7. $3y'' = 4y'$

8. $y = y''$

9. $y'' - 4y' + 13y = 0$

10. $3y'' + 4y' - 3y = 0$

11. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0$

12. $\dfrac{d^2R}{dt^2} + 6\dfrac{dR}{dt} + 34R = 0$

13. $3\dfrac{d^2V}{dt^2} + 4\dfrac{dV}{dt} + 3V = 0$

14-16 Grafique las dos soluciones básicas junto con varias soluciones más de la ecuación diferencial. ¿Qué rasgos tienen en común las soluciones?

14. $4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

16. $2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$

17-24 Resuelva el problema de valor inicial.

17. $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

18. $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

19. $9y'' + 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

20. $3y'' - 2y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -4$

21. $2y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$

22. $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

23. $y'' - y' - 12y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

24. $2y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3$

25-32 Resuelva el problema de valor frontera, si es posible.

25. $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y(\pi/8) = 2$

26. $y'' + 6y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$

27. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(\pi/4) = 3$

28. $y'' = 4y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$

29. $y'' = y', \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$

30. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y(2) = 0$

31. $y'' + 4y' + 20y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2$

32. $y'' + 4y' + 20y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = e^{-2\pi}$

33. Sea L un número real diferente de cero.
(a) Demuestre que el problema de valor frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ tiene solo la solución trivial $y = 0$ para los casos $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$.
(b) Para el caso $\lambda > 0$, determine los valores de λ para los cuales este problema tiene una solución no trivial y dé la solución correspondiente.

34. Si a, b y c son constantes positivas y $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, demuestre que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

35. Considere el problema de valor frontera $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(a) = c$, $y(b) = d$.
(a) Si este problema tiene una solución única, ¿cómo se relacionan a y b?
(b) Si este problema no tiene solución, ¿cómo se relacionan a, b, c y d?
(c) Si este problema tiene soluciones infinitas, ¿cómo se relacionan a, b, c y d?

17.2 Ecuaciones lineales no homogéneas

En esta sección se aprenderá a resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes y G es una función continua. La ecuación homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$



se llama **ecuación complementaria** y desempeña un papel importante en la solución de la ecuación no homogénea original (1).

3 Teorema La solución general de la ecuación diferencial no homogénea (1) puede escribirse como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

donde y_p es una solución particular de la ecuación 1 y y_c es la solución general de la ecuación complementaria 2.

COMPROBACIÓN Se verifica que si y es una solución de la ecuación 1, entonces $y - y_p$ es una solución de la ecuación complementaria 2. En efecto

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= ay'' - ay_p'' + by' - by_p' + cy - cy_p \\ &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= G(x) - G(x) = 0 \end{aligned}$$

Esto demuestra que todas las soluciones son de la forma $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$. Es fácil verificar que todas las funciones de esta forma son una solución. ■

Por la sección 17.1 se sabe cómo resolver la ecuación complementaria. (Recuerde que la solución es $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación 2.) Por tanto, el teorema 3 establece que se conoce la solución general de la ecuación no homogénea tan pronto como se conoce una solución particular y_p. Hay dos métodos para determinar una solución particular: el método de coeficientes indeterminados es directo pero solo opera para una clase restringida de funciones G. El método de variación de parámetros opera para todas las funciones G, pero usualmente es más difícil de aplicar en la práctica.

El método de coeficientes indeterminados

Se ilustrará primero el método de coeficientes indeterminados para la ecuación

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

donde $G(x)$ es un polinomio. Es razonable suponer que existe una solución particular y_p que es un polinomio del mismo grado que G, porque si y es un polinomio, $ay'' + by' + cy$ también es un polinomio. Por tanto, se sustituye $y_p(x) =$ un polinomio (del mismo grado que G) en la ecuación diferencial y se determinan los coeficientes.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar de $y'' + y' - 2y = 0$ es

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0$$

con raíces $r = 1, -2$. Así, la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

Como $G(x) = x^2$ es un polinomio de grado 2, se busca una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$



Entonces, $y_p' = 2Ax + B$ y $y_p'' = 2A$, así que al sustituir en la ecuación diferencial dada se tiene

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

o

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

La figura 1 muestra cuatro soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1 en términos de la solución particular y_p y las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-2x}$.

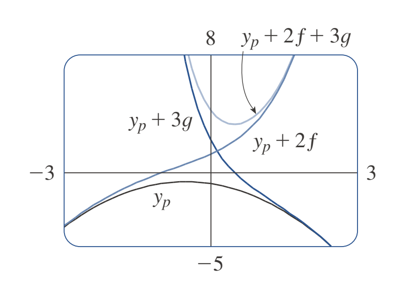


FIGURA 1

Los polinomios son iguales cuando sus coeficientes son iguales. Así

$$-2A = 1 \qquad 2A - 2B = 0 \qquad 2A + B - 2C = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$A = -\tfrac{1}{2} \qquad B = -\tfrac{1}{2} \qquad C = -\tfrac{3}{4}$$

Una solución particular es entonces

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

y, por el teorema 3, la solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$ ■

Si $G(x)$ (el miembro derecho de la ecuación 1) es de la forma Ce^{kx}, donde C y k son constantes, se toma como solución de prueba una función de la misma forma, $y_p(x) = Ae^{kx}$, porque las derivadas de e^{kx} son múltiplos constantes de e^{kx}.


EJEMPLO 2 Resuelva $y'' + 4y = e^{3x}$.

La figura 2 muestra soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 2 en términos de y_p y las funciones $f(x) = \cos 2x$ y $g(x) = \text{sen } 2x$. Note que todas las soluciones se aproximan a ∞ cuando $x \to \infty$ y que todas las soluciones (excepto y_p) parecen funciones seno cuando x es negativa.

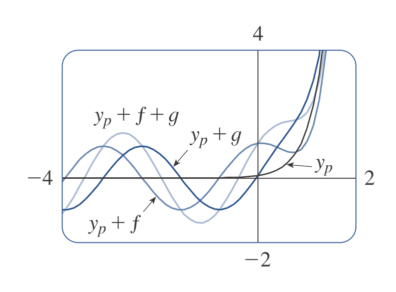


FIGURA 2

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 4 = 0$ con raíces $\pm 2i$, así que la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x$$

Para una solución particular se prueba $y_p(x) = Ae^{3x}$. Entonces, $y_p' = 3Ae^{3x}$ y $y_p'' = 9Ae^{3x}$. Al sustituir en la ecuación diferencial se tiene

$$9Ae^{3x} + 4(Ae^{3x}) = e^{3x}$$

así que $13Ae^{3x} = e^{3x}$ y $A = \frac{1}{13}$. Por consiguiente, una solución particular es

$$y_p(x) = \tfrac{1}{13}e^{3x}$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x + \tfrac{1}{13}e^{3x}$$ ■

Si $G(x)$ es $C \cos kx$ o $C \text{ sen } kx$, entonces, debido a las reglas de derivación de las funciones seno y coseno, se toma como solución particular de prueba una función de la forma

$$y_p(x) = A \cos kx + B \text{ sen } kx$$

EJEMPLO 3 Resuelva $y'' + y' - 2y = \text{sen } x$.

SOLUCIÓN Se prueba una solución particular

$$y_p(x) = A \cos x + B \text{ sen } x$$

Entonces, $y_p' = -A \operatorname{sen} x + B \cos x \qquad y_p'' = -A \cos x - B \operatorname{sen} x$

así que la sustitución en la ecuación diferencial da

$$(-A \cos x - B \operatorname{sen} x) + (-A \operatorname{sen} x + B \cos x) - 2(A \cos x + B \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$$

o $$(-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

Esto es cierto si

$$-3A + B = 0 \qquad \text{y} \qquad -A - 3B = 1$$

La solución de este sistema es

$$A = -\tfrac{1}{10} \qquad B = -\tfrac{3}{10}$$

de modo que una solución particular es

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{10} \cos x - \tfrac{3}{10} \operatorname{sen} x$$

En el ejemplo 1 se determinó que la solución de la ecuación complementaria es $y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$. Así, la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{10}(\cos x + 3 \operatorname{sen} x)$$ ■

Si $G(x)$ es un producto de funciones de los tipos precedentes, entonces se toma como solución de prueba un producto de funciones del mismo tipo. Por ejemplo, al resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + 4y = x \cos 3x$$

se probaría

$$y_p(x) = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \operatorname{sen} 3x$$

Si $G(x)$ es una suma de funciones de estos tipos, se usa el fácilmente verificable *principio de superposición*, el cual sostiene que si y_{p_1} y y_{p_2} son soluciones de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) \qquad ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

respectivamente, entonces $y_{p_1} + y_{p_2}$ es una solución de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$$

EJEMPLO 4 Resuelva $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 - 4 = 0$ con raíces ± 2, así que la solución de la ecuación complementaria es $y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$. Para la ecuación $y'' - 4y = xe^x$ se prueba con

$$y_{p_1}(x) = (Ax + B)e^x$$

Entonces $y_{p_1}' = (Ax + A + B)e^x$, $y_{p_1}'' = (Ax + 2A + B)e^x$, así que la sustitución en la ecuación da

$$(Ax + 2A + B)e^x - 4(Ax + B)e^x = xe^x$$

o $$(-3Ax + 2A - 3B)e^x = xe^x$$



Así, $-3A = 1$ y $2A - 3B = 0$, de modo que $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{9}$, y

$$y_{p_1}(x) = \left(-\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right)e^x$$

Para la ecuación $y'' - 4y = \cos 2x$, se prueba

$$y_{p_2}(x) = C\cos 2x + D\,\text{sen}\,2x$$

La sustitución da

$$-4C\cos 2x - 4D\,\text{sen}\,2x - 4(C\cos 2x + D\,\text{sen}\,2x) = \cos 2x$$

o

$$-8C\cos 2x - 8D\,\text{sen}\,2x = \cos 2x$$

Por tanto, $-8C = 1$, $-8D = 0$ y

$$y_{p_2}(x) = -\tfrac{1}{8}\cos 2x$$

Por el principio de superposición, la solución general es

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{9}\right)e^x - \tfrac{1}{8}\cos 2x$$ ■

En la figura 3 se muestra la solución particular $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ de la ecuación diferencial del ejemplo 4. Las demás soluciones se dan en términos de $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^{-2x}$.

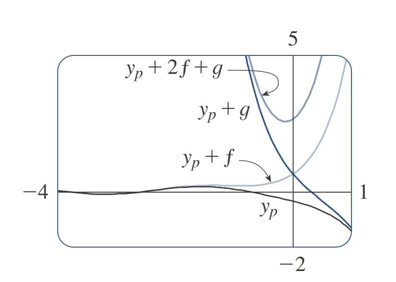


FIGURA 3

Por último, se señala que la solución de prueba recomendada y_p resulta ser a veces una solución de la ecuación complementaria, y por tanto no puede ser una solución de la ecuación no homogénea. En tales casos, se multiplica la solución de prueba recomendada por x (o por x^2 si es necesario) para que ningún término en $y_p(x)$ sea una solución de la ecuación complementaria.



EJEMPLO 5 Resuelva $y'' + y = \text{sen}\,x$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$ con raíces $\pm i$, así que la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x$$

Ordinariamente, se usaría la solución de prueba

$$y_p(x) = A\cos x + B\,\text{sen}\,x$$

pero se observa que esta es una solución de la ecuación complementaria, así que se prueba en cambio

$$y_p(x) = Ax\cos x + Bx\,\text{sen}\,x$$

Entonces

$$y_p'(x) = A\cos x - Ax\,\text{sen}\,x + B\,\text{sen}\,x + Bx\cos x$$

$$y_p''(x) = -2A\,\text{sen}\,x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\,\text{sen}\,x$$

La sustitución en la ecuación diferencial da

$$y_p'' + y_p = -2A\,\text{sen}\,x + 2B\cos x = \text{sen}\,x$$

Las gráficas de cuatro soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 5 se muestran en la figura 4.

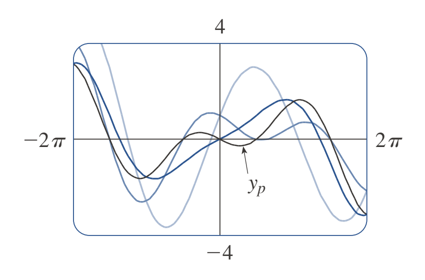


FIGURA 4

así que $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$ y

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x\cos x$$

La solución general es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}x\cos x$$ ■

Se resume el método de coeficientes indeterminados como sigue:

Resumen del método de coeficientes indeterminados

1. Si $G(x) = e^{kx}P(x)$, donde P es un polinomio de grado n, pruebe $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de enésimo grado (cuyos coeficientes se determinan sustituyendo en la ecuación diferencial).
2. Si $G(x) = e^{kx}P(x)\cos mx$ o $G(x) = e^{kx}P(x)\operatorname{sen} mx$, donde P es un polinomio de enésimo grado, pruebe

$$y_p(x) = e^{kx}Q(x)\cos mx + e^{kx}R(x)\operatorname{sen} mx$$

donde Q y R son polinomios de enésimo grado.

Modificación: si cualquier término de y_p es una solución de la ecuación complementaria, multiplique y_p por x (o por x^2 si es necesario).

EJEMPLO 6 Determine la forma de la solución de prueba para la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x$.

SOLUCIÓN Aquí $G(x)$ tiene la forma de la parte 2 del resumen, donde $k = 2$, $m = 3$ y $P(x) = 1$. Así, a primera vista, la forma de la solución de prueba sería

$$y_p(x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x)$$

Pero la ecuación auxiliar es $r^2 - 4r + 13 = 0$, con raíces $r = 2 \pm 3i$, así que la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x)$$

Esto significa que se tiene que multiplicar la solución de prueba sugerida por x. Así, se usa en cambio

$$y_p(x) = xe^{2x}(A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x)$$ ■

El método de variación de parámetros

Suponga que ya ha resuelto la ecuación homogénea $ay'' + by' + cy = 0$ y escrito la solución como

4 $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes. Reemplace las constantes (o parámetros) c_1 y c_2 en la ecuación 4 por las funciones arbitrarias $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Busque

una solución particular de la ecuación no homogénea $ay'' + by' + cy = G(x)$ de la forma

5 $$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

(Este método se llama **variación de parámetros** porque se han variado los parámetros c_1 y c_2 para convertirlos en funciones.) Al derivar la ecuación 5 se obtiene

6 $$y_p' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2')$$

Como u_1 y u_2 son funciones arbitrarias, se puede imponer dos condiciones. Una condición es que y_p sea una solución de la ecuación diferencial; se puede elegir la otra condición para simplificar nuestros cálculos. En vista de la expresión en la ecuación 6, imponga la condición de que

7 $$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

Entonces $$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$$

Al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) = G$$

u

8 $$u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Pero y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación complementaria, de modo que

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

y la ecuación 8 se simplifica como

9 $$a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Las ecuaciones 7 y 9 forman un sistema de dos ecuaciones con las funciones desconocidas u_1' y u_2'. Después de resolver este sistema quizá se podría integrar para determinar u_1 y u_2, y entonces la solución particular estaría dada por la ecuación 5.

EJEMPLO 7 Resuelva la ecuación $y'' + y = \tan x$, $0 < x < \pi/2$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$ con raíces $\pm i$, así que la solución de $y'' + y = 0$ es $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$. Usando variación de parámetros, se busca una solución de la forma

$$y_p(x) = u_1(x) \operatorname{sen} x + u_2(x) \cos x$$

Entonces $$y_p' = (u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x) + (u_1 \cos x - u_2 \operatorname{sen} x)$$

Establezca

10 $$u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = 0$$

Entonces $$y_p'' = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2 \cos x$$

Para que y_p sea una solución, se debe tener

$$y_p'' + y_p = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x = \tan x \tag{11}$$

Al resolver las ecuaciones 10 y 11 se obtiene

$$u_1'(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \cos x \tan x$$

$$u_1' = \operatorname{sen} x \qquad u_1(x) = -\cos x$$

(Se busca una solución particular, de manera que no se necesita una constante de integración aquí.) Entonces, de la ecuación 10 se obtiene

$$u_2' = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} u_1' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

La figura 5 muestra cuatro soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 7.

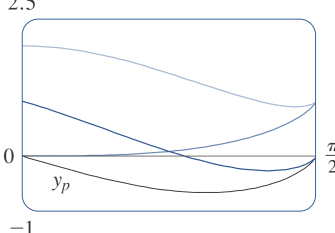



FIGURA 5

Así $$u_2(x) = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x)$$

(Note que $\sec x + \tan x > 0$ para $0 < x < \pi/2$). Por tanto

$$y_p(x) = -\cos x \operatorname{sen} x + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x)] \cos x$$
$$= -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$ ■

17.2 EJERCICIOS

1-10 Resuelva la ecuación diferencial o el problema de valor inicial usando el método de coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 2y' - 8y = 1 - 2x^2$

2. $y'' - 3y' = \operatorname{sen} 2x$

3. $9y'' + y = e^{2x}$

4. $y'' - 2y' + 2y = x + e^x$

5. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$

6. $y'' + 2y' + 5y = 1 + e^x$

7. $y'' - 2y' + 5y = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

8. $y'' - y = xe^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

9. $y'' - y' = xe^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

10. $y'' - 4y = e^x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

11-12 Grafique la solución particular y varias soluciones más. ¿Qué características tienen estas soluciones en común?

11. $y'' + 3y' + 2y = \cos x$ **12.** $y'' + 4y = e^{-x}$

13-18 Escriba una solución de prueba para el método de coeficientes indeterminados. No determine los coeficientes.

13. $y'' + 9y = e^{2x} + x^2 \operatorname{sen} x$

14. $y'' + 9y' = xe^{-x} \cos \pi x$

15. $y'' - 3y' + 2y = e^x + \operatorname{sen} x$

16. $y'' + 3y' - 4y = (x^3 + x)e^x$

17. $y'' + 2y' + 10y = x^2 e^{-x} \cos 3x$

18. $y'' + 4y = e^{3x} + x \operatorname{sen} 2x$

19-22 Resuelva la ecuación diferencial usando (a) coeficientes indeterminados y (b) variación de parámetros.

19. $4y'' + y = \cos x$

20. $y'' - 2y' - 3y = x + 2$

21. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

22. $y'' - y' = e^x$

23-28 Resuelva la ecuación diferencial usando el método de variación de parámetros.

23. $y'' + y = \sec^2 x,\ 0 < x < \pi/2$

24. $y'' + y = \sec^3 x,\ 0 < x < \pi/2$

25. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

26. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$

27. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

28. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

17.3 Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden tienen varias aplicaciones en las ciencias y la ingeniería. En esta sección se explorarán dos de ellas: la vibración de resortes y circuitos eléctricos.

Resortes vibratorios

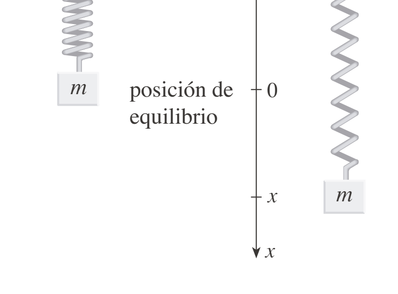


FIGURA 1

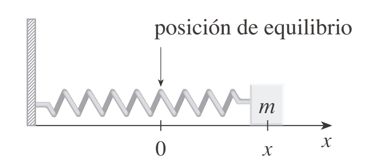


FIGURA 2

Se tiene el movimiento de un objeto con masa m en el extremo de un resorte vertical (como en la figura 1) u horizontal sobre una superficie nivelada (como en la figura 2).

En la sección 6.4 se estudió la ley de Hooke, la cual sostiene que si el resorte se estira (o comprime) x unidades de su longitud natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a x:

$$\text{fuerza de restauración} = -kx$$

donde k es una constante positiva (llamada **constante de resorte**). Si se ignora toda fuerza de resistencia externa (debida a resistencia del aire o fricción), de acuerdo con la segunda ley de Newton (fuerza igual a masa por aceleración), se tiene

$$\boxed{1} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{o} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Su ecuación auxiliar es $mr^2 + k = 0$ con raíces $r = \pm\omega i$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$. Así, la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$$

la cual también puede escribirse como

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ (frecuencia)

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{(amplitud)}$$

$$\cos \delta = \frac{c_1}{A} \qquad \operatorname{sen} \delta = -\frac{c_2}{A} \quad (\delta \text{ es el ángulo de fase})$$

(Véase el ejercicio 17.) Este tipo de movimiento se llama **movimiento armónico simple**.

EJEMPLO 1 Un resorte con masa de 2 kg tiene una longitud natural de 0.5 m. Se requiere una fuerza de 25.6 N para mantenerlo estirado en una longitud de 0.7 m. Si el resorte es estirado a una longitud de 0.7 m y luego soltado con una velocidad inicial de 0, determine la posición de la masa en cualquier momento t.

SOLUCIÓN Con base en la ley de Hooke, la fuerza requerida para estirar el resorte es

$$k(0.2) = 25.6$$

así que $k = 25.6/0.2 = 128$. Al usar este valor de la constante de resorte k, junto con $m = 2$ en la ecuación 1, se tiene

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

Como en el análisis general previo, la solución de esta ecuación es

2 $$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t$$

Se da la condición inicial de que $x(0) = 0.2$. Pero, de la ecuación 2, $x(0) = c_1$. Por tanto $c_1 = 0.2$. Derivando la ecuación 2 se obtiene

$$x'(t) = -8c_1 \operatorname{sen} 8t + 8c_2 \cos 8t$$

Puesto que la velocidad inicial se da como $x'(0) = 0$, se tiene $c_2 = 0$, así que la solución es

$$x(t) = 0.2 \cos 8t$$

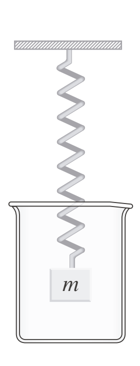


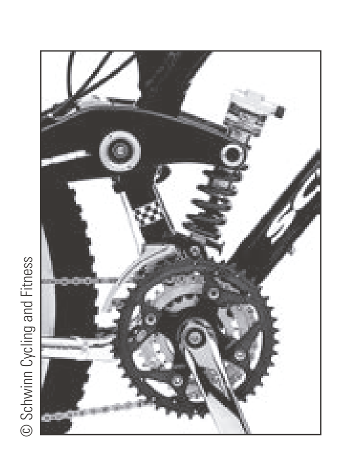
FIGURA 3

Vibraciones amortiguadas

A continuación se considerará el movimiento de un resorte sujeto a una fuerza de fricción (en el caso del resorte horizontal de la figura 2) o a una fuerza de amortiguación (en el caso en que un resorte vertical se mueva a través de un fluido, como en la figura 3). Un ejemplo es la fuerza de amortiguación provista por un amortiguador en un automóvil o una bicicleta.

Se ha supuesto que la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad de la masa y que actúa en la dirección opuesta al movimiento. (Esto ha sido confirmado, al menos aproximadamente, por algunos experimentos físicos.) Así

$$\text{fuerza de amortiguación} = -c\frac{dx}{dt}$$



donde c es una constante positiva llamada **constante de amortiguación**. En este caso, entonces, la segunda ley de Newton da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{fuerza de restauración} + \text{fuerza de amortiguación} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

o

3 $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

La ecuación 3 es una ecuación diferencial lineal de segundo orden y su ecuación auxiliar es $mr^2 + cr + k = 0$. Las raíces son

$$\boxed{4} \qquad r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

De acuerdo con la sección 17.1, se deben analizar tres casos.

CASO I $c^2 - 4mk > 0$ (sobreamortiguación)
En este caso, r_1 y r_2 son raíces reales distintas y

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Como c, m y k son positivas, se tiene $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$, así que las raíces r_1 y r_2 dadas por las ecuaciones 4 deben ser negativas. Esto indica que $x \to 0$ cuando $t \to \infty$. Gráficas representativas de x como una función de t aparecen en la figura 4. Adviértase que no ocurren oscilaciones. (Es posible que la masa pase por la posición de equilibrio una vez, pero solo una vez.) Esto se debe a que $c^2 > 4mk$ significa que hay una vigorosa fuerza de amortiguación (aceite o grasa de alta viscosidad) en comparación con un resorte débil o una masa reducida.



FIGURA 4
Sobreamortiguación

CASO II $c^2 - 4mk = 0$ (amortiguación crítica)
Este caso corresponde a raíces iguales

$$r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$$

y la solución está dada por

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-(c/2m)t}$$

Esto es similar al caso I, y las gráficas representativas se parecen a las de la figura 4 (véase el ejercicio 12), pero la amortiguación es apenas suficiente para suprimir las vibraciones. Cualquier decremento en la viscosidad del fluido conduce a las vibraciones del caso siguiente.

CASO III $c^2 - 4mk < 0$ (subamortiguación)
Aquí las raíces son complejas:

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2m} \pm \omega i$$

donde
$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

La solución está dada por

$$x = e^{-(c/2m)t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

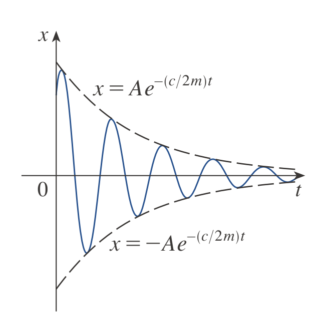


FIGURA 5
Subamortiguación

Se observa que hay oscilaciones amortiguadas por el factor $e^{-(c/2m)t}$. Como $c > 0$ y $m > 0$, se tiene $-(c/2m) < 0$, así que $e^{-(c/2m)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Esto implica que $x \to 0$ cuando $t \to \infty$; es decir, el movimiento decae a 0 a medida que el tiempo aumenta. Una gráfica representativa se muestra en la figura 5.

EJEMPLO 2 Suponga que el resorte del ejemplo 1 está sumergido en un fluido con constante de amortiguación $c = 40$. Determine la posición de la masa en cualquier momento t si parte de la posición de equilibrio y recibe un empujón para empezar con una velocidad inicial de 0.6 m/s.

SOLUCIÓN Del ejemplo 1, la masa es $m = 2$ y la constante de resorte $k = 128$, así que la ecuación diferencial (3) se convierte en

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0$$

o
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + 20r + 64 = (r + 4)(r + 16) = 0$ con raíces -4 y -16, de modo que el movimiento está sobreamortiguado y la solución es

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-16t}$$

La figura 6 muestra la gráfica de la función de posición para el movimiento sobreamortiguado del ejemplo 2.

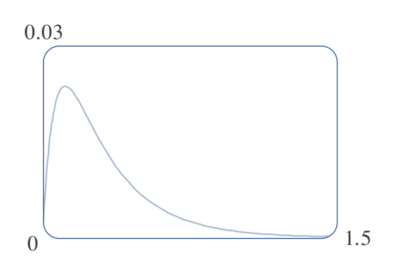


FIGURA 6

Dado que $x(0) = 0$, así que $c_1 + c_2 = 0$. Al derivar se obtiene

$$x'(t) = -4c_1e^{-4t} - 16c_2e^{-16t}$$

de manera que
$$x'(0) = -4c_1 - 16c_2 = 0.6$$

Como $c_2 = -c_1$, esto da $12c_1 = 0.6$ o $c_1 = 0.05$. Por tanto

$$x = 0.05(e^{-4t} - e^{-16t})$$ ■

Vibraciones forzadas

Suponga que, además de la fuerza de restauración y la fuerza de amortiguación, el movimiento del resorte se ve afectado por una fuerza externa $F(t)$. Entonces, la segunda ley de Newton da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{fuerza de restauración} + \text{fuerza de amortiguación} + \text{fuerza externa}$$

$$= -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Así, en lugar de la ecuación homogénea (3), el movimiento del resorte es gobernado ahora por la siguiente ecuación diferencial no homogénea:

5
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

El movimiento del resorte puede determinarse por los métodos de la sección 17.2.

Un tipo de fuerza externa de ocurrencia común es una función de fuerza periódica

$$F(t) = F_0 \cos \omega_0 t \qquad \text{donde} \qquad \omega_0 \neq \omega = \sqrt{k/m}$$

En este caso, y en ausencia de una fuerza de amortiguación ($c = 0$), en el ejercicio 9 se le pedirá usar el método de coeficientes indeterminados para demostrar que

$$\boxed{6} \qquad x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t$$

Si $\omega_0 = \omega$, la frecuencia aplicada refuerza la frecuencia natural y el resultado son vibraciones de gran amplitud. Este es el fenómeno de la **resonancia** (véase el ejercicio 10).

Circuitos eléctricos

En las secciones 9.3 y 9.5 se usaron ecuaciones separables y lineales de primer orden para analizar circuitos eléctricos que contengan una resistencia e inductor (véase la figura 9.3.5 o la figura 9.5.4) o una resistencia y capacitor (véase el ejercicio 9.5.29). Ahora que se sabe cómo resolver ecuaciones lineales de segundo orden, se está en posibilidad de analizar el circuito que aparece en la figura 7. Este contiene una fuerza electromotriz E (provista por una batería o generador), una resistencia R, un inductor L y un capacitor C, en serie. Si la carga sobre el capacitor en el momento t es $Q = Q(t)$, entonces la corriente es la razón de cambio de Q con respecto a t: $I = dQ/dt$. Como en la sección 9.5, se sabe por la física que las caídas de voltaje por la resistencia, inductor y capacitor son

FIGURA 7

$$RI \qquad L\frac{dI}{dt} \qquad \frac{Q}{C}$$

respectivamente. La ley del voltaje de Kirchhoff establece que la suma de estas caídas de voltaje es igual al voltaje provisto:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Como $I = dQ/dt$, esta ecuación se convierte en

$$\boxed{7} \qquad \boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)}$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Si la carga Q_0 y la corriente I_0 son conocidas en el momento 0, se tienen las condiciones iniciales

$$Q(0) = Q_0 \qquad Q'(0) = I(0) = I_0$$

y el problema de valor inicial puede resolverse por los métodos de la sección 17.2.

Una ecuación diferencial para la corriente puede obtenerse derivando la ecuación 7 con respecto a t y recordando que $I = dQ/dt$:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

EJEMPLO 3 Determine la carga y corriente en el momento t en el circuito de la figura 7 si $R = 40\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 16 \times 10^{-4}$ F, $E(t) = 100 \cos 10\,t$ y la carga y corriente iniciales son de 0.

SOLUCIÓN Con los valores dados de L, R, C y $E(t)$, la ecuación 7 se convierte en

8 $$\frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + 625Q = 100 \cos 10t$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + 40r + 625 = 0$ con raíces

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i$$

así que la solución de la ecuación complementaria es

$$Q_c(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \operatorname{sen} 15t)$$

Para el método de coeficientes indeterminados se prueba la solución particular

$$Q_p(t) = A \cos 10t + B \operatorname{sen} 10t$$

Entonces $$Q_p'(t) = -10A \operatorname{sen} 10t + 10B \cos 10t$$

$$Q_p''(t) = -100A \cos 10t - 100B \operatorname{sen} 10t$$

Al sustituir en la ecuación 8 se tiene

$$(-100A \cos 10t - 100B \operatorname{sen} 10t) + 40(-10A \operatorname{sen} 10t + 10B \cos 10t)$$
$$+ 625(A \cos 10t + B \operatorname{sen} 10t) = 100 \cos 10t$$

o $$(525A + 400B) \cos 10t + (-400A + 525B) \operatorname{sen} 10t = 100 \cos 10t$$

Igualando coeficientes se tiene

$$525A + 400B = 100 \qquad \text{o} \qquad 21A + 16B = 4$$
$$-400A + 525B = 0 \qquad \text{o} \qquad -16A + 21B = 0$$

La solución de este sistema es $A = \frac{84}{697}$ y $B = \frac{64}{697}$, así que una solución particular es

$$Q_p(t) = \tfrac{1}{697}(84 \cos 10t + 64 \operatorname{sen} 10t)$$

y la solución general es

$$Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t)$$

$$= e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \operatorname{sen} 15t) + \tfrac{4}{697}(21 \cos 10t + 16 \operatorname{sen} 10t)$$

Al imponer la condición inicial $Q(0) = 0$ se obtiene

$$Q(0) = c_1 + \tfrac{84}{697} = 0 \qquad c_1 = -\tfrac{84}{697}$$

Para imponer la otra condición inicial, se deriva primero para determinar la corriente:

$$I = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2) \cos 15t + (-15c_1 - 20c_2) \operatorname{sen} 15t]$$

$$+ \tfrac{40}{697}(-21 \operatorname{sen} 10t + 16 \cos 10t)$$

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \tfrac{640}{697} = 0 \qquad c_2 = -\tfrac{464}{2091}$$

Así, la fórmula para la carga es

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[\frac{e^{-20t}}{3}(-63 \cos 15t - 116 \operatorname{sen} 15t) + (21 \cos 10t + 16 \operatorname{sen} 10t)\right]$$

y la expresión para la corriente es

$$I(t) = \tfrac{1}{2091}[e^{-20t}(-1920 \cos 15t + 13060 \operatorname{sen} 15t) + 120(-21 \operatorname{sen} 10t + 16 \cos 10t)]$$

■

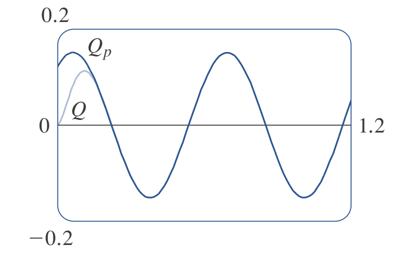


FIGURA 8

NOTA 1 En el ejemplo 3 la solución para $Q(t)$ consta de dos partes. Como $e^{-20t} \to 0$ cuando $t \to \infty$ y tanto cos $15t$ como sen $15t$ son funciones acotadas,

$$Q_c(t) = \tfrac{4}{2091}e^{-20t}(-63 \cos 15t - 116 \operatorname{sen} 15t) \to 0 \qquad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

Así, para valores grandes de t,

$$Q(t) \approx Q_p(t) = \tfrac{4}{697}(21 \cos 10t + 16 \operatorname{sen} 10t)$$

y por esta razón $Q_p(t)$ se llama **solución de estado estacionario**. La figura 8 muestra cómo se compara la gráfica de la solución de estado estacionario con la gráfica de Q en este caso.

5 $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

7 $$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

NOTA 2 Al comparar las ecuaciones 5 y 7 se observa que son matemáticamente idénticas. Esto sugiere que las analogías de la tabla siguiente entre situaciones físicas son, a primera vista, tan diferentes.

Sistema de resortes		Circuito eléctrico	
x	desplazamiento	Q	carga
dx/dt	velocidad	$I = dQ/dt$	corriente
m	masa	L	inductancia
c	constante de amortiguación	R	resistencia
k	constante de resorte	$1/C$	elastancia
$F(t)$	fuerza externa	$E(t)$	fuerza electromotriz

También se pueden transferir otras ideas de una situación a la otra. Por ejemplo, la solución de estado estacionario analizada en la nota 1 tiene sentido en el sistema de resortes. Y el fenómeno de la resonancia en el sistema de resortes puede ser trasladado a los circuitos eléctricos con el significado útil de resonancia eléctrica.

17.3 EJERCICIOS

1. Un resorte tiene una longitud natural de 0.75 m y una masa de 5 kg. Una fuerza de 25 N es necesaria para mantener estirado el resorte en una longitud de 1 m. Si el resorte es estirado a una longitud de 1.1 m y luego soltado con velocidad 0, determine la posición de la masa después de t segundos.

2. Un resorte con masa de 8 kg se mantiene estirado 0.4 m más allá de su longitud natural por una fuerza de 32 N. El resorte parte de su posición de equilibrio y recibe una velocidad inicial de 1 m/s. Determine la posición de la masa en cualquier momento t.

3. Un resorte con masa de 2 kg tiene una constante de amortiguación de 14, y se requiere una fuerza de 6 N para mantenerlo estirado 0.5 m más allá de su longitud natural. El resorte es estirado 1 m más allá de su longitud natural y luego soltado con velocidad cero. Determine la posición de la masa en cualquier momento t.

4. Una fuerza de 13 N se necesita para mantener un resorte con masa de 2 kg estirado 0.25 m más allá de su longitud natural. La constante de amortiguación del resorte es $c = 8$.
(a) Si la masa parte de la posición de equilibrio con una velocidad de 0.5 m/s, halle su posición en el momento t.
(b) Grafique la función de posición de la masa.

5. Para el resorte del ejercicio 3, halle la masa que produciría amortiguación crítica.

6. Para el resorte del ejercicio 4, halle la constante de amortiguación que produciría amortiguación crítica.

7. Un resorte tiene masa de 1 kg y su constante de resorte es de $k = 100$. Es soltado en un punto 0.1 m arriba de su posición de equilibrio. Grafique la función de posición para los valores siguientes de la constante de amortiguación c: 10, 15, 20, 25, 30. ¿Qué tipo de amortiguación ocurre en cada caso?

8. Un resorte tiene masa de 1 kg y su constante de amortiguación es de $c = 10$. El resorte parte de su posición de equilibrio con una velocidad de 1 m/s. Grafique la función de posición para los valores siguientes de la constante de resorte k: 10, 20, 25, 30, 40. ¿Qué tipo de amortiguación ocurre en cada caso?

9. Suponga que un resorte tiene masa m y constante de resorte k y sea $\omega = \sqrt{k/m}$. Suponga que la constante de amortiguación es tan reducida que la fuerza de amortiguación es insignificante. Si se aplica una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$, donde $\omega_0 \neq \omega$, use el método de coeficientes indeterminados para demostrar que el movimiento de la masa es descrito por la ecuación 6.

10. Al igual que en el ejercicio 9, considere un resorte con masa m, constante de resorte k y constante de amortiguación $c = 0$ y sea $\omega = \sqrt{k/m}$. Si se aplica una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (la frecuencia aplicada es igual a la frecuencia natural), use el método de coeficientes indeterminados para demostrar que el movimiento de la masa está dado por

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{2m\omega} t \operatorname{sen} \omega t$$

11. Demuestre que si $\omega_0 \neq \omega$, pero ω/ω_0 es un número racional, el movimiento descrito por la ecuación 6 es periódico.

12. Considere un resorte sujeto a una fuerza de fricción o de amortiguación.
(a) En el caso críticamente amortiguado, el movimiento está dado por $x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$. Demuestre que la gráfica de x cruza el eje t siempre que c_1 y c_2 tengan signos opuestos.
(b) En el caso sobreamortiguado, el movimiento está dado por $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, donde $r_1 > r_2$. Determine una condición sobre las magnitudes relativas de c_1 y c_2 en la cual la gráfica de x cruza el eje t en un valor positivo de t.

13. Un circuito en serie consta de un resistor con $R = 20\ \Omega$, un inductor con $L = 1$ H, un capacitor con $C = 0.002$ F y una batería de 12 V. Si la carga y corriente iniciales son de 0, determine la carga y corriente en el momento t.

14. Un circuito en serie contiene un resistor con $R = 24\ \Omega$, un inductor con $L = 2$ H, un capacitor con $C = 0.005$ F y una batería de 12 V. La carga inicial es de $Q = 0.001$ C y la corriente inicial de 0.
(a) Determine la carga y corriente en el momento t.
(b) Grafique las funciones de carga y corriente.

15. La batería del ejercicio 13 es reemplazada por un generador que produce un voltaje de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$. Determine la carga en el momento t.

16. La batería del ejercicio 14 es reemplazada por un generador que produce un voltaje de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$.
(a) Determine la carga en el momento t.
(b) Grafique la función de carga.

17. Verifique que la solución de la ecuación 1 puede escribirse en la forma $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$.

18. La figura muestra un péndulo con longitud L y el ángulo θ desde la vertical al péndulo. Se puede demostrar que θ, como una función de tiempo, satisface la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Para valores pequeños de θ se puede usar la aproximación lineal $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, y entonces la ecuación diferencial se vuelve lineal.

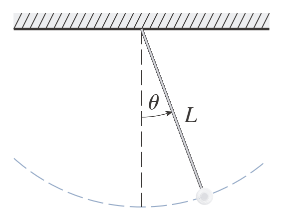
(a) Determine la ecuación de movimiento de un péndulo con longitud de 1 m si θ es inicialmente de 0.2 rad y la velocidad angular inicial es $d\theta/dt = 1$ rad/s.

(b) ¿Cuál es el ángulo máximo desde la vertical?

(c) ¿Cuál es el período del péndulo (es decir, el tiempo para completar una oscilación de ida y vuelta)?

(d) ¿Cuándo estará en posición vertical por primera vez?

(e) ¿Cuál es la velocidad angular cuando el péndulo es vertical?



17.4 Soluciones con series de potencias

Muchas ecuaciones diferenciales no pueden resolverse explícitamente en términos de combinaciones finitas de funciones simples conocidas. Esto es cierto aun para una ecuación de apariencia tan sencilla como

1 $$y'' - 2xy' + y = 0$$

Pero es importante poder resolver ecuaciones como la ecuación 1, porque surgen de problemas físicos y, en particular, en relación con la ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica. En tal caso, se usa el método de series de potencias; es decir, se busca una solución de la forma

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

El método consiste en sustituir esta expresión en la ecuación diferencial y determinar los valores de los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Esta técnica se asemeja al método de coeficientes indeterminados expuesto en la sección 17.2.

Antes de usar series de potencias para resolver la ecuación 1, se ilustrará el método en la ecuación más simple $y'' + y = 0$ del ejemplo 1. Es cierto que ya se conoce cómo resolver esta ecuación mediante las técnicas de la sección 17.1, pero es más fácil entender el método de las series de potencias cuando se aplica a esta ecuación más sencilla.

EJEMPLO 1 Use series de potencias para resolver la ecuación $y'' + y = 0$.

SOLUCIÓN Suponga que hay una solución de la forma

2 $$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Se puede derivar series de potencias término por término, de modo que

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

3 $$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Al escribir los primeros términos de (4), usted puede ver que es igual a (3). Para obtener (4), se reemplaza n por $n + 2$, y se comienza la suma en 0 en lugar de 2.

A fin de comparar más fácilmente las expresiones para y y y'', se reescribe y'' como sigue:

4 $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)c_{n+2}x^n$$

Al sustituir las expresiones de las ecuaciones 2 y 4 en la ecuación diferencial, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

o

5 $$\sum_{n=0}^{\infty} [(n + 2)(n + 1)c_{n+2} + c_n]x^n = 0$$

Si dos series de potencias son iguales, los coeficientes correspondientes deben ser iguales. Por tanto, los coeficientes de x^n en la ecuación 5 deben ser de 0:

$$(n + 2)(n + 1)c_{n+2} + c_n = 0$$

6 $$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n + 1)(n + 2)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

La ecuación 6 se llama *relación de recursión*. Si c_0 y c_1 son conocidas, esta ecuación permite determinar recursivamente los coeficientes restantes poniendo $n = 0, 1, 2, 3,$... en sucesión.

Ponga $n = 0$: $\quad c_2 = -\dfrac{c_0}{1 \cdot 2}$

Ponga $n = 1$: $\quad c_3 = -\dfrac{c_1}{2 \cdot 3}$

Ponga $n = 2$: $\quad c_4 = -\dfrac{c_2}{3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{c_0}{4!}$

Ponga $n = 3$: $\quad c_5 = -\dfrac{c_3}{4 \cdot 5} = \dfrac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{c_1}{5!}$

Ponga $n = 4$: $\quad c_6 = -\dfrac{c_4}{5 \cdot 6} = -\dfrac{c_0}{4!\, 5 \cdot 6} = -\dfrac{c_0}{6!}$

Ponga $n = 5$: $\quad c_7 = -\dfrac{c_5}{6 \cdot 7} = -\dfrac{c_1}{5!\, 6 \cdot 7} = -\dfrac{c_1}{7!}$

En este momento ya puede identificarse el patrón:

Para los coeficientes pares, $c_{2n} = (-1)^n \dfrac{c_0}{(2n)!}$

Para los coeficientes impares, $c_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{c_1}{(2n + 1)!}$



Al poner estos valores en la ecuación 2, se escribe la solución como

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots$$

$$= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right)$$

$$+ c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Note que hay dos constantes arbitrarias, c_0 y c_1. ■

NOTA 1 Se reconocen las series obtenidas en el ejemplo 1 como la serie de Maclaurin para cos x y sen x, respectivamente. (Véanse la ecuaciones 11.10.16 y 11.10.15.) Por tanto, se podría escribir la solución como

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x$$

Pero usualmente no se pueden expresar soluciones de ecuaciones diferenciales de series de potencias en términos de funciones conocidas.

EJEMPLO 2 Resuelva $y'' - 2xy' + y = 0$.

SOLUCIÓN Suponga que hay una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

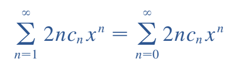
Entonces
$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

y
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

como en el ejemplo 1. Al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$


$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n]x^n = 0$$

Esta ecuación es cierta si los coeficientes de x^n son 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0$$

7
$$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}c_n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$



Esta relación de recursión se resuelve poniendo $n = 0, 1, 2, 3,...$ sucesivamente en la ecuación 7:

$$\text{Ponga } n = 0: \qquad c_2 = \frac{-1}{1 \cdot 2} c_0$$

$$\text{Ponga } n = 1: \qquad c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} c_1$$

$$\text{Ponga } n = 2: \qquad c_4 = \frac{3}{3 \cdot 4} c_2 = -\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c_0 = -\frac{3}{4!} c_0$$

$$\text{Ponga } n = 3: \qquad c_5 = \frac{5}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1 = \frac{1 \cdot 5}{5!} c_1$$

$$\text{Ponga } n = 4: \qquad c_6 = \frac{7}{5 \cdot 6} c_4 = -\frac{3 \cdot 7}{4!\,5 \cdot 6} c_0 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} c_0$$

$$\text{Ponga } n = 5: \qquad c_7 = \frac{9}{6 \cdot 7} c_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{5!\,6 \cdot 7} c_1 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} c_1$$

$$\text{Ponga } n = 6: \qquad c_8 = \frac{11}{7 \cdot 8} c_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} c_0$$

$$\text{Ponga } n = 7: \qquad c_9 = \frac{13}{8 \cdot 9} c_7 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} c_1$$

En general, los coeficientes pares están dados por

$$c_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} c_0$$

y los coeficientes impares por

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} c_1$$

La solución es

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots \\ &= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!}x^6 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!}x^8 - \cdots\right) \\ &\quad + c_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 5}{5!}x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!}x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!}x^9 + \cdots\right) \end{aligned}$$

u

8
$$\begin{aligned} y &= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} x^{2n}\right) \\ &\quad + c_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$
■

NOTA 2 En el ejemplo 2 se tuvo que *suponer* que la ecuación diferencial tenía una solución con series de potencias. Pero ahora se podría verificar directamente que la función dada por la ecuación 8 es en efecto una solución.

NOTA 3 A diferencia de la situación del ejemplo 1, las series de potencias que surgen en la solución del ejemplo 2 no definen funciones elementales. Las funciones

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{(2n)!} x^{2n}$$

y

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

son funciones perfectamente satisfactorias, pero no pueden expresarse en términos de funciones conocidas. Se pueden usar estas expresiones de series de potencias para y_1 y y_2 para calcular valores aproximados de las funciones e incluso graficarlas. La figura 1 muestra las primeras sumas parciales $T_0, T_2, T_4, \ldots$ (polinomios de Taylor) para $y_1(x)$, y se observa cómo convergen en y_1. De igual manera se pueden graficar lo mismo y_1 que y_2, como en la figura 2.

2 T_0 −2 2 T_{10} −8



FIGURA 1

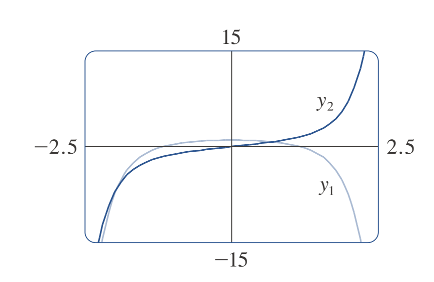


FIGURA 2

NOTA 4 Si se pidiera resolver el problema de valor inicial

$$y'' - 2xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

se observaría del teorema 11.10.5 que

$$c_0 = y(0) = 0 \qquad c_1 = y'(0) = 1$$

Esto simplificaría los cálculos en el ejemplo 2, ya que todos los coeficientes pares serían de 0. La solución al problema de valor inicial es

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

17.4 EJERCICIOS

1-11 Use series de potencias para resolver la ecuación diferencial.

1. $y' - y = 0$

2. $y' = xy$

3. $y' = x^2 y$

4. $(x-3)y' + 2y = 0$

5. $y'' + xy' + y = 0$

6. $y'' = y$

7. $(x-1)y'' + y' = 0$

8. $y'' = xy$

9. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

10. $y'' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

11. $y'' + x^2 y' + xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

12. La solución del problema de valor inicial

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

se llama función de Bessel de orden 0.

(a) Resuelva el problema de valor inicial para determinar un desarrollo de series de potencias para la función de Bessel.

(b) Grafique varios polinomios de Taylor hasta llegar a uno que parezca una buena aproximación de la función de Bessel en el intervalo $[-5, 5]$.

17 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
(b) Escriba la ecuación auxiliar.
(c) ¿Cómo se usan las raíces de la ecuación auxiliar para resolver la ecuación diferencial? Escriba la forma de la solución para cada uno de los tres casos que puedan ocurrir.

2. (a) ¿Qué es un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de segundo orden?
(b) ¿Qué es un problema de valor frontera para una ecuación de ese tipo?

3. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
(b) ¿Cuál es la ecuación complementaria? ¿Cómo ayuda esta a resolver la ecuación diferencial original?
(c) Explique cómo funciona el método de coeficientes indeterminados.
(d) Explique cómo funciona el método de variación de parámetros.

4. Mencione dos aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

5. ¿Cómo se usan las series de potencias para resolver una ecuación diferencial?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si y_1 y y_2 son soluciones de $y'' + y = 0$, entonces $y_1 + y_2$ también es una solución de la ecuación.

2. Si y_1 y y_2 son soluciones de $y'' + 6y' + 5y = x$, entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ también es una solución de la ecuación.

3. La solución general de $y'' - y = 0$ puede escribirse como

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x$$

4. La ecuación $y'' - y = e^x$ tiene una solución particular de la forma

$$y_p = Ae^x$$

EJERCICIOS

1-10 Resuelva la ecuación diferencial.

1. $4y'' - y = 0$

2. $y'' - 2y' + 10y = 0$

3. $y'' + 3y = 0$

4. $y'' + 8y' + 16y = 0$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x \cos x$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \operatorname{sen} 2x$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = 1 + e^{-2x}$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \csc x, \quad 0 < x < \pi/2$

11-14 Resuelva el problema de valor inicial.

11. $y'' + 6y' = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 12$

12. $y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

13. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

14. $9y'' + y = 3x + e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

15-16 Resuelva el problema de valor frontera, si es posible.

15. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1$

16. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -e^{-2\pi}$

17. Use series de potencias para resolver el problema de valor inicial

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

18. Use series de potencias para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - xy' - 2y = 0$$

19. Un circuito en serie contiene un resistor con $R = 40\ \Omega$, un inductor con $L = 2$ H, un capacitor con $C = 0.0025$ F y una batería de 12 V. La carga inicial es de $Q = 0.01$ C y la corriente inicial de 0. Determine la carga en el momento t.



20. Un resorte con masa de 2 kg tiene una constante de amortiguación de 16, y una fuerza de 12.8 N lo mantiene estirado 0.2 m más allá de su longitud natural. Determine la posición de la masa en el momento t si parte de la posición de equilibrio con una velocidad de 2.4 m/s.

21. Suponga que la Tierra es una esfera sólida de densidad uniforme con masa M y radio $R = 6370$ km. Para una partícula de masa m dentro de la Tierra a una distancia r del centro de la Tierra, la fuerza gravitacional que atrae la partícula al centro es

$$F_r = \frac{-GM_r m}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y M_r la masa de la Tierra dentro de la esfera de radio r.

(a) Demuestre que $F_r = \dfrac{-GMm}{R^3}\, r$.

(b) Suponga que se perfora un agujero a través de la Tierra a lo largo de un diámetro. Demuestre que si una partícula de masa m es separada del resto en la superficie y arrojada al agujero, entonces la distancia $y = y(t)$ de la partícula desde el centro de la Tierra en el momento t está dada por

$$y''(t) = -k^2 y(t)$$

donde $k^2 = GM/R^3 = g/R$.

(c) Concluya del inciso (b) que la partícula es sometida a movimiento armónico simple. Determine el período T.

(d) ¿Con qué velocidad pasa la partícula por el centro de la Tierra?

Apéndices

F Demostración de teoremas

G Números complejos

H Respuestas a los ejercicios con número impar

F Demostración de teoremas

En este apéndice se presentan comprobaciones de varios teoremas enunciados en el cuerpo principal del texto. Las secciones a las que corresponden se indican al margen.

Sección 11.8

A fin de comprobar el teorema 11.8.4, primero necesita los resultados siguientes.

Teorema

1. Si una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ converge cuando $x = b$ (donde $b \neq 0$), converge cada vez que $|x| < |b|$.
2. Si una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ diverge cuando $x = d$ (donde $d \neq 0$), diverge cada vez que $|x| > |d|$.

COMPROBACIÓN DE 1 Suponga que $\Sigma\, c_n b^n$ converge. Entonces, por el teorema 11.2.6, tenemos $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$. De acuerdo con la definición 11.1.2 con $\varepsilon = 1$, hay un entero positivo N tal que $|c_n b^n| < 1$ cada vez que $n \geqslant N$. Así, para $n \geqslant N$, se tiene

$$|c_n x^n| = \left|\frac{c_n b^n x^n}{b^n}\right| = |c_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n < \left|\frac{x}{b}\right|^n$$

Si $|x| < |b|$, entonces $|x/b| < 1$, así que $\Sigma\, |x/b|^n$ es una serie geométrica convergente. En consecuencia, por la prueba de comparación, la serie $\Sigma_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$ es convergente. Así, la serie $\Sigma\, c_n x^n$ es absolutamente convergente, y por tanto convergente. ■

COMPROBACIÓN DE 2 Suponga que $\Sigma\, c_n d^n$ diverge. Si x es cualquier número tal que $|x| > |d|$, entonces $\Sigma\, c_n x^n$ no puede converger, porque, por la parte 1, la convergencia de $\Sigma\, c_n x^n$ implicaría la convergencia de $\Sigma\, c_n d^n$. Por tanto, $\Sigma\, c_n x^n$ diverge cada vez que $|x| > |d|$. ■

Teorema Para una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ hay únicamente tres posibilidades:

1. La serie converge solo cuando $x = 0$.
2. La serie converge para todas las x.
3. Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x| < \mathrm{R}$ y diverge si $|x| > R$.

COMPROBACIÓN Suponga que ni el caso 1 ni el caso 2 son verdaderos. Entonces, hay números diferentes de cero b y d tales que $\Sigma\, c_n x^n$ converge para $x = b$ y diverge para $x = d$. Por tanto, el conjunto $S = \{x \mid \Sigma\, c_n x^n \text{ converge}\}$ no está vacío. Por el teorema precedente, la serie diverge si $|x| > |d|$, así que $|x| \leqslant |d|$ para todas las $x \in S$. Esto indica que $|d|$ es un límite superior para el conjunto S. Así, por el axioma de integridad (véase la sección 11.1), S tiene un límite superior mínimo R. Si $|x| > R$, entonces $x \notin S$, así que $\Sigma\, c_n x^n$ diverge. Si $|x| < R$, entonces $|x|$ no es un límite superior para S y por tanto existe $b \in S$ tal que $b > |x|$. Como $b \in S$, $\Sigma\, c_n x^n$ converge, así que, por el teorema precedente, $\Sigma\, c_n x^n$ converge. ■

4 Teorema Para una serie de potencias $\Sigma\, c_n(x-a)^n$ hay únicamente tres posibilidades:

1. La serie converge solo cuando $x = a$.
2. La serie converge para todas las x.
3. Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$.

COMPROBACIÓN Si se cambia de variable $u = x - a$, la serie de potencias se convierte en $\Sigma\, c_n u^n$ y se aplica el teorema precedente a esta serie. En el caso 3, se tiene convergencia para $|u| < R$ y divergencia para $|u| > \text{R}$.
Así, se tiene convergencia para $|x-a| < R$ y divergencia para $|x-a| > R$. ■

Sección 14.3

Teorema de Clairaut Suponga que f se define en un disco D que contiene el punto (a, b). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, entonces $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

COMPROBACIÓN Para valores reducidos de h, $h \neq 0$, considérese la diferencia

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]$$

Nótese que si se concede que $g(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$, entonces

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a)$$

Por el teorema del valor medio, hay un número c entre a y $a + h$ tal que

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b+h) - f_x(c, b)]$$

Al aplicar nuevamente el teorema del valor medio, esta vez a f_x, se obtiene un número d entre b y $b + h$ tal que

$$f_x(c, b+h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Al combinar estas ecuaciones, se obtiene

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Si $h \to 0$, entonces $(c, d) \to (a, b)$, así que la continuidad de f_{xy} en (a, b) da

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \to (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

De igual forma, escribiendo

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)]$$

y usando el teorema del valor medio dos veces y la continuidad de f_{yx} en (a, b), se obtiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

De esto se sigue que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■



Sección 14.4

8 Teorema Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es derivable en (a, b).

COMPROBACIÓN Sea

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

De acuerdo con (14.4.7), para comprobar que f es derivable en (a, b) se tiene que demostrar que puede escribir Δz en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.
En referencia a la figura 4, se establece

$$\boxed{1} \qquad \Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]$$

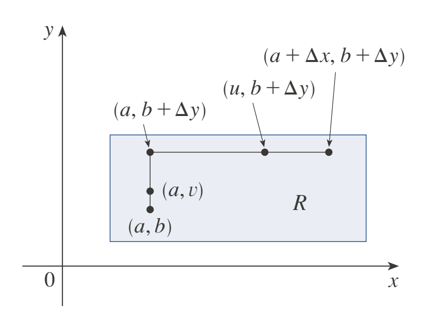


FIGURA 4

Observe que la función de una variable

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

está definida en el intervalo $[a, a + \Delta x]$ y $g'(x) = f_x(x, b + \Delta y)$. Si se aplica el teorema del valor medio a g, se obtiene

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u)\,\Delta x$$

donde u es algún número entre a y $a + \Delta x$. En términos de f, esta ecuación se convierte en

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x$$

Esta ecuación ofrece una expresión para la primera parte del miembro derecho de la ecuación 1. Para la segunda parte se concede que $h(y) = f(a, y)$. Entonces, h es una función de una variable definida en el intervalo $[b, b + \Delta y]$ y $h'(y) = f_y(a, y)$.
Una segunda aplicación del teorema del valor medio da entonces

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v)\,\Delta y$$

donde v es algún número entre b y $b + \Delta y$. En términos de f, esto se convierte en

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y\,(a, v)\,\Delta y$$

Ahora se sustituyen estas expresiones en la ecuación 1 y se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x + f_y(a, v)\,\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + [f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)]\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y \\ &\qquad + [f_y(a, v) - f_y(a, b)]\,\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y\end{aligned}$$

donde $$\varepsilon_1 = f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)$$

$$\varepsilon_2 = f_y(a, v) - f_y(a, b)$$

Como $(u, b + \Delta y) \to (a, b)$ y $(a, v) \to (a, b)$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ y como f_x y f_y son continuas en (a, b), vemos que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Por consiguiente, f es derivable en (a, b). ■

G Números complejos

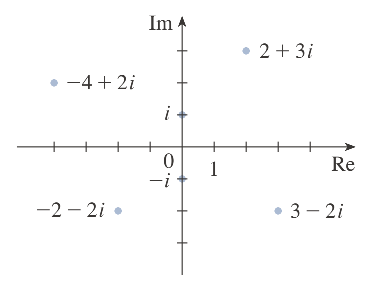


FIGURA 1
Números complejos como puntos en el plano de Argand

Un **número complejo** puede representarse con una expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es un símbolo con la propiedad de que $i^2 = -1$. El número complejo $a + bi$ puede representarse también con el par ordenado (a, b) y trazarse como un punto en un plano (llamado plano de Argand) como en la figura 1. Así, el número complejo $i = 0 + 1 \cdot i$ se identifica con el punto $(0, 1)$.

La **parte real** del número complejo $a + bi$ es el número real a y la **parte imaginaria** es el número real b. Así, la parte real de $4 - 3i$ es 4 y la parte imaginaria es –3. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales** si $a = c$ y $b = d$, es decir si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. En el plano de Argand, el eje horizontal se llama eje real y el eje vertical se llama eje imaginario.

La suma y diferencia de dos números complejos se definen sumando o restando sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por ejemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

El producto de números complejos se define de tal forma que las usuales leyes conmutativa y distributiva sean válidas:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Como $i^2 = -1$, esto se convierte en

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i) \\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$ ■

La división de números complejos es muy parecida a la racionalización del denominador de una expresión racional. Para el número complejo $z = a + bi$, se define su **conjugado complejo** como $\overline{z} = a - bi$. Para determinar el cociente de dos números complejos se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado complejo del denominador.

EJEMPLO 2 Expese el número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ en la forma $a + bi$.

SOLUCIÓN Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado complejo de $2 + 5i$, es decir $2 - 5i$, y se aprovecha el resultado del ejemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$ ■

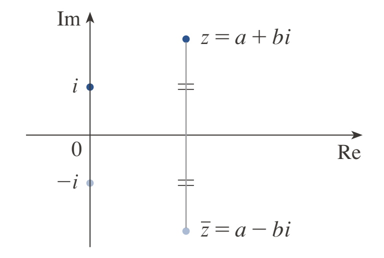


FIGURA 2

La interpretación geométrica del conjugado complejo se muestra en la figura 2: $\overline{z}$ es el reflejo de z a través del eje real. Se enlistan algunas de las propiedades del conjugado complejo en el recuadro siguiente. Las comprobaciones se encuentran después de la definición y se solicitarán en el ejercicio 18.

Propiedades de los conjugados

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

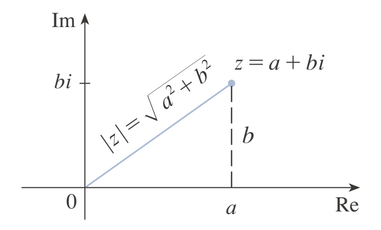


FIGURA 3

El **módulo**, o **valor absoluto**, $|z|$ de un número complejo $z = a + bi$ es su distancia del origen. En la figura 3 se observa que si $z = a + bi$, entonces

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

así que

$$z\overline{z} = |z|^2$$

Esto explica que el procedimiento de división del ejemplo 2 opere en general:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

Como $i^2 = -1$, se puede concebir a i como una raíz cuadrada de –1. Pero observe que también $(-i)^2 = i^2 = -1$, así que $-i$ es también una raíz cuadrada de –1. Se dice que i es la **raíz cuadrada principal** de -1 y se escribe $\sqrt{-1} = i$. En general, si c es cualquier número positivo, se escribe

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\; i$$

Con esta convención, la derivación y fórmula usuales de las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son válidas aun si $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 3 Determine las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula cuadrática, se tiene

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

Observe que las soluciones de la ecuación del ejemplo 3 son conjugados complejos entre sí. En general, las soluciones de cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes reales a, b y c son siempre conjugados complejos. (Si z es real, $\overline{z} = z$, así que z es su propia conjugada.)

Se ha visto que si se permiten números complejos como soluciones, todas las ecuaciones cuadráticas tendrán una solución. En términos más generales, es cierto que todas las ecuaciones polinomiales

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grado al menos uno tiene una solución entre los números complejos. Este hecho se conoce como teorema fundamental del álgebra y fue comprobado por Gauss.

Forma polar

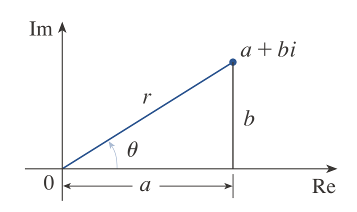


FIGURA 4

Sabemos que cualquier número complejo $z = a + bi$ puede ser considerado un punto (a, b) y que cualquier punto de este tipo puede representarse con coordenadas polares (r, θ), con $r \geqslant 0$. De hecho,

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

como en la figura 4. Entonces se tiene

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

Así, se puede escribir cualquier número complejo z en la forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

donde $\quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad$ y $\quad \tan\theta = \dfrac{b}{a}$

El ángulo θ se llama **argumento** de z y se escribe $\theta = \arg(z)$. Note que $\arg(z)$ no es único; cualesquiera dos argumentos de z difieren por un múltiplo entero de 2π.

EJEMPLO 4 Escriba los números siguientes en forma polar.

(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUCIÓN

(a) Se tiene $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\tan\theta = 1$, así que se puede tomar $\theta = \pi/4$. Por tanto, la forma polar es

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

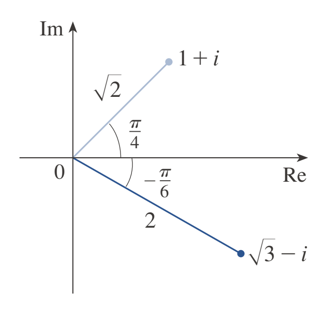


FIGURA 5

(b) Aquí se tiene $r = |w| = \sqrt{3+1} = 2$ y $\tan\theta = -1/\sqrt{3}$. Como w reside en el cuarto cuadrante, se toma $\theta = -\pi/6$ y

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Los números z y w aparecen en la figura 5. ■

La forma polar de los números complejos aporta una idea de la multiplicación y la división. Sean

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

dos números complejos escritos en forma polar. Entonces,

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

Por tanto, usando las fórmulas de la adición para el coseno y el seno, se tiene

Véase la semblanza biográfica de Cauchy en la página 109.

1
$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)]$$

Esta fórmula establece que *para multiplicar dos números complejos se multiplican los módulos y se suman los argumentos*. (Véase la figura 6.)

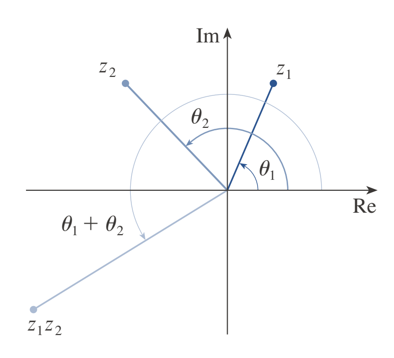


FIGURA 6

Un argumento similar que usa las fórmulas de la sustracción del seno y el coseno indica que *para dividir dos números complejos se dividen los módulos y se restan los argumentos*.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)] \qquad z_2 \neq 0$$

En particular, tomando $z_1 = 1$ y $z_2 = z$ (y por tanto $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \theta$, se obtiene lo siguiente, que se ilustra en la figura 7.

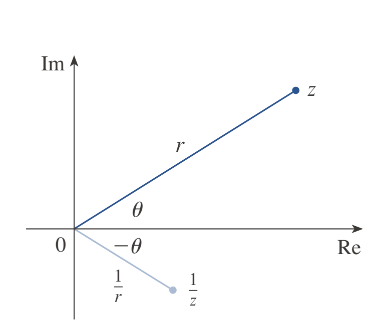


FIGURA 7

$$\text{Si} \quad z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

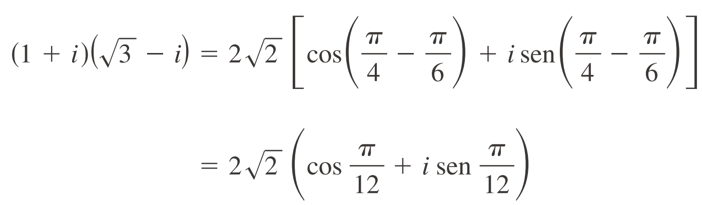
EJEMPLO 5 Determine el producto de los números complejos $1 + i$ y $\sqrt{3} - i$ en forma polar.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 se tiene

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

y
$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Así, por la ecuación 1,



$$(1 + i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$$

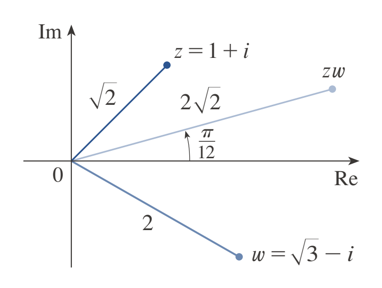


FIGURA 8

Esto se ilustra en la figura 8. ■

El uso repetido de la fórmula 1 muestra cómo calcular potencias de un número complejo. Si

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

entonces
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$$

y
$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta)$$

En general, se obtiene el resultado siguiente, que toma su nombre del matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754).

> **2 Teorema de De Moivre** Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ y n es un entero positivo, entonces
>
> $$z^n = [r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Esto indica que *para tomar la enésima potencia de un número complejo, se toma la enésima potencia del módulo y se multiplica el argumento por n.*

EJEMPLO 6 Determine $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

SOLUCIÓN Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, del ejemplo 4(a) se desprende que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tiene la forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Así, por el teorema de De Moivre,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$

■

El teorema de De Moivre también puede usarse para determinar las enésimas raíces de números complejos. Una raíz enésima del número complejo z es un número complejo w tal que

$$w^n = z$$

Al escribir estos dos números en forma trigonométrica como

$$w = s(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi) \qquad \text{y} \qquad z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

y usar el teorema de De Moivre, se obtiene

$$s^n(\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

La igualdad de estos dos números complejos muestra que

$$s^n = r \qquad \text{o} \qquad s = r^{1/n}$$

y

$$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\,n\phi = \text{sen}\,\theta$$

Del hecho de que seno y coseno tienen período 2π se establece que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{o} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Así,

$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Como esta expresión da un valor diferente de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, se tiene lo siguiente.

3 Raíces de un número complejo Sea $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ y sea n un entero positivo. Entonces, z tiene n raíces enésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Note que cada una de las enésimas raíces de z tiene módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Así, todas las raíces enésimas de z se sitúan en el círculo de radio $r^{1/n}$ en el plano complejo. Asimismo, como el argumento de cada enésima raíz sucesiva excede al argumento de la raíz previa en $2\pi/n$, se observa que las enésimas raíces de z están igualmente espaciadas en ese círculo.

EJEMPLO 7 Halle las seis raíces sextas de $z = -8$ y grafique esas raíces en el plano complejo.

SOLUCIÓN En forma trigonométrica, $z = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$. Al aplicar la ecuación 3 con $n = 6$ se obtiene

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Se calculan las seis raíces sextas de -8 tomando $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ en esta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\, i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$$

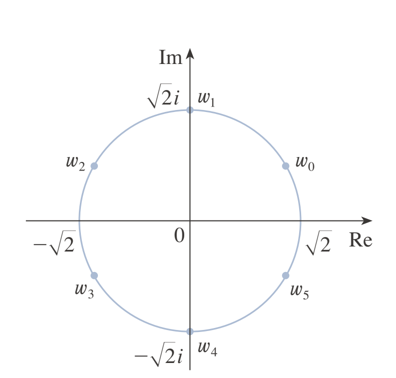


FIGURA 9
Las seis raíces sextas de $z = -8$

Todos estos puntos se ubican en el círculo de radio $\sqrt{2}$, como se muestra en la figura 9. ■

Exponenciales complejas

La expresión e^z debe tener un significado cuando $z = x + iy$ es un número complejo. La teoría de la serie infinita desarrollada en el capítulo 11 puede prolongarse al caso en el que los términos son números complejos. Usando como guía la serie de Taylor para e^x (11.10.11), se define

4 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

y resulta que esta función exponencial compleja tiene las mismas propiedades que la función exponencial real. En particular, es cierto que

5 $$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Si $z = iy$, donde y es un número real, en la ecuación 4, y se usan los hechos de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

Se obtiene $$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots$$
$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$$
$$= \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Aquí se ha usado la serie de Taylor para cos y y sen y (ecuaciones 11.10.16 y 11.10.15). El resultado es una fórmula famosa, llamada **fórmula de Euler**:

6 $$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Al combinar la fórmula de Euler con la ecuación 5 se obtiene

7 $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

EJEMPLO 8 Evalúe (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

El resultado del ejemplo 8(a) podría escribirse así

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta ecuación relaciona los cinco números más famosos de todas las matemáticas: 0, 1, e, i y π.

SOLUCIÓN

(a) Con base en la ecuación de Euler (6) se tiene

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando la ecuación 7 se obtiene

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$ ■

Por último, se observa que la ecuación de Euler brinda un método más fácil para comprobar el teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

G EJERCICIOS

1-14 Evalúe la expresión y escriba su respuesta en la forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$

2. $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$

3. $(2 + 5i)(4 - i)$

4. $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$

6. $\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)}$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$

8. $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$

10. $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3

12. i^{100}

13. $\sqrt{-25}$

14. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15-17 Determine el conjugado complejo y el módulo del número.

15. $12 - 5i$

16. $-1 + 2\sqrt{2}\,i$

17. $-4i$

18. Compruebe las propiedades siguientes de los números complejos.

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (b) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

(c) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, donde n es un entero positivo

[*Sugerencia*: escriba $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19-24 Determine todas las soluciones de la ecuación.

19. $4x^2 + 9 = 0$

20. $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$

22. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$

24. $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25-28 Escriba el número en forma polar con argumento entre 0 y 2π.

25. $-3 + 3i$

26. $1 - \sqrt{3}\,i$

27. $3 + 4i$

28. $8i$

29-32 Determine formas polares para zw, z/w y $1/z$ poniendo primero z y w en forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}\,i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4(\sqrt{3} + i), \quad w = -3 - 3i$

33-36 Halle la potencia indicada usando el teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$

34. $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$

35. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$

36. $(1 - i)^8$

37-40 Halle las raíces indicadas. Trace las raíces en el plano complejo.

37. Las raíces octavas de 1

38. Las raíces quintas de 32

39. Las raíces cúbicas de i

40. Las raíces cúbicas de $1 + i$

41-46 Escriba el número en la forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$

42. $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$

44. $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$

46. $e^{\pi+i}$

47. Use el teorema de De Moivre con $n = 3$ para expresar cos 3θ y sen 3θ en términos de cos θ y sen θ.

48. Use la fórmula de Euler para comprobar las fórmulas siguientes para cos x y sen x:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Si $u(x) = f(x) + ig(x)$ es una función con valores complejos de una variable real x y las partes real e imaginaria $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables de x, la derivada de u se define como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Use esto junto con la ecuación 7 para comprobar que si $F(x) = e^{rx}$, entonces $F'(x) = re^{rx}$ cuando $r = a + bi$ es un número complejo.

50. (a) Si u es una función con valores complejos de una variable real, su integral indefinida $\int u(x)\,dx$ es una antiderivada de u. Evalúe

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando las partes real e imaginaria de la integral del inciso (a), evalúe las integrales reales

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

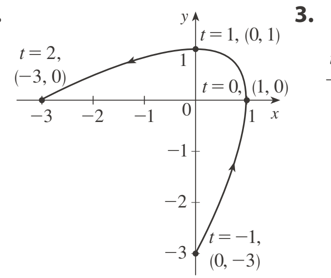
(c) Compare con el método usado en el ejemplo 7.1.4.

H Respuestas a los ejercicios con número impar

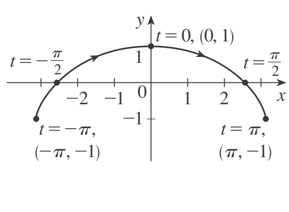
CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1 ■ PÁGINA 645

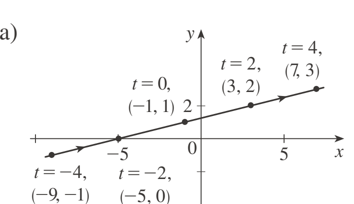
1.



3.

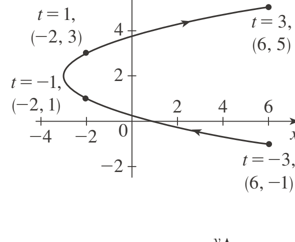


5. (a)



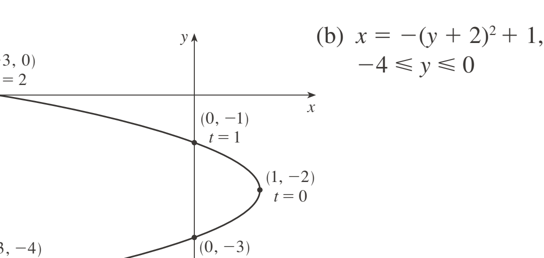
(b) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

7. (a)



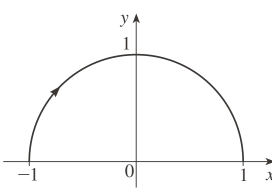
(b) $x = y^2 - 4y + 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 5$

9. (a)

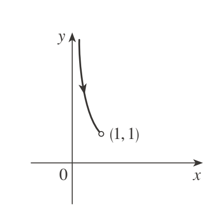


(b) $x = -(y + 2)^2 + 1$, $-4 \leqslant y \leqslant 0$

11. (a) $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$ (b)



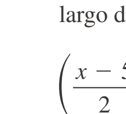
13. (a) $y = 1/x, y > 1$ (b)



15. (a) $x = e^{2y}$ (b)

17. (a) $y = \frac{1}{2} \ln x + 1$ (b)

19. Se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo del círculo

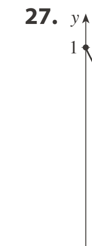


$$\left(\frac{x-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 = 1 \text{ de } (3, 3) \text{ a } (7, 3)$$

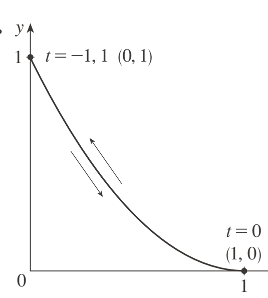
21. Se mueve 3 veces a en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la elipse $(x^2/25) + (y^2/4) = 1$, partiendo y terminando en $(0, -2)$

23. Está contenido en el rectángulo descrito por $1 \leqslant x \leqslant 4$ y $2 \leqslant y \leqslant 3$.

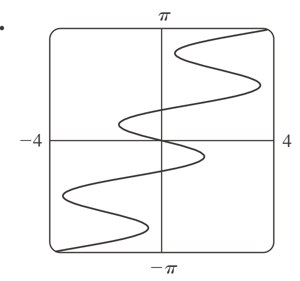
25.



27.



29.



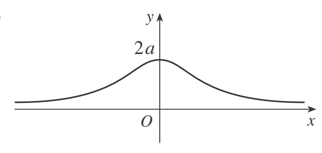
31. (b) $x = -2 + 5t, y = 7 - 8t, 0 \leqslant t \leqslant 1$

33. (a) $x = 2 \cos t, y = 1 - 2 \operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
(b) $x = 2 \cos t, y = 1 + 2 \operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant 6\pi$
(c) $x = 2 \cos t, y = 1 + 2 \operatorname{sen} t, \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

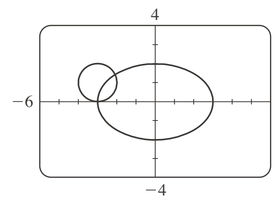
37. La curva $y = x^{2/3}$ es generada en (a). En (b), solo la porción con $x \geqslant 0$ es generada, y en (c) se obtiene únicamente la porción con $x > 0$.

41. $x = a \cos \theta, y = b \operatorname{sen} \theta; (x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, elipse

43.

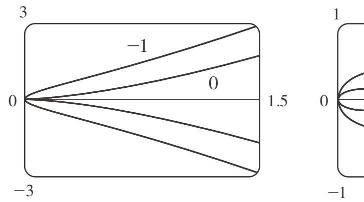


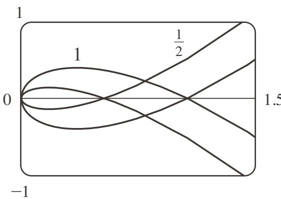
45. (a) Dos puntos de intersección



(b) Un punto de colisión en $(-3, 0)$ cuando $t = 3\pi/2$
(c) Hay todavía dos puntos de intersección, pero ningún punto de colisión.

47. Para $c = 0$, hay una cúspide; para $c > 0$, hay un lazo cuyo tamaño aumenta cuando c aumenta.

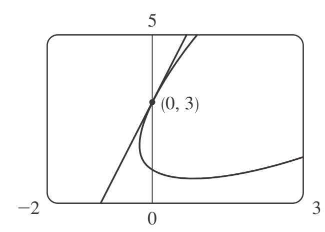




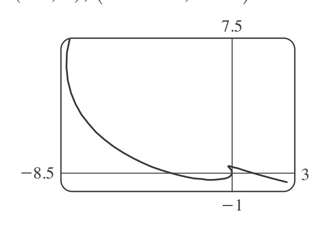
49. Las curvas siguen aproximadamente la recta $y = x$ y empiezan a tener lazos cuando a está entre 1.4 y 1.6 (más precisamente, cuando $a > \sqrt{2}$). Los lazos aumentan de tamaño cuando a aumenta.
51. Cuando n aumenta, el número de oscilaciones aumenta; a y b determinan el ancho y la altura.

EJERCICIOS 10.2 ■ PÁGINA 655

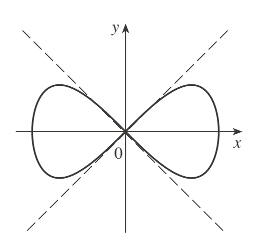
1. $\frac{1}{2}(1 + t)^{3/2}$ **3.** $y = -x$ **5.** $y = -x$
7. $y = 2x + 1$
9. $y = 3x + 3$



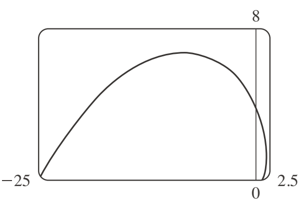
11. $\dfrac{2t + 1}{2t}, -\dfrac{1}{4t^3}, t < 0$
13. $-\frac{3}{2}\tan t, -\frac{3}{4}\sec^3 t, \ \pi/2 < t < 3\pi/2$
15. $\dfrac{t + 1}{t - 1}, \dfrac{-2t}{(t - 1)^3}, 0 < t < 1$
17. Horizontal en $(0, -3)$, vertical en $(\pm 2, -2)$
19. Horizontal en $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, ninguna vertical
21. $(0.6, 2)$; $\left(5 \cdot 6^{-6/5}, e^{6^{-1/5}}\right)$
23.



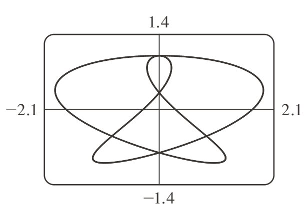
25. $y = x, y = -x$



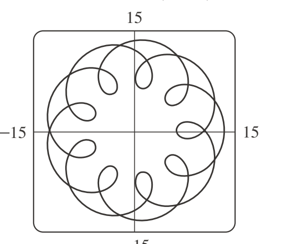
27. (a) $d \operatorname{sen} \theta/(r - d\cos\theta)$ **29.** $(4, 0)$ **31.** πab
33. $\frac{24}{5}$ **35.** $2\pi r^2 + \pi d^2$ **37.** $\int_0^2 \sqrt{2 + 2e^{-2t}}\, dt \approx 3.1416$
39. $\int_0^{4\pi} \sqrt{5 - 4\cos t}\, dt \approx 26.7298$ **41.** $4\sqrt{2} - 2$
43. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$
45. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$



47. 16.7102



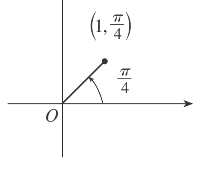
49. 612.3053 **51.** $6\sqrt{2}, \sqrt{2}$
55. (a) $t \in [0, 4\pi]$



(b) 294
57. $\int_0^{\pi/2} 2\pi t \cos t \sqrt{t^2 + 1}\, dt \approx 4.7394$
59. $\int_0^1 2\pi e^{-t}\sqrt{1 + 2e^t + e^{2t} + e^{-2t}}\, dt \approx 10.6705$
61. $\frac{48}{5}\pi$ **63.** $\frac{6}{5}\pi a^2$
65. $\frac{24}{5}\pi\left(949\sqrt{26} + 1\right)$ **71.** $\frac{1}{4}$

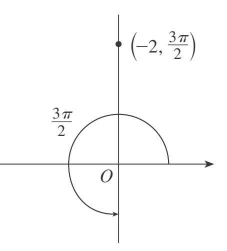
EJERCICIOS 10.3 ■ PÁGINA 666

1. (a)



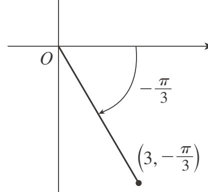
$(1, 9\pi/4), (-1, 5\pi/4)$

(b)



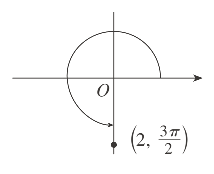
$(2, \pi/2), (-2, 7\pi/2)$

(c)



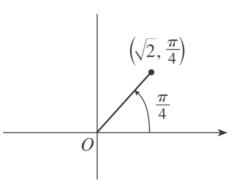
$(3, 5\pi/3)$, $(-3, 2\pi/3)$

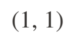
3. (a)



$(0, -2)$

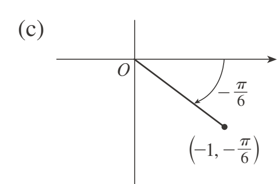
(b)





$(1, 1)$

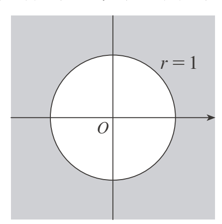
(c)



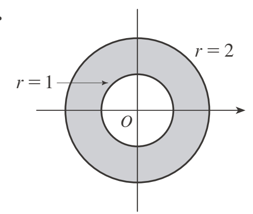
$\left(-\sqrt{3}/2, 1/2\right)$

5. (a) (i) $\left(4\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$ (ii) $\left(-4\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$
(b) (i) $(6, \pi/3)$ (ii) $(-6, 4\pi/3)$

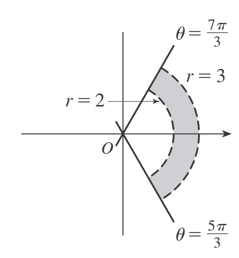
7.



9.

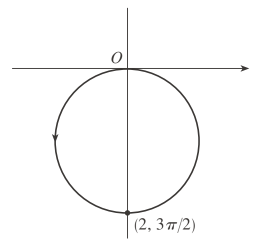


11.

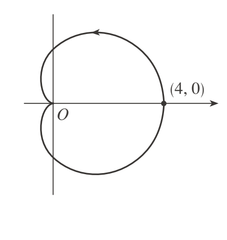


13. $2\sqrt{7}$ **15.** Círculo; centro O, radio 2
17. Círculo, centro $(5/2, 0)$, radio $5/2$
19. Círculo, centro $(1, 0)$, radio 1
21. $r = 2 \csc\theta$ **23.** $r = 1/(\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta)$
25. $r = 2c \cos\theta$ **27.** (a) $\theta = \pi/6$ (b) $x = 3$

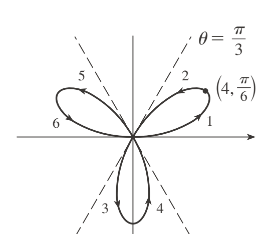
29.



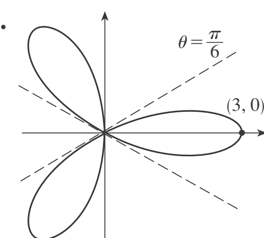
31.



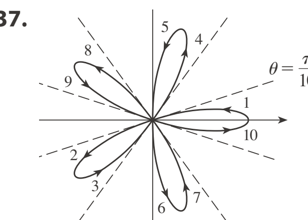
33.



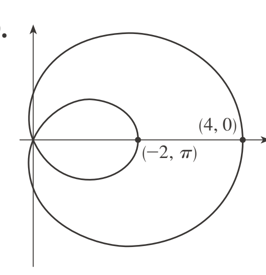
35.



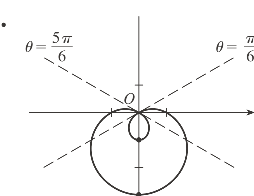
37.



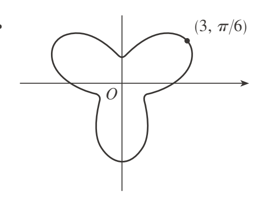
39.



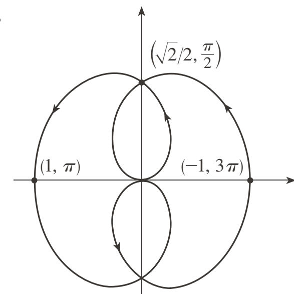
41.



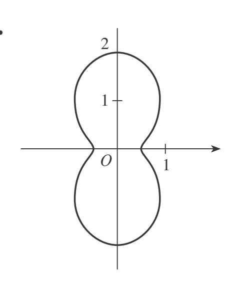
43.



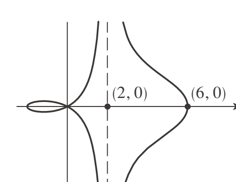
45.



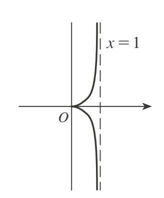
47.



49.



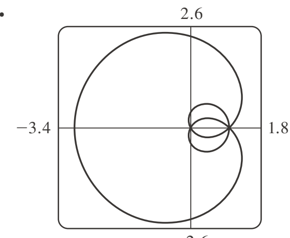
51.



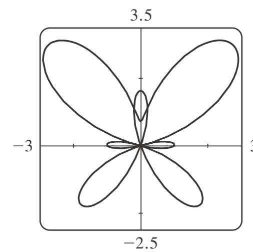
53. (a) Para $c < -1$, el lazo interno empieza en $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ y termina en $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$; para $c > 1$, empieza en $\theta = \pi + \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ y termina en $\theta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$.

55. $1/\sqrt{3}$ **57.** $-\pi$ **59.** 1
61. Horizontal en $\left(3/\sqrt{2}, \pi/4\right)$, $\left(-3/\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$; vertical en $(3, 0)$, $(0, \pi/2)$
63. Horizontal en $\left(\frac{3}{2}, \pi/3\right)$, $(0, \pi)$ [el poste], y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/3\right)$; vertical en $(2, 0)$,$\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$
65. Centro $(b/2, a/2)$, radio $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

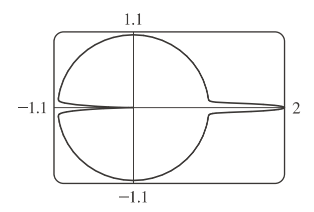
67.



69.



71.

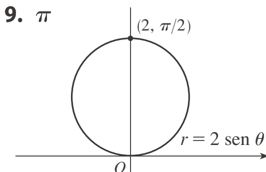


73. Por rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj a través del ángulo $\pi/6$, $\pi/3$, o α alrededor del origen.
75. Para $c = 0$, la curva es un círculo. Cuando c aumenta, el lado izquierdo se aplana, y luego tiene un hueco para $0.5 < c < 1$, una cúspide para $c = 1$ y un lazo para $c > 1$.

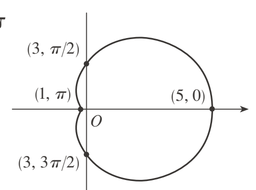
EJERCICIOS 10.4 ■ PÁGINA 672

1. $\pi^5/10\,240$ **3.** $\pi/2$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** π^2

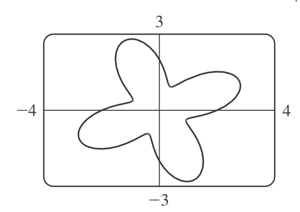
9. π



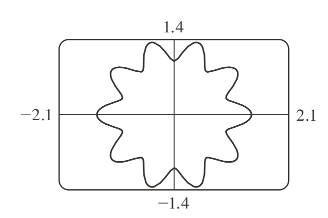
11. 11π



13. $\frac{9}{2}\pi$



15. $\frac{3}{2}\pi$

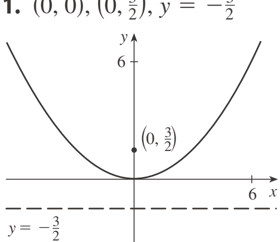


17. $\frac{4}{3}\pi$ **19.** $\frac{1}{16}\pi$ **21.** $\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ **23.** $\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$
25. $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **27.** π **29.** $\frac{9}{8}\pi - \frac{9}{4}$ **31.** $\frac{1}{2}\pi - 1$
33. $-\sqrt{3} + 2 + \frac{1}{3}\pi$ **35.** $\frac{1}{4}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right)$
37. $\left(\frac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/6\right)$, y el poste
39. $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$, y el poste
41. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\pi/3\right)$, y el poste
43. Intersección en $\theta \approx 0.89, 2.25$; área ≈ 3.46

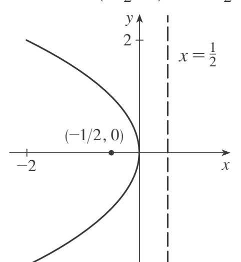
45. 2π **47.** $\frac{8}{3}[(\pi^2 + 1)^{3/2} - 1]$ **49.** $\frac{16}{3}$
51. 2.4221 **53.** 8.0091
55. (b) $2\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$

EJERCICIOS 10.5 ■ PÁGINA 680

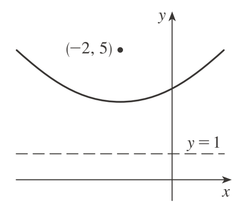
1. $(0, 0)$, $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $y = -\frac{3}{2}$



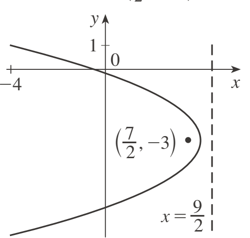
3. $(0, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $x = \frac{1}{2}$



5. $(-2, 3)$ $(-2, 5)$, $y = 1$

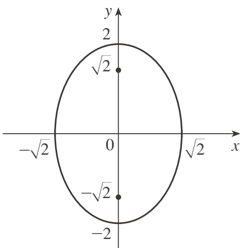


7. $(4, -3)$, $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$, $x = \frac{9}{2}$

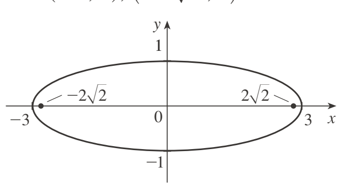


9. $x = -y^2$, foco $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, directriz $x = \frac{1}{4}$

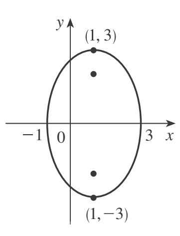
11. $(0, \pm 2)$, $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$



13. $(\pm 3, 0)$, $\left(\pm 2\sqrt{2}, 0\right)$

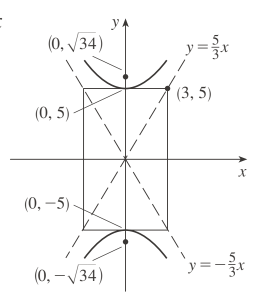


15. $(1, \pm 3)$, $\left(1, \pm\sqrt{5}\right)$

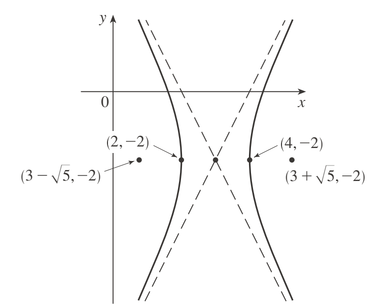


17. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, focos $\left(0, \pm\sqrt{5}\right)$

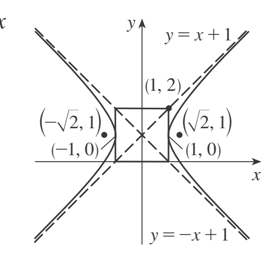
19. $(0, \pm 5)$; $\left(0, \pm\sqrt{34}\right)$; $y = \pm\frac{5}{3}x$



21. $(4, -2)$, $(2, -2)$; $(3 \pm \sqrt{5}, -2)$; $y + 2 = \pm 2(x - 3)$



23. $(\pm 1, 1)$, $(\pm\sqrt{2}, 1)$, $y - 1 = \pm x$



25. Hipérbola, $(\pm 1, 0)$, $(\pm\sqrt{5}, 0)$

27. Elipse, $(\pm\sqrt{2}, 1)$, $(\pm 1, 1)$

29. Parábola, $(1, -2)$, $\left(1, -\frac{11}{6}\right)$

31. $y^2 = 4x$ **33.** $y^2 = -12(x + 1)$

35. $(y + 1)^2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

37. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$ **39.** $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{(y - 4)^2}{16} = 1$

41. $\dfrac{(x + 1)^2}{12} + \dfrac{(y - 4)^2}{16} = 1$ **43.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

45. $\dfrac{(y - 1)^2}{25} - \dfrac{(x + 3)^2}{39} = 1$ **47.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

49. $\dfrac{x^2}{3\,763\,600} + \dfrac{y^2}{3\,753\,196} = 1$

51. (a) $\dfrac{121x^2}{1\,500\,625} - \dfrac{121y^2}{3\,339\,375} = 1$ (b) $\approx$248 millas

55. (a) Elipse (b) Hipérbola (c) Ninguna curva

59. 15.9

61. $\dfrac{b^2c}{a} + ab \ln\left(\dfrac{a}{b + c}\right)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$

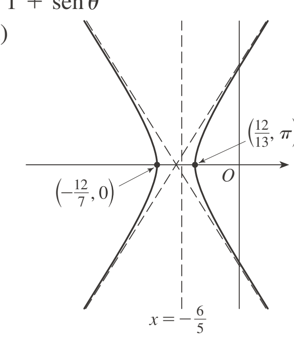
63. $(0, 4/\pi)$

EJERCICIOS 10.6 ■ PÁGINA 688

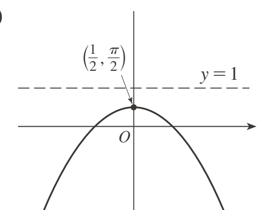
1. $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$ **3.** $r = \dfrac{6}{2 + 3\,\text{sen}\,\theta}$

5. $r = \dfrac{10}{3 - 2\cos\theta}$ **7.** $r = \dfrac{6}{1 + \text{sen}\,\theta}$

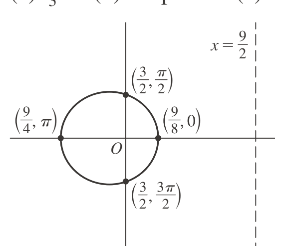
9. (a) $\frac{10}{3}$
(b) Hipérbola
(c) $x = -\frac{6}{5}$
(d)



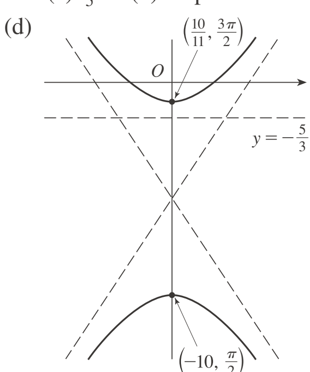
11. (a) 1 (b) Parábola (c) $y = 1$
(d)



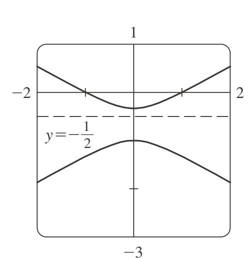
13. (a) $\frac{1}{3}$ (b) Elipse (c) $x = \frac{9}{2}$
(d)



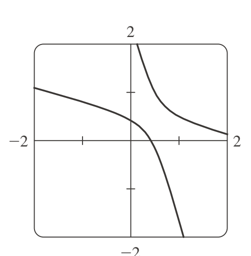
15. (a) $\frac{6}{5}$ (b) Hipérbola (c) $y = -\frac{5}{3}$
(d)



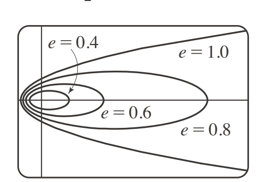
17. (a) 2, $y = -\frac{1}{2}$



(b) $r = \dfrac{1}{1 - 2\,\text{sen}(\theta - 3\pi/4)}$



19. La elipse es casi circular cuando e está cerca de 0 y se alarga cuando $e \to 1^-$. En $e = 1$, la curva se vuelve una parábola.



25. $r = \dfrac{2.26 \times 10^8}{1 + 0.093 \cos\theta}$ **27.** $r = \dfrac{1.07}{1 + 0.97 \cos\theta}$; 35.64 AU

29. 7.0×10^7 km **31.** 3.6×10^8 km

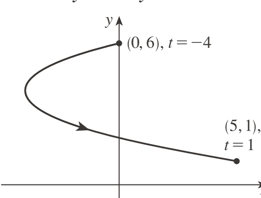
REPASO DEL CAPÍTULO 10 ■ PÁGINA 689

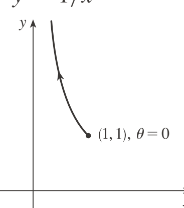
Examen verdadero-falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso
9. Verdadero

Ejercicios

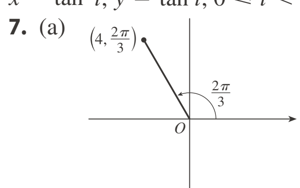
1. $x = y^2 - 8y + 12$ **3.** $y = 1/x$





5. $x = t, y = \sqrt{t}$; $x = t^4, y = t^2$; $x = \tan^2 t, y = \tan t, 0 \leqslant t < \pi/2$

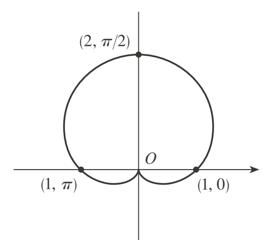
7. (a)



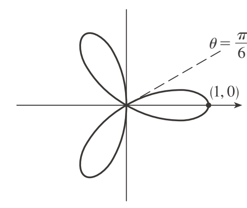
(b) $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $(-3\sqrt{2}, 7\pi/4)$

$(-2, 2\sqrt{3})$

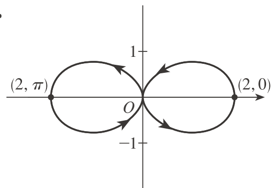
9.



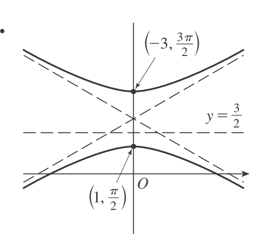
11.



13.

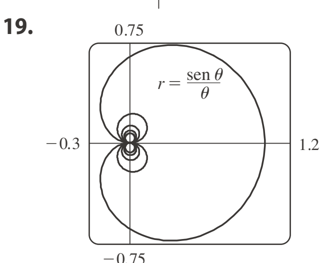


15.



17. $r = \dfrac{2}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

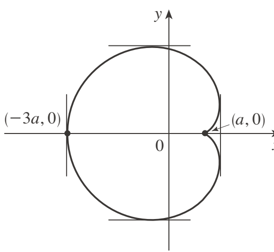
19.



21. 2 **23.** -1

25. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \cos t}, \dfrac{1 + \cos t + \operatorname{sen} t}{(1 + \cos t)^3}$ **27.** $\left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}\right)$

29. Tangente vertical en $\left(\frac{3}{2}a, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\right), (-3a, 0)$; tangente horizontal en $(a, 0), \left(-\frac{1}{2}a, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\,a\right)$



31. 18 **33.** $(2, \pm\pi/3)$ **35.** $\frac{1}{2}(\pi - 1)$

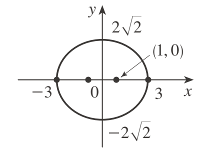
37. $2(5\sqrt{5} - 1)$

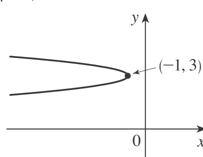
39. $\dfrac{2\sqrt{\pi^2 + 1} - \sqrt{4\pi^2 + 1}}{2\pi} + \ln\left(\dfrac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}}{\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}}\right)$

41. $471\,295\,\pi/1024$

43. Todas las curvas tienen la asíntota vertical $x = 1$. Para $c < -1$, la curva se abulta a la derecha. En $c = -1$, la curva es la recta $x = 1$. Para $-1 < c < 0$, se abulta a la izquierda. En $c = 0$ hay una cúspide en (0, 0). Para $c > 0$, hay un lazo.

45. $(\pm 1, 0), (\pm 3, 0)$ **47.** $\left(-\frac{25}{24}, 3\right), (-1, 3)$





49. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **51.** $\dfrac{y^2}{72/5} - \dfrac{x^2}{8/5} = 1$

53. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(8y - 399)^2}{160\,801} = 1$ **55.** $r = \dfrac{4}{3 + \cos\theta}$

57. $x = a(\cot\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta), y = a(1 + \operatorname{sen}^2\theta)$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 692

1. $\ln(\pi/2)$ **3.** $\left[-\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right] \times [-1, 2]$

CAPÍTULO 11

EJERCICIOS 11.1 ■ PÁGINA 704

Abreviaturas: C, convergente; D, divergente

1. (a) Una sucesión es una lista ordenada de números. También puede definirse como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.
(b) Los términos a_n se aproximan a 8 conforme n crece.
(c) Los términos a_n crecen conforme n crece.

3. $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \frac{16}{9}, \frac{32}{11}$ **5.** $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}$ **7.** $-3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{40}$

9. 1, 2, 7, 32, 157 **11.** $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ **13.** $a_n = 1/(2n)$

15. $a_n = -3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **17.** $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n + 1}$

19. 0.4286, 0.4615, 0.4737, 0.4800, 0.4839, 0.4865, 0.4884, 0.4898, 0.4909, 0.4918; sí; $\frac{1}{2}$

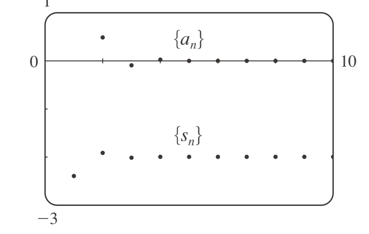
21. 0.5000, 1.2500, 0.8750, 1.0625, 0.9688, 1.0156, 0.9922, 1.0039, 0.9980, 1.0010; sí; 1

23. 5 **25.** D **27.** 0 **29.** 1 **31.** 2
33. 1 **35.** 0 **37.** 0 **39.** D **41.** 0 **43.** 0

45. 1 **47.** e^2 **49.** ln 2 **51.** $\pi/2$ **53.** D **55.** D
57. D **59.** $\pi/4$ **61.** $\frac{1}{2}$ **63.** 0
65. (a) 1060, 1123.60, 1191.02, 1262.48, 1338.23 (b) D
67. (b) 5734 **69.** $-1 < r < 1$
71. Convergente por el teorema de sucesión monótona; $5 \leqslant L < 8$
73. Decreciente; sí **75.** Creciente; no
77. Creciente; sí
79. 2 **81.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ **83.** (b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$
85. (a) 0 (b) 9, 11

EJERCICIOS 11.2 ■ PÁGINA 715

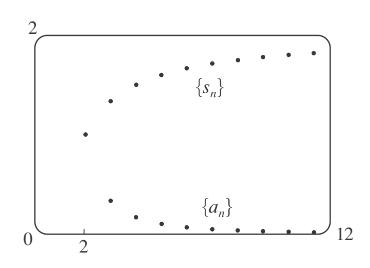
1. (a) Una sucesión es una lista ordenada de números, mientras que una serie es la *suma* de una lista de números.
(b) Una serie es convergente si la sucesión de sumas parciales es una sucesión convergente. Una serie es divergente si no es convergente.
3. 2
5. 0.5, 0.55, 0.5611, 0.5648, 0.5663, 0.5671, 0.5675, 0.5677; C
7. 1, 1.7937, 2.4871, 3.1170, 3.7018, 4.2521, 4.7749, 5.2749; D
9. -2.40000, -1.92000, -2.01600, -1.99680, -2.00064, -1.99987, -2.00003, -1.99999, -2.00000, -2.00000; convergente, suma $= -2$



11. 0.29289, 0.42265, 0.50000, 0.55279, 0.59175, 0.62204, 0.64645, 0.66667, 0.68377, 0.69849; convergente, suma $= 1$

1
$\{s_n\}$
$\{a_n\}$
0
11

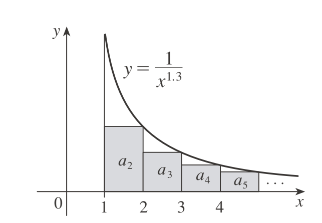
13. 1.00000, 1.33333, 1.50000, 1.60000, 1.66667, 1.71429, 1.75000, 1.77778, 1.80000, 1.81818; convergente, suma $= 2$



15. (a) Sí (b) No **17.** D **19.** $\frac{25}{3}$ **21.** $\frac{400}{9}$
23. $\frac{1}{7}$ **25.** D **27.** D **29.** D **31.** 9 **33.** D
35. $\dfrac{\text{sen } 100}{1 - \text{sen } 100}$
37. D **39.** D **41.** $e/(e - 1)$ **43.** $\frac{3}{2}$ **45.** $\frac{11}{6}$
47. $e - 1$
49. (b) 1 (c) 2 (d) Todos los números racionales con una representación decimal final, excepto 0
51. $\frac{8}{9}$ **53.** 5063/3300 **55.** 45 679/37 000
57. $-\dfrac{1}{5} < x < \dfrac{1}{5}$; $\dfrac{-5x}{1 + 5x}$
59. $-1 < x < 5$; $\dfrac{3}{5 - x}$
61. $x > 2$ o $x < -2$; $\dfrac{x}{x - 2}$ **63.** $x < 0$; $\dfrac{1}{1 - e^x}$
65. 1 **67.** $a_1 = 0$, $a_n = \dfrac{2}{n(n + 1)}$ para $n > 1$, suma $= 1$
69. (a) 120 mg; 124 mg
(b) $Q_{n+1} = 100 + 0.20Q_n$ (c) 125 mg
71. (a) 157.875 mg; $\frac{3000}{19}(1 - 0.05^n)$ (b) 157.895 mg
73. (a) $S_n = \dfrac{D(1 - c^n)}{1 - c}$ (b) 5 **75.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
79. $\dfrac{1}{n(n + 1)}$ **81.** La serie es divergente.
87. $\{s_n\}$ está acotado y es creciente.
89. (a) $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$
91. (a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{23}{24}, \frac{119}{120}$; $\dfrac{(n + 1)! - 1}{(n + 1)!}$ (c) 1

EJERCICIOS 11.3 ■ PÁGINA 725

1. C



3. C **5.** D **7.** D **9.** D **11.** C **13.** D
15. C **17.** C **19.** D **21.** D **23.** C **25.** C
27. f no es positiva ni decreciente.
29. $p > 1$ **31.** $p < -1$ **33.** $(1, \infty)$
35. (a) $\frac{9}{10}\pi^4$ (b) $\frac{1}{90}\pi^4 - \frac{17}{16}$
37. (a) 1.54977, error $\leqslant 0.1$ (b) 1.64522, error $\leqslant 0.005$
(c) 1.64522 en comparación con 1.64493 (d) $n > 1000$
39. 0.00145 **45.** $b < 1/e$

EJERCICIOS 11.4 ■ PÁGINA 731

1. (a) Nada (b) C **3.** C **5.** D **7.** C **9.** D
11. C **13.** C **15.** C **17.** D **19.** C **21.** D
23. C **25.** D **27.** D **29.** C **31.** D
33. 0.1993, error $< 2.5 \times 10^{-5}$
35. 0.0739, error $< 6.4 \times 10^{-8}$
45. Sí

EJERCICIOS 11.5 ■ PÁGINA 736

1. (a) Una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos. (b) $0 < b_{n+1} \leqslant b_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, donde $b_n = |a_n|$ (c) $|R_n| \leqslant b_{n+1}$
3. D **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** C
15. C **17.** C **19.** D **21.** -0.5507 **23.** 5
25. 5 **27.** -0.4597 **29.** -0.1050
31. Una subestimación
33. p no es un entero negativo. **35.** $\{b_n\}$ no es decreciente.

EJERCICIOS 11.6 ■ PÁGINA 742

Abreviaturas: AC, absolutamente convergente;
CC, condicionalmente convergente

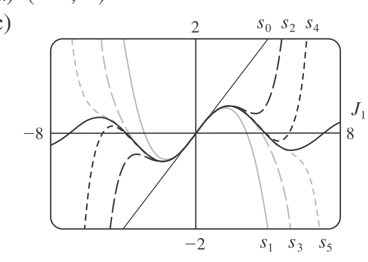
1. (a) D (b) C (c) Puede converger o divergir
3. CC **5.** AC **7.** AC **9.** D **11.** AC
13. AC **15.** D **17.** AC **19.** AC **21.** AC
23. D **25.** AC **27.** AC **29.** D **31.** CC
33. AC **35.** D **37.** AC **39.** D **41.** AC
43. (a) y (d)
47. (a) $\frac{661}{960} \approx 0.68854$, error < 0.00521
(b) $n \geqslant 11$, 0.693109
53. (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

EJERCICIOS 11.7 ■ PÁGINA 746

1. D **3.** CC **5.** D **7.** C **9.** C **11.** C
13. C **15.** C **17.** C **19.** C **21.** D **23.** D
25. C **27.** C **29.** C **31.** D
33. C **35.** D **37.** C

EJERCICIOS 11.8 ■ PÁGINA 751

1. Una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, donde x es una variable y a y las c_n's son constantes
3. 1, $(-1, 1)$ **5.** 1, $[-1, 1)$
7. ∞, $(-\infty, \infty)$ **9.** 4, $[-4, 4]$
11. $\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ **13.** 2, $[-2, 2)$
15. 1, $[1, 3]$ **17.** 2, $[-4, 0)$
19. $\frac{1}{3}$, $\left[-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ **21.** b, $(a-b, a+b)$ **23.** 0, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
25. $\frac{1}{5}$, $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ **27.** ∞, $(-\infty, \infty)$
29. (a) Sí (b) No
31. k^k **33.** No
35. (a) $(-\infty, \infty)$
(b), (c)



37. $(-1, 1)$, $f(x) = (1+2x)/(1-x^2)$ **41.** 2

EJERCICIOS 11.9 ■ PÁGINA 757

1. 10 **3.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{10^{n+1}} x^n$, $(-10, 10)$

5. $2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n$, $(-3, 3)$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2^{4n+4}}$, $(-2, 2)$ **9.** $-\dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3x^n}{2^{n+1}}$, $(-2, 2)$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n$, $(-1, 1)$

13. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$, $R = 1$

(b) $\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1) x^n$, $R = 1$

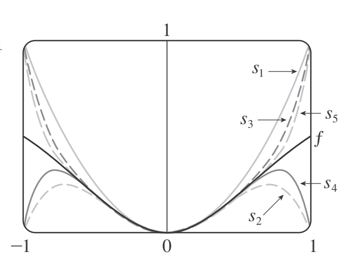
(c) $\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n$, $R = 1$

15. $\ln 5 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 5^n}$, $R = 5$

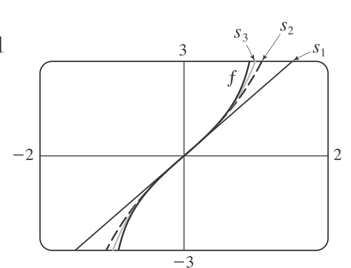
17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n (n+1) x^{n+1}$, $R = \frac{1}{4}$

19. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{2^{n-1}} x^n$, $R = 2$

21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2}$, $R = 1$



23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$



25. $C + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n+2}$, $R = 1$

27. $C + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n(n+3)}$, $R = 1$

29. 0.044522 **31.** 0.000395
33. 0.19740
35. (b) 0.920 **39.** $[-1, 1]$, $[-1, 1)$, $(-1, 1)$

EJERCICIOS 11.10 ■ PÁGINA 771

1. $b_8 = f^{(8)}(5)/8!$ **3.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$, $R = 1$

5. $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4$

7. $2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20\,736}(x-8)^3$

9. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{1}{4}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^3$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$, $R = 1$ **13.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n$, $R = \infty$ **17.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

19. $50 + 105(x-2) + 92(x-2)^2 + 42(x-2)^3 + 10(x-2)^4 + (x-2)^5$, $R = \infty$

21. $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n} (x-2)^n$, $R = 2$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^6}{n!} (x-3)^n$, $R = \infty$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (x-\pi)^{2n+1}$, $R = \infty$

31. $1 - \frac{1}{4}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{4^n \cdot n!} x^n$, $R = 1$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} x^n$, $R = 2$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{4n+2}$, $R = 1$

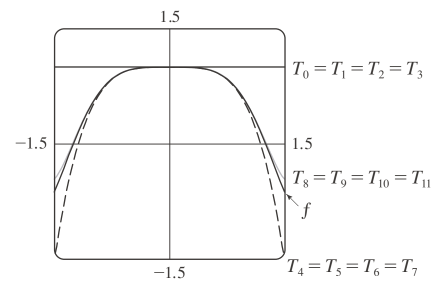
37. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n+1}$, $R = \infty$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(2n)!} x^{4n+1}$, $R = \infty$

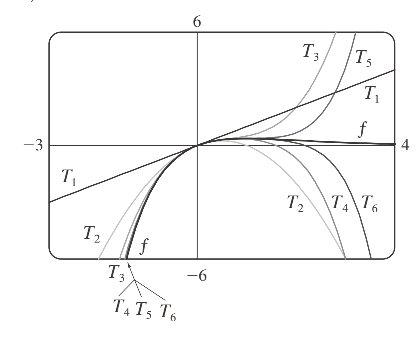
41. $\frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!\,2^{3n+1}} x^{2n+1}$, $R = 2$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$

45. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$, $R = \infty$



47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$, $R = \infty$



49. 0.99619

51. (a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$

(b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$

53. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, $R = 1$

55. $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!}$, $R = \infty$

57. 0.0059 **59.** 0.40102 **61.** $\frac{1}{2}$ **63.** $\frac{1}{120}$ **65.** $\frac{3}{5}$

67. $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4$ **69.** $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4$

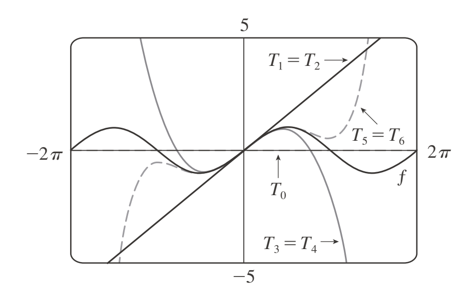
71. $x - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6$

73. e^{-x^4} **75.** $\ln \frac{8}{5}$

77. $1/\sqrt{2}$ **79.** $e^3 - 1$

EJERCICIOS 11.11 ■ PÁGINA 780

1. (a) $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = T_2(x) = x$, $T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$, $T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

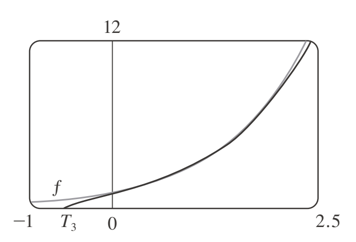


(b)

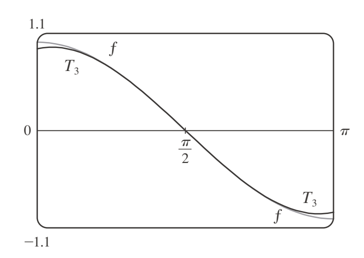
x	f	T_0	$T_1 = T_2$	$T_3 = T_4$	T_5
$\pi/4$	0.7071	0	0.7854	0.7047	0.7071
$\pi/2$	1	0	1.5708	0.9248	1.0045
π	0	0	3.1416	−2.0261	0.5240

(c) Conforme n aumenta, $T_n(x)$ es una aproximación satisfactoria de $f(x)$ en un intervalo cada vez más grande.

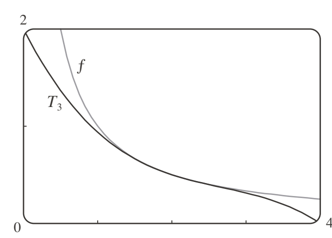
3. $e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 + \frac{1}{6}e(x-1)^3$



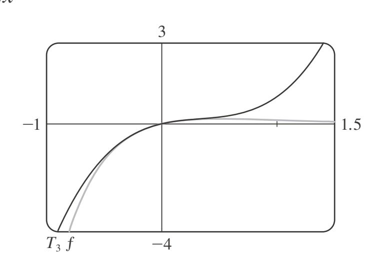
5. $-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{6}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^3$



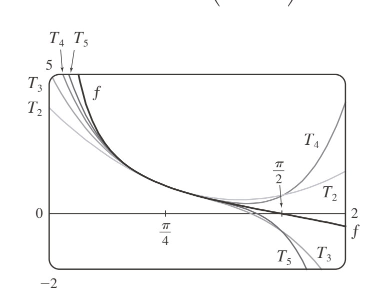
7. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3$



9. $x-2x^2+2x^3$



11. $T_5(x)=1-2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2-\dfrac{8}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+\dfrac{10}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^4-\dfrac{64}{15}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^5$



13. (a) $1-(x-1)+(x-1)^2$ (b) 0.006 482 7

15. (a) $2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2$ (b) 1.5625×10^{-5}

17. (a) $1+\frac{1}{2}x^2$ (b) 0.0015

19. (a) $1+x^2$ (b) 0.000 06 **21.** (a) $x^2-\frac{1}{6}x^4$ (b) 0.042

23. 0.17365 **25.** Cuatro **27.** $-1.037<x<1.037$

29. $-0.86<x<0.86$ **31.** 21 m, no

37. (c) Difieren en alrededor de 8×10^{-9} km.

REPASO DEL CAPÍTULO 11 ■ PÁGINA 784

Examen verdadero-falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso **9.** Falso
11. Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Verdadero
19. Verdadero **21.** Verdadero

Ejercicios

1. $\frac{1}{2}$ **3.** D **5.** 0 **7.** e^{12} **9.** 2 **11.** C
13. C **15.** D **17.** C **19.** C **21.** C **23.** CC
25. AC **27.** $\frac{1}{11}$ **29.** $\pi/4$ **31.** e^{-e} **35.** 0.9721
37. 0.189 762 24, error $<6.4\times10^{-7}$
41. 4, $[-6, 2)$ **43.** 0.5, $[2.5, 3.5)$

45. $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right]$

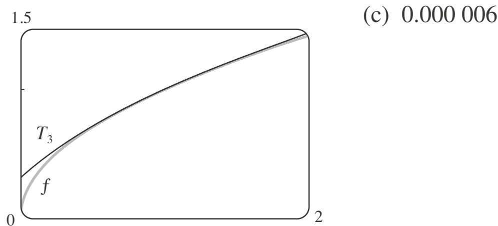
47. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, $R=1$ **49.** $\ln 4-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$, $R=4$

51. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$

53. $\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\cdots\cdot(4n-3)}{n!\,2^{6n+1}}x^n$, $R=16$

55. $C+\ln|x|+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!}$

57. (a) $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3$
(b)



(c) 0.000 006

59. $-\frac{1}{6}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 787

1. $15!/5! = 10\,897\,286\,400$

3. (b) 0 si $x=0$, $(1/x)-\cot x$ if $x\neq k\pi$, k un entero

5. (a) $s_n=3\cdot4^n$, $l_n=1/3^n$, $p_n=4^n/3^{n-1}$ (c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

9. $\dfrac{3\pi}{4}$ **11.** $(-1, 1)$, $\dfrac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$ **13.** $\ln\frac{1}{2}$

17. (a) $\frac{250}{101}\pi(e^{-(n-1)\pi/5}-e^{-n\pi/5})$ (b) $\frac{250}{101}\pi$

19. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}-1$

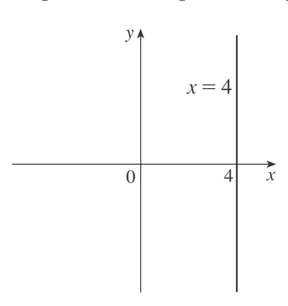
21. $-\left(\dfrac{\pi}{2}-\pi k\right)^2$, donde k es un entero positivo

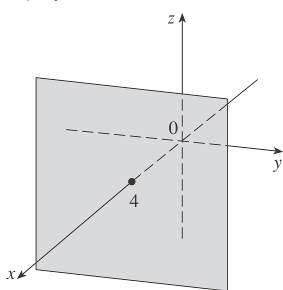
CAPÍTULO 12

EJERCICIOS 12.1 ■ PÁGINA 796

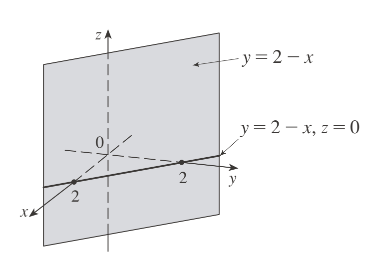
1. $(4, 0, -3)$ **3.** C; A

5. Una recta paralela al eje y y 4 unidades a la derecha de ella; un plano vertical paralelo al plano yz y 4 unidades frente a él.





7. Un plano vertical que interseca el plano xy en la recta $y = 2 - x$, $z = 0$



9. (a) $|PQ| = 6$, $|QR| = 2\sqrt{10}$, $|RP| = 6$; triángulo isósceles

11. (a) No (b) Sí

13. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 3)^2 = 25$; $(x - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$, $y = 0$ (un círculo)

15. $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 + (z - 1)^2 = 30$

17. $(1, 2, -4)$, 6 **19.** $(2, 0, -6)$, $9/\sqrt{2}$

21. (b) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{94}, \frac{1}{2}\sqrt{85}$

23. (a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 36$
(b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 4$
(c) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 9$

25. Un plano paralelo al plano yz y 9 unidades frente a él

27. Un semiespacio que consta de todos los puntos bajo el plano $z = 8$

29. Todos los puntos en o entre los planos horizontales $z = 0$ y $z = 6$

31. Todos los puntos en un círculo con radio 2 con centro en el eje z que está contenido en el plano $z = -1$

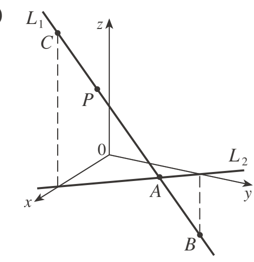
33. Todos los puntos en una esfera con radio 2 y centro $(0, 0, 0)$

35. Todos los puntos en o entre esferas con radios 1 y $\sqrt{5}$ y centros $(0, 0, 0)$

37. Todos los puntos en o dentro de un cilindro circular de radio 3 con eje en el eje y

37. $0 < x < 5$ **41.** $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2$

43. (a) $(2, 1, 4)$ (b)



45. $14x - 6y - 10z = 9$, un plano perpendicular a AB

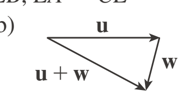
47. $2\sqrt{3} - 3$

EJERCICIOS 12.2 ■ PÁGINA 805

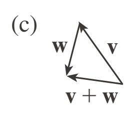
1. (a) Escalar (b) Vector (c) Vector (d) Escalar

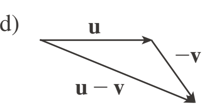
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CE}$

5. (a) (b)

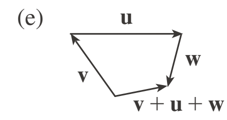


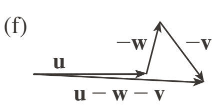
(c) (d)





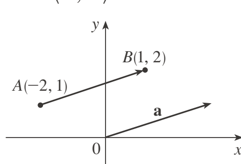
(e) (f)



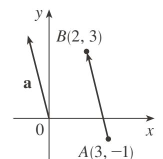


7. $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$

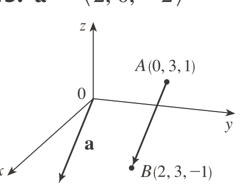
9. $\mathbf{a} = \langle 3, 1 \rangle$



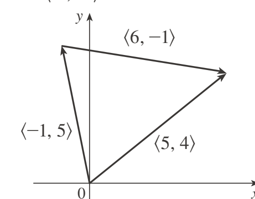
11. $\mathbf{a} = \langle -1, 4 \rangle$



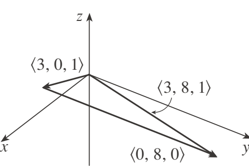
13. $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -2 \rangle$



15. $\langle 5, 2 \rangle$



17. $\langle 3, 8, 1 \rangle$



19. $\langle 6, 3 \rangle$, $\langle 6, 14 \rangle$, 5, 13

21. $6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $20\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j}$, $\sqrt{29}$, 7

23. $\left\langle \dfrac{3}{\sqrt{10}}, -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \right\rangle$ **25.** $\frac{8}{9}\mathbf{i} - \frac{1}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}$ **27.** 60°

29. $\langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$ **31.** ≈ 45.96 pies/s, ≈ 38.57 pies/s

33. $100\sqrt{7} \approx 264.6$ N, $\approx 139.1°$

35. $\sqrt{1250} \approx 35.4$ km/h, N8°W

37. $\approx -177.39\,\mathbf{i} + 211.41\,\mathbf{j}$, $\approx 177.39\,\mathbf{i} + 138.59\,\mathbf{j}$; ≈ 275.97 N, ≈ 225.11 N
39. (a) En un ángulo de 43.4° desde la orilla, hacia río arriba
(b) 20.2 min
41. $\pm(\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j})/\sqrt{17}$ **43.** $\mathbf{0}$
45. (a), (b) (d) $s = \frac{9}{7}$, $t = \frac{11}{7}$
47. Una esfera con radio 1, centrada en (x_0, y_0, z_0)

EJERCICIOS 12.3 ■ PÁGINA 812

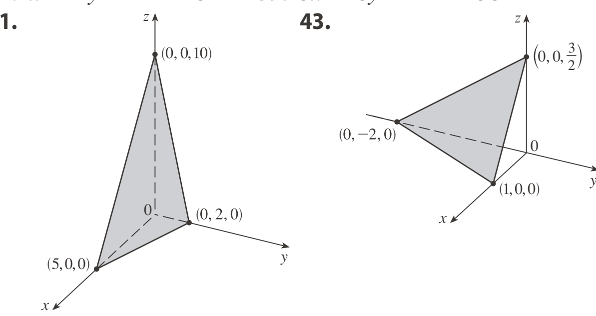
1. (b), (c), (d) son significativos **3.** -3.6 **5.** 0.58 **7.** 32
9. $14\sqrt{3}$ **11.** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = -\frac{1}{2}$
15. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63°$ **17.** $\cos^{-1}\left(-\frac{5}{6}\right) \approx 146°$
19. $\cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{130}}\right) \approx 52°$ **21.** 48°, 75°, 57°
23. (a) Ortogonal (b) Ninguno de los dos
(c) Paralelo (d) Ortogonal
25. Sí **27.** $(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}$ $\left[\text{o } (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}\right]$
29. 45° **31.** 0° en (0, 0), $\approx 8.1°$ en (1, 1)
33. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$; 48°, 71°, 48°
35. $1/\sqrt{14}$, $-2/\sqrt{14}$, $-3/\sqrt{14}$; 74°, 122°, 143°
37. $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$; 55°, 55°, 55° **39.** 9, $\langle \frac{36}{5}, \frac{27}{5} \rangle$
41. $\frac{1}{9}$, $\langle \frac{4}{81}, \frac{7}{81}, -\frac{4}{81} \rangle$ **43.** $-7/\sqrt{19}$, $-\frac{21}{19}\,\mathbf{i} + \frac{21}{19}\,\mathbf{j} - \frac{7}{19}\,\mathbf{k}$
47. $\langle 0, 0, -2\sqrt{10} \rangle$ o cualquier vector de la forma $\langle s, t, 3s - 2\sqrt{10} \rangle$, $s, t \in \mathbb{R}$
49. 144 J **51.** $560\cos(20°) \approx 526$ J
53. $\frac{13}{5}$ **55.** $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$

EJERCICIOS 12.4 ■ PÁGINA 821

1. $15\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$ **3.** $14\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$
5. $-\frac{3}{2}\,\mathbf{i} + \frac{7}{4}\,\mathbf{j} + \frac{2}{3}\,\mathbf{k}$ **7.** $(1 - t)\,\mathbf{i} + (t^3 - t^2)\,\mathbf{k}$
9. $\mathbf{0}$ **11.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
13. (a) Escalar (b) Sin sentido (c) Vector
(d) Sin sentido (e) Sin sentido (f) Escalar
15. 35; hacia dentro de la página **17.** $\langle -7, 10, 8 \rangle$, $\langle 7, -10, -8 \rangle$
19. $\left\langle -\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}} \right\rangle$, $\left\langle \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{5}{3\sqrt{3}} \right\rangle$
27. 20 **29.** (a) $\langle 0, 18, -9 \rangle$ (b) $\frac{9}{2}\sqrt{5}$
31. (a) $\langle 13, -14, 5 \rangle$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{390}$
33. 82 **35.** 16 **39.** $10.8 \operatorname{sen} 80° \approx 10.6$ N·m
41. ≈ 417 N **43.** 60°
45. (b) $\sqrt{97/3}$ **53.** (a) No (b) No (c) Sí

EJERCICIOS 12.5 ■ PÁGINA 831

1. (a) Verdadero (b) Falso (c) Verdadero (d) Falso
(e) Falso (f) Verdadero (g) Falso (h) Verdadero
(i) Verdadero (j) Falso (k) Verdadero
3. $\mathbf{r} = (2\,\mathbf{i} + 2.4\,\mathbf{j} + 3.5\,\mathbf{k}) + t(3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k})$;
$x = 2 + 3t$, $y = 2.4 + 2t$, $z = 3.5 - t$
5. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$;
$x = 1 + t$, $y = 3t$, $z = 6 + t$
7. $x = 2 + 2t$, $y = 1 + \frac{1}{2}t$, $z = -3 - 4t$;
$(x - 2)/2 = 2y - 2 = (z + 3)/(-4)$
9. $x = 8 + 3t$, $y = 4 + 0t = 4$, $z = -1 - 9t$;
$\frac{x - 8}{3} = \frac{z + 1}{-9}$, $y = 4$
11. $x = -6 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3 + t$;
$(x + 6)/2 = (y - 2)/3 = z - 3$
13. Sí
15. (a) $(x - 1)/(-1) = (y + 5)/2 = (z - 6)/(-3)$
(b) $(-1, -1, 0)$, $\left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$, $(0, -3, 3)$
17. $\mathbf{r}(t) = (6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 9\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$
19. Sesgada **21.** $(4, -1, -5)$ **23.** $-2x + y + 5z = 1$
25. $x + 4y + z = 4$ **27.** $5x - y - z = 7$
29. $6x + 6y + 6z = 11$ **31.** $x + y + z = 2$
33. $5x - 3y - 8z = -9$ **35.** $8x + y - 2z = 31$
37. $x - 2y - z = -3$ **39.** $3x - 8y - z = -38$
41. **43.**

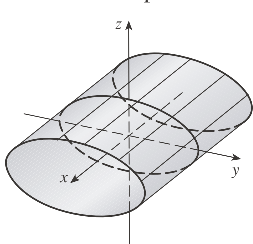


45. $(-2, 6, 3)$ **47.** $\left(\frac{2}{5}, 4, 0\right)$ **49.** 1, 0, −1
51. Perpendicular **53.** Ninguno de los dos, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 114.1°$
55. Paralelo
57. (a) $x = 1$, $y = -t$, $z = t$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right) \approx 15.8°$
59. $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 5}{-8} = \frac{z}{2}$ **61.** $x + 2y + z = 5$
63. $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$
65. $x = 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2 - 2t$
67. P_2 y P_3 son paralelos, P_1 and P_4 son idénticos
69. $\sqrt{61/14}$ **71.** $\frac{4\sqrt{35}}{7}$ **73.** $5/\left(2\sqrt{14}\right)$
77. $1/\sqrt{6}$ **79.** $13/\sqrt{69}$
81. (a) $x = 325 + 440t$, $y = 810 - 135t$, $z = 561 + 38t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (b) No

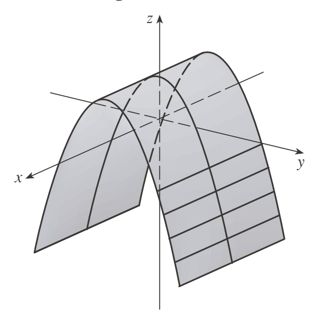
EJERCICIOS 12.6 ■ PÁGINA 839

1. (a) Parábola
(b) Cilindro parabólico con resoluciones paralelas al eje z
(c) Cilindro parabólico con resoluciones paralelas al eje x

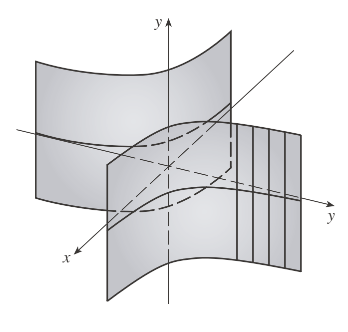
3. Cilindro elíptico



5. Cilindro parabólico

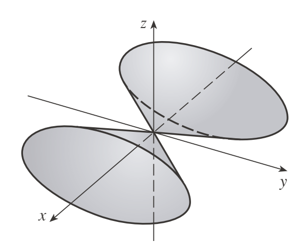


7. Cilindro hiperbólico

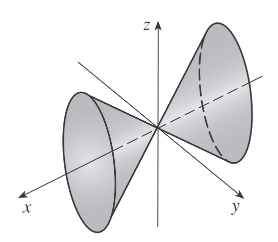


9. (a) $x = k$, $y^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbola ($k \neq \pm 1$);
$y = k$, $x^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbola ($k \neq \pm 1$);
$z = k$, $x^2 + y^2 = 1 + k^2$, círculo
(b) El hiperboloide rota de tal forma que tiene como eje el eje y
(c) El hiperboloide se desplaza una unidad en la dirección negativa de y

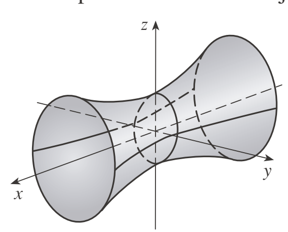
11. Cono elíptico con eje en el eje x



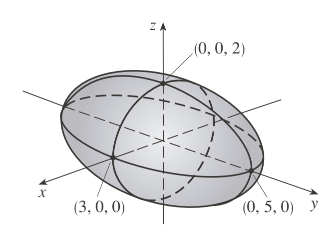
13. Cono elíptico con eje en el eje x



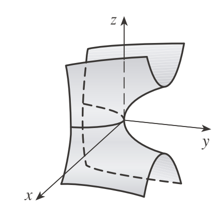
15. Hiperboloide de una hoja con eje en el eje x



17. Elipsoide

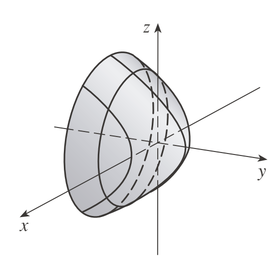


19. Paraboloide hiperbólico



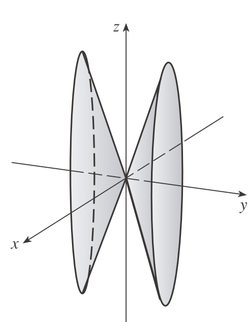
21. VII **23.** II **25.** VI **27.** VIII

29. Paraboloide circular



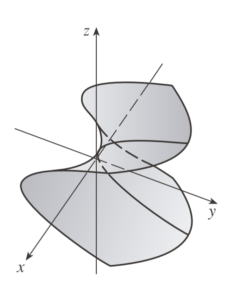
31. $y^2 = x^2 + \dfrac{z^2}{9}$

Cono elíptico con eje en el eje y

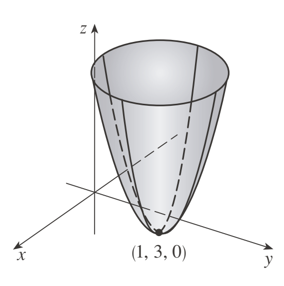


33. $y = z^2 - \dfrac{x^2}{2}$

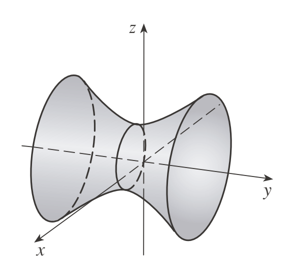
Paraboloide hiperbólica



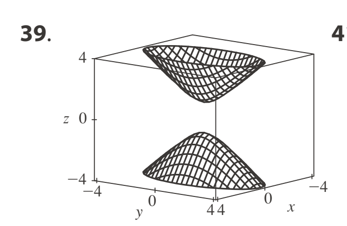
35. $z = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$
Paraboloide circular con vértice (1, 3, 0) y eje en la recta vertical $x = 1$, $y = 3$



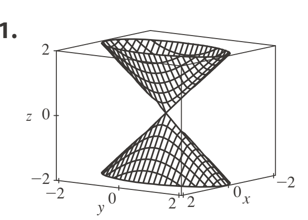
37. $\dfrac{(x-2)^2}{5} - \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{(z-1)^2}{5} = 1$
Hiperboloide de una hoja con centro (2, 0, 1) y eje en la recta horizontal $x = 2$, $z = 1$



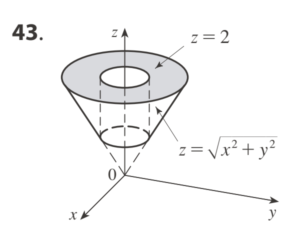
39.



41.



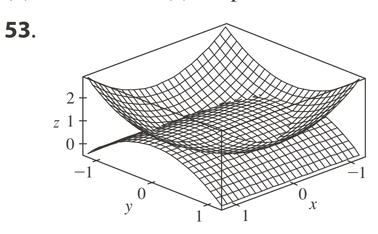
43.



45. $x = y^2 + z^2$ **47.** $-4x = y^2 + z^2$, paraboloide

49. (a) $\dfrac{x^2}{(6378.137)^2} + \dfrac{y^2}{(6378.137)^2} + \dfrac{z^2}{(6356.523)^2} = 1$
(b) Círculo (c) Elipse

53.



REPASO DEL CAPÍTULO 12 ■ PÁGINA 842

Examen verdadero-falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso
17. Falso **19.** Falso **21.** Verdadero

Ejercicios

1. (a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 69$
(b) $(y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 68$, $x = 0$
(c) Centro $(4, -1, -3)$, radio 5

3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3\sqrt{2}$; $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$; fuera de la página

5. $-2, -4$ **7.** (a) 2 (b) -2 (c) -2 (d) 0

9. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 71°$ **11.** (a) $\langle 4, -3, 4 \rangle$ (b) $\sqrt{41}/2$

13. ≈ 166 N, ≈ 114 N

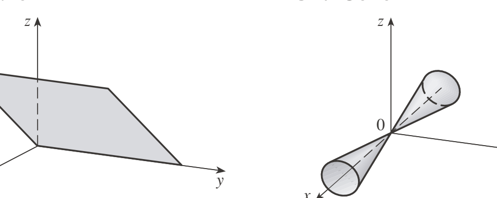
15. $x = 4 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 2 + 3t$

17. $x = -2 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 4 + 5t$

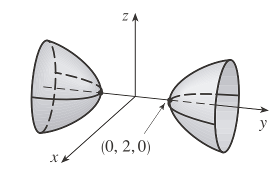
19. $-4x + 3y + z = -14$ **21.** (1, 4, 4) **23.** Sesgada

25. $x + y + z = 4$ **27.** $22/\sqrt{26}$

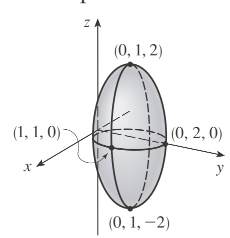
29. Plano **31.** Cono



33. Hiperboloide de dos hojas



35. Elipsoide



37. $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 844

1. $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$ m

3. (a) $(x + 1)/(-2c) = (y - c)/(c^2 - 1) = (z - c)/(c^2 + 1)$
(b) $x^2 + y^2 = t^2 + 1$, $z = t$ (c) $4\pi/3$

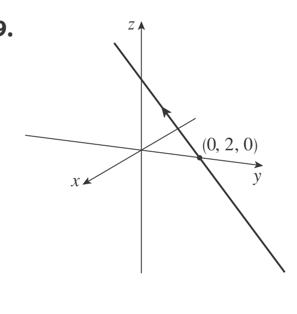
5. 20

CAPÍTULO 13

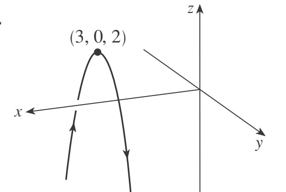
EJERCICIOS 13.1 ■ PÁGINA 853

1. $(-1, 3)$ **3.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ **5.** $\langle -1, \pi/2, 0 \rangle$

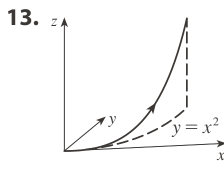
7. **9.**



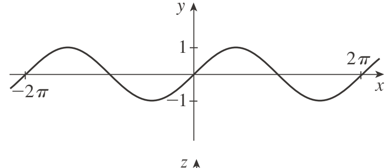
11.

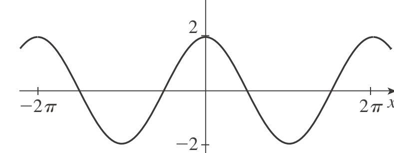


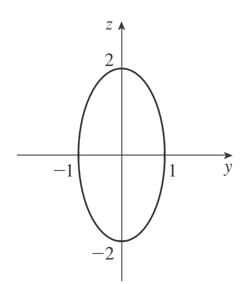
13.

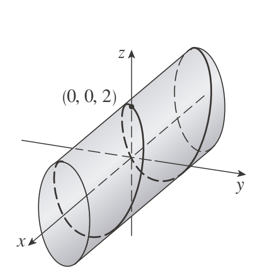


15.







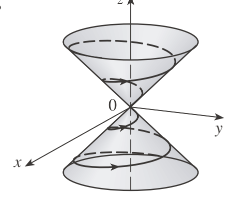


17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t, 3t \rangle, 0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = t, y = 2t, z = 3t, 0 \leqslant t \leqslant 1$

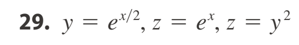
19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{2}t, -1 + \frac{4}{3}t, 1 - \frac{3}{4}t \right\rangle, 0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = \frac{1}{2}t, y = -1 + \frac{4}{3}t, z = 1 - \frac{3}{4}t, 0 \leqslant t \leqslant 1$

21. II **23.** V **25.** IV

27.

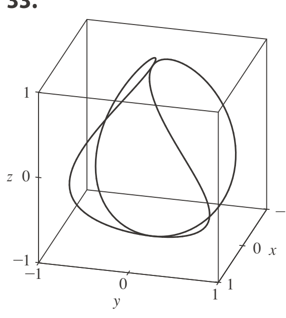


29. $y = e^{x/2}, z = e^x, z = y^2$

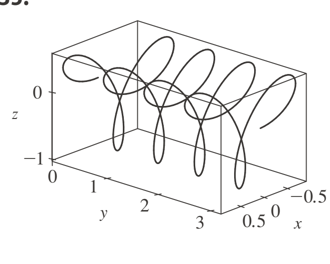


31. (0, 0, 0), (1, 0, 1)

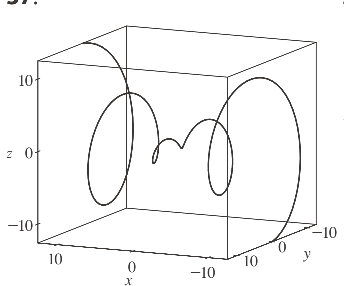
33.



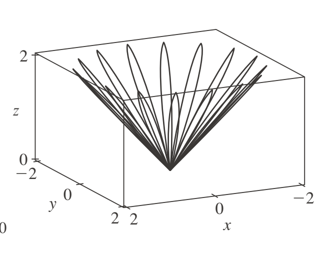
35.



37.



39.



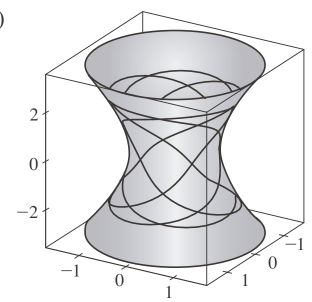
43. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\,\mathbf{k}$

45. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

47. $x = 2\cos t, y = 2\operatorname{sen} t, z = 4\cos^2 t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ **49.** Sí

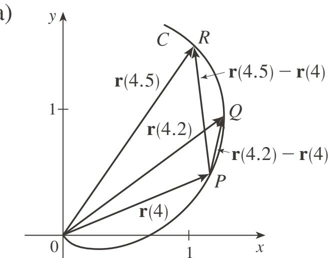
51. (a)



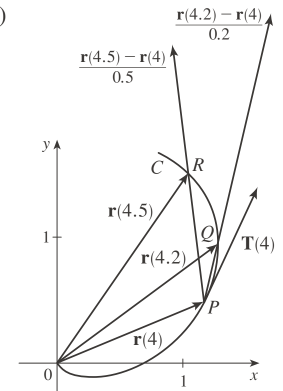


EJERCICIOS 13.2 ■ PÁGINA 860

1. (a)

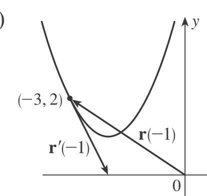


(b), (d)



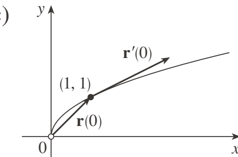
(c) $\mathbf{r}'(4) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\mathbf{r}(4 + h) - \mathbf{r}(4)}{h}$; $\mathbf{T}(4) = \dfrac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$

3. (a), (c)



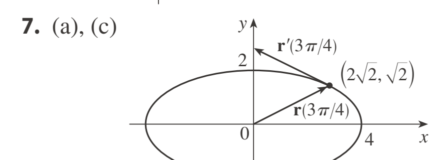
(b) $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t \rangle$

5. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = 2e^{2t}\,\mathbf{i} + e^{t}\,\mathbf{j}$

7. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{r}'(t) = \left\langle \dfrac{1}{2\sqrt{t-2}}, 0, -\dfrac{2}{t^3} \right\rangle$

11. $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} - 2t\,\mathrm{sen}(t^2)\,\mathbf{j} + 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}'(t) = (t\cos t + \mathrm{sen}\,t)\,\mathbf{i} + e^{t}(\cos t - \mathrm{sen}\,t)\,\mathbf{j} + (\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t)\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$ **17.** $\left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$ **19.** $\frac{3}{5}\,\mathbf{j} + \frac{4}{5}\,\mathbf{k}$

21. $\langle 1, 2t, 3t^2 \rangle, \langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14} \rangle, \langle 0, 2, 6t \rangle, \langle 6t^2, -6t, 2 \rangle$

23. $x = 2 + 2t,\ y = 4 + 2t,\ z = 1 + t$

25. $x = 1 - t,\ y = t,\ z = 1 - t$

27. $\mathbf{r}(t) = (3 - 4t)\,\mathbf{i} + (4 + 3t)\,\mathbf{j} + (2 - 6t)\,\mathbf{k}$

29. $x = t,\ y = 1 - t,\ z = 2t$

31. $x = -\pi - t,\ y = \pi + t,\ z = -\pi t$

33. $66°$ **35.** $2\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$

37. $(\ln 2)\,\mathbf{i} + (\pi/4)\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}\ln 2\,\mathbf{k}$

39. $e^{t}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t\ln t - t)\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$

41. $(t^3 + 2)\,\mathbf{i} + (-4t^2 + 4)\,\mathbf{j} + (2t^4 + 5)\,\mathbf{k}$

47. $2t\cos t + 2\,\mathrm{sen}\,t - 2\cos t\,\mathrm{sen}\,t$ **49.** 35

EJERCICIOS 13.3 ■ PÁGINA 868

1. 12 **3.** $e - e^{-1}$ **5.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$

7. 18.6833 **9.** 10.3311 **11.** 42

13. (a) $s(t) = \sqrt{26}\,(t - 1)$;

$\mathbf{r}(t(s)) = \left(4 - \dfrac{s}{\sqrt{26}}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{4s}{\sqrt{26}} + 1\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{3s}{\sqrt{26}} + 3\right)\mathbf{k}$

(b) $\left(4 - \dfrac{4}{\sqrt{26}}, \dfrac{16}{\sqrt{26}} + 1, \dfrac{12}{\sqrt{26}} + 3\right)$

15. $(3\,\mathrm{sen}\,1, 4, 3\cos 1)$

17. (a) $\langle 1/\sqrt{10}, (-3/\sqrt{10})\,\mathrm{sen}\,t, (3/\sqrt{10})\cos t \rangle$, $\langle 0, -\cos t, -\mathrm{sen}\,t \rangle$ (b) $\frac{3}{10}$

19. (a) $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle \sqrt{2}e^{t}, e^{2t}, -1 \rangle, \dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle 1 - e^{2t}, \sqrt{2}e^{t}, \sqrt{2}e^{t} \rangle$

(b) $\sqrt{2}e^{2t}/(e^{2t} + 1)^2$

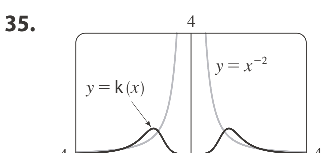
21. $6t^2/(9t^4 + 4t^2)^{3/2}$ **23.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2(3t^2 + 1)^2}$

25. $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

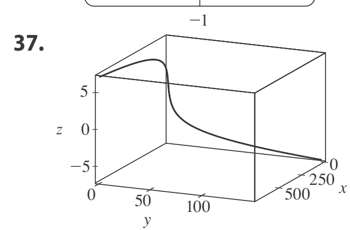
27. $\dfrac{6|x|}{(1 + 9x^4)^{3/2}}$ **29.** $\dfrac{1}{x(2 + \ln x^2 + (\ln x)^2)^{3/2}}$

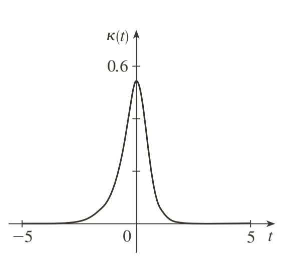
31. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, 1/\sqrt{2}\right)$; se aproxima a 0 **33.** (a) P (b) 1.3, 0.7

35.



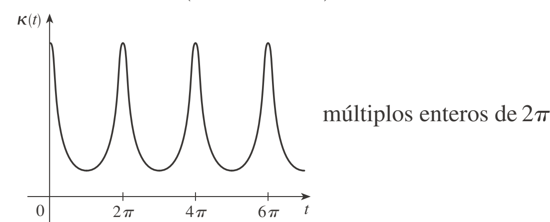
37.





39. a es $y = f(x)$, b es $y = \kappa(x)$

41. $\kappa(t) = \dfrac{6\sqrt{4\cos^2 t - 12\cos t + 13}}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$



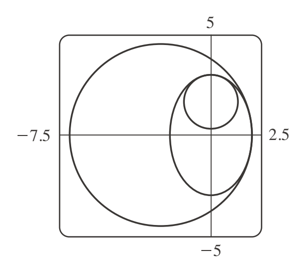
múltiplos enteros de 2π

43. $6t^2/(4t^2 + 9t^4)^{3/2}$

45. $1/(\sqrt{2}e^{t})$ **47.** $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle, \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right\rangle, \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$

49. $x - 2z = -4\pi,\ 2x + z = 2\pi$

51. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{81}{4},\ x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



53. $(-1, -3, 1)$

55. $2x + y + 4z = 7,\ 6x - 8y - z = -3$

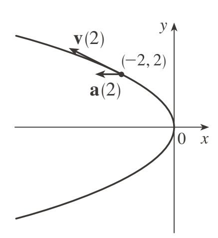
65. $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$ **67.** 2.07×10^{10} Å ≈ 2 m

EJERCICIOS 13.4 ■ PÁGINA 878

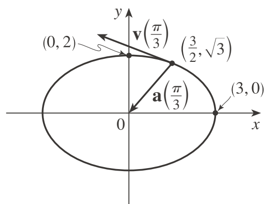
1. (a) $1.8\mathbf{i} - 3.8\mathbf{j} - 0.7\mathbf{k}, 2.0\mathbf{i} - 2.4\mathbf{j} - 0.6\mathbf{k}$, $2.8\mathbf{i} + 1.8\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k}, 2.8\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}$

(b) $2.4\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}, 2.58$

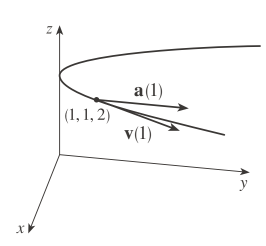
3. $\mathbf{v}(t) = \langle -t, 1 \rangle$
$\mathbf{a}(t) = \langle -1, 0 \rangle$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{t^2 + 1}$



5. $\mathbf{v}(t) = -3 \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = -3 \cos t\, \mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5 \operatorname{sen}^2 t + 4}$



7. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = 2\, \mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$



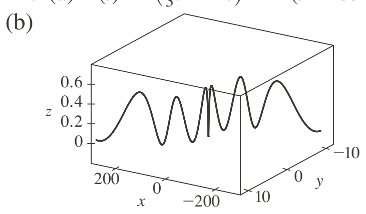
9. $\langle 2t, 3t^2, 2t \rangle$, $\langle 2, 6t, 2 \rangle$, $|t|\sqrt{9t^2 + 8}$

11. $\sqrt{2}\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} - e^{-t}\, \mathbf{k}$, $e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}$, $e^t + e^{-t}$

13. $e^t[(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}]$,
$e^t[-2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}]$, $e^t\sqrt{t^2 + 2t + 3}$

15. $\mathbf{v}(t) = (2t + 3)\, \mathbf{i} - \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = (t^2 + 3t)\, \mathbf{i} + (1 - t)\, \mathbf{j} + \left(\frac{1}{3}t^3 + 1\right)\mathbf{k}$

17. (a) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t - \operatorname{sen} t + 1)\, \mathbf{j} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t\right)\mathbf{k}$
(b)



19. $t = 4$

21. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} - t\, \mathbf{j} + \frac{5}{2}t^2\, \mathbf{k}$, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{25t^2 + 2}$

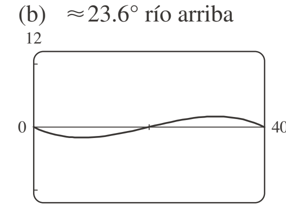
23. (a) ≈ 3535 m (b) ≈ 1531 m (c) 200 m/s

25. ≈ 30 m/s **27.** ≈ 198 m/s

29. $13.0° < \theta < 36.0°$, $55.4° < \theta < 85.5°$

31. $(250, -50, 0)$; $10\sqrt{93} \approx 96.4$ m/s

33. (a) 16 m (b) $\approx 23.6°$ río arriba



35. La trayectoria está contenida en un círculo que se sitúa en un plano perpendicular a **c** con centro en una recta que pasa por el origen en la dirección de **c**.

37. $\dfrac{4 + 18t^2}{\sqrt{4 + 9t^2}}$, $\dfrac{6t}{\sqrt{4 + 9t^2}}$ **39.** 0, 1 **41.** $\dfrac{7}{\sqrt{30}}$, $\sqrt{\dfrac{131}{30}}$

43. $4.5\ \text{cm/s}^2$, $9.0\ \text{cm/s}^2$ **45.** $t = 1$

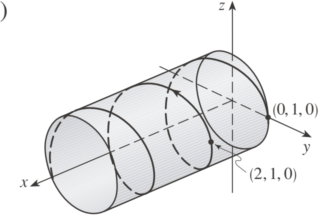
REPASO DEL CAPÍTULO 13 ■ PÁGINA 881

Examen verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero

Ejercicios

1. (a)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \pi \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{j} + \pi \cos \pi t\, \mathbf{k}$,
$\mathbf{r}''(t) = -\pi^2 \cos \pi t\, \mathbf{j} - \pi^2 \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\, \mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + (5 - 4 \cos t)\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

5. $\frac{1}{3}\mathbf{i} - (2/\pi^2)\mathbf{j} + (2/\pi)\mathbf{k}$ **7.** 86.631 **9.** 90°

11. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\langle 3 \operatorname{sen} t, -3 \cos t, 2 \rangle$ (b) $\langle \cos t, \operatorname{sen} t, 0 \rangle$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\langle -2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t, 3 \rangle$

(d) $\dfrac{3}{13 \operatorname{sen} t \cos t}$ o $\dfrac{3}{13}\sec t \csc t$

13. $12/17^{3/2}$ **15.** $x - 2y + 2\pi = 0$

17. $\mathbf{v}(t) = (1 + \ln t)\, \mathbf{i} + \mathbf{j} - e^{-t}\, \mathbf{k}$,
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2 + 2 \ln t + (\ln t)^2 + e^{-2t}}$, $\mathbf{a}(t) = (1/t)\mathbf{i} + e^{-t}\, \mathbf{k}$

19. $\mathbf{r}(t) = (t^3 + t)\, \mathbf{i} + (t^4 - t)\, \mathbf{j} + (3t - t^3)\, \mathbf{k}$

21. $\approx 37.3°$, ≈ 157.4 m

23. (c) $-2e^{-t}\, \mathbf{v}_d + e^{-t}\, \mathbf{R}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 884

1. (a) $\mathbf{v} = \omega R(-\operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{i} + \cos \omega t\, \mathbf{j})$ (c) $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$

3. (a) 90°, $v_0^2/(2g)$

5. (a) ≈ 0.25 m a la derecha de la orilla de la mesa, ≈ 4.9 m/s
(b) $\approx 5.9°$ (c) ≈ 0.56 m a la derecha de la orilla de la mesa

7. 56°

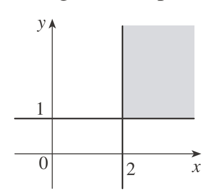
9. $(a_2b_3 - a_3b_2)(x - c_1) + (a_3b_1 - a_1b_3)(y - c_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)(z - c_3) = 0$

CAPÍTULO 14

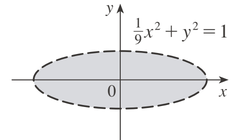
EJERCICIOS 14.1 ■ PÁGINA 899

1. (a) -27; una temperatura de -15 °C con viento soplando a 40 km/h parece equivalente a alrededor de -27 °C sin viento.
(b) Cuando la temperatura es de -20 °C, ¿qué velocidad del viento da un viento frío de -30 °C? 20 km/h
(c) Con una velocidad de viento de 20 km/h, ¿qué temperatura da un frío de viento de -49 °C? -35 °C

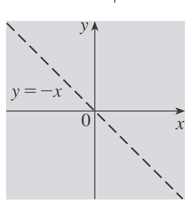
(d) Una función de velocidad de viento que dé valores de viento-frío cuando la temperatura es de -5 °C
(e) Una función de temperatura que dé valores de viento-frío cuando la velocidad del viento es de 50 km/h
3. ≈ 94.2; la producción anual del fabricante se valúa en \$94.2 millones cuando se gastan 120 000 horas de trabajo y se invierten \$20 millones en capital.
5. (a) ≈ 20.5; el área de una persona de 70 pulgadas de altura que pesa 160 libras es de aproximadamente 20.5 pies cuadrados.
7. (a) 7.7; un viento que sopla a 80 km/h en mar abierto durante 15 h creará olas de alrededor de 7.7 m de alto.
(b) $f(60, t)$ es una función de t que da las alturas de olas producidas por vientos de 60 km/h que soplan durante t horas.
(c) $f(v, 30)$ es una función de v que da las alturas de olas producidas por vientos de velocidad v que soplan durante 30 horas.
9. (a) 1 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[-1, 1]$
11. (a) 3
(b) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$, interior de una esfera de radio 2, centro en el origen, en el primer octante
13. $\{(x, y) \mid x \geqslant 2, y \geqslant 1\}$



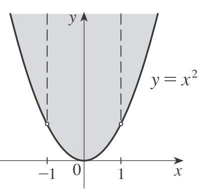
15. $\{(x, y) \mid \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$



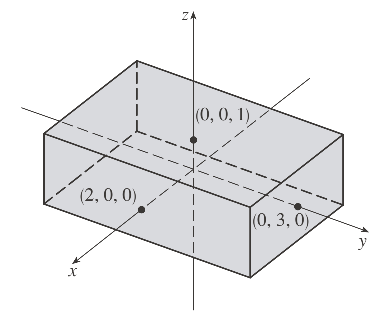
17. $\{(x, y) \mid y \neq -x\}$



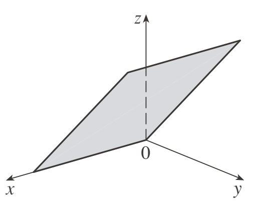
19. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2, x \neq \pm 1\}$



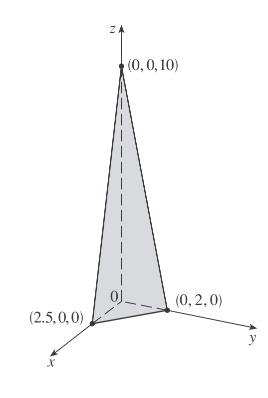
21. $\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2, -3 \leqslant y \leqslant 3, -1 \leqslant z \leqslant 1\}$



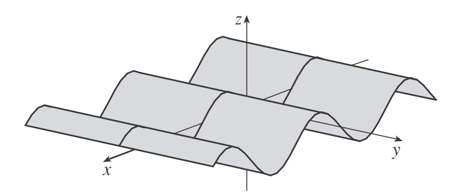
23. $z = y$, plano que pasa por el eje x



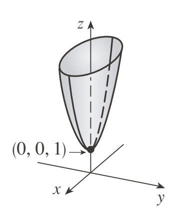
25. $4x + 5y + z = 10$, plano



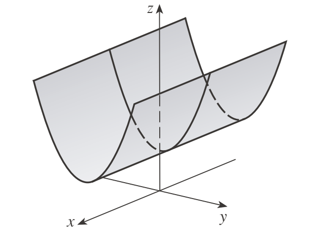
27. $z = \operatorname{sen} x$, cilindro



29. $z = x^2 + 4y^2 + 1$, paraboloide elíptico



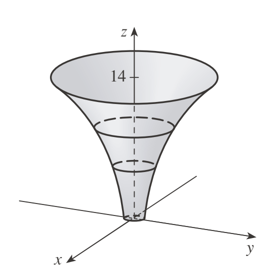
31. $z = y^2 + 1$, cilindro parabólico



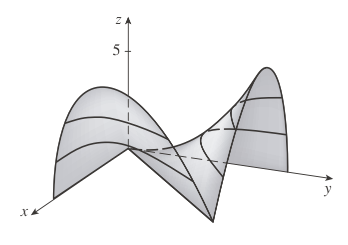
33. $\approx 56, \approx 35$ **35.** 11 °C, 19.5 °C **37.** Pronunciado; casi plano
39. No

h
2.5
2
1.5
1
0.5
0
$B(m, h) = k$
$k = 40$
$k = 30$
$k = 25$
$k = 18.5$
20 40 60 80 100 120 140 m

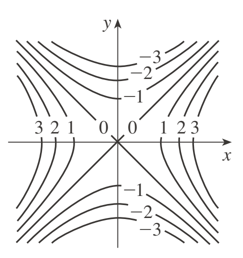
41.



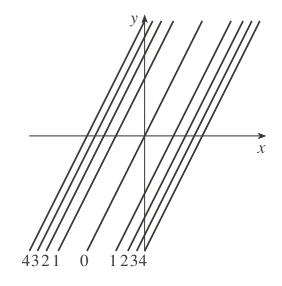
43.



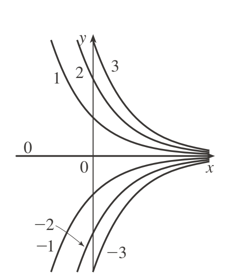
45. $x^2 - y^2 = k$



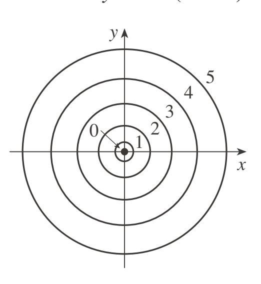
47. $(y - 2x)^2 = k$



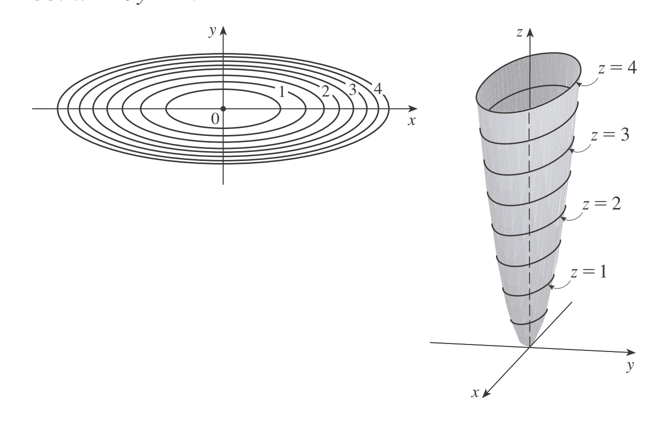
49. $y = ke^{-x}$



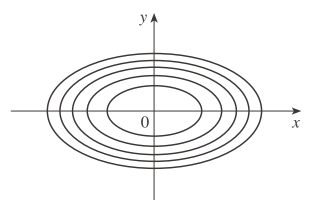
51. $x^2 + y^2 = k^3\ (k \geqslant 0)$



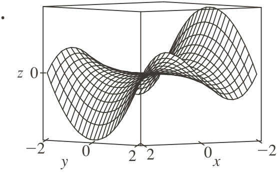
53. $x^2 + 9y^2 = k$



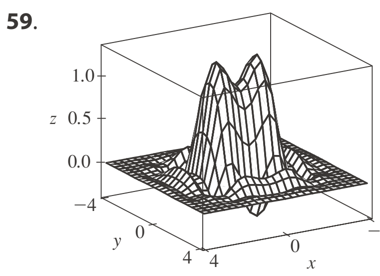
55.



57.

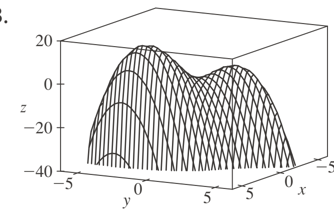


59.



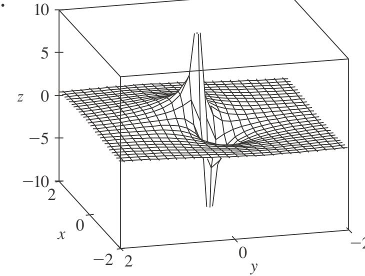
61. (a) C (b) II **63.** (a) F (b) I
65. (a) B (b) VI **67.** Familia de planos paralelos
69. Familia de cilindros circulares con eje en el eje x ($k > 0$)
71. (a) Desplace la gráfica de f 2 unidades hacia arriba
(b) Prolongue verticalmente la gráfica de f por un factor de 2
(c) Refleje la gráfica de f a través del plano xy
(d) Refleje la gráfica de f a través del plano xy y después desplácela dos unidades hacia arriba

73.



f parece tener un valor máximo de alrededor de 15. Hay dos puntos máximos locales pero ningún punto mínimo local.

75.

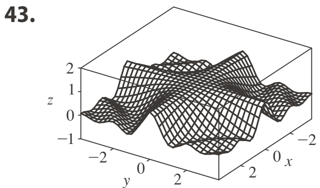


Los valores de la función se aproximan a 0 cuando x, y crecen; cuando (x, y) se aproximan al origen, f se aproxima a $\pm\infty$ o 0, dependiendo de la dirección de la aproximación.

77. Si $c = 0$, la gráfica es una superficie cilíndrica. Para $c > 0$, las curvas de nivel son elipses. Las curvas de la gráfica se mueven hacia arriba conforme se alejan del origen, y lo pronunciado aumenta cuando c aumenta. Para $c < 0$, las curvas de nivel son hipérbolas. Las curvas de la gráfica están hacia arriba en la dirección de y y hacia bajo, aproximándose al plano xy, en la dirección de x, lo que da una apariencia en forma de silla cerca de $(0, 0, 1)$.
79. $c = -2, 0, 2$ **81.** (b) $y = 0.75x + 0.01$

EJERCICIOS 14.2 ■ PÁGINA 910

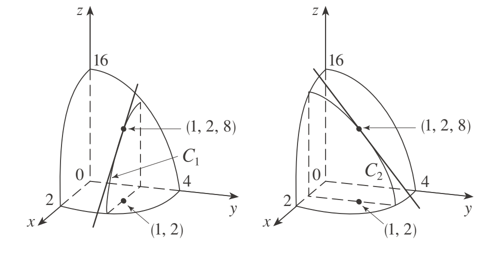
1. Nada; si f es continua. $f(3, 1) = 6$ **3.** $-\frac{5}{2}$
5. 56 **7.** $\pi/2$ **9.** No existe **11.** No existe
13. 0 **15.** No existe **17.** No existe **19.** $\sqrt{3}$
21. No existe
23. La gráfica muestra que la función se aproxima a números diferentes a lo largo de rectas diferentes.
25. $h(x, y) = (2x + 3y - 6)^2 + \sqrt{2x + 3y - 6}$; $\{(x, y) \mid 2x + 3y \geqslant 6\}$
27. A lo largo de la recta $y = x$ **29.** $\mathbb{R}^2$
31. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ **33.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}$
35. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$
37. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ **39.** 0 **41.** -1
43.



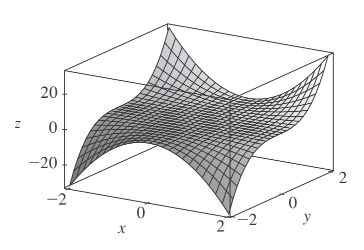
f es continua en $\mathbb{R}^2$

EJERCICIOS 14.3 ■ PÁGINA 923

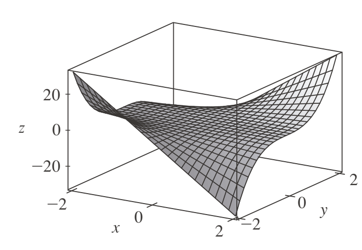
1. (a) La razón de cambio de la temperatura cuando la longitud varía, con latitud y tiempo fijos; la razón de cambio cuando solo la latitud varía; la razón de cambio cuando solo el tiempo varía
(b) Positivo, negativo, positivo
3. (a) $f_T(-15, 30) \approx 1.3$; para una temperatura de -15 °C y velocidad de viento de 30 km/h, el índice de viento-frío aumenta 1.3 °C por cada grado en que aumenta la temperatura. $f_v(-15, 30) \approx -0.15$; para una temperatura de -15 °C y velocidad de viento de 30 km/h, el índice de viento-frío baja 0.15 °C por cada km/h en que aumenta la velocidad del viento.
(b) Positivo, negativo
5. (a) Positivo (b) Negativo
7. (a) Positivo (b) Negativo
9. $c = f, b = f_x, a = f_y$
11. $f_x(1, 2) = -8$ = pendiente de C_1, $f_y(1, 2) = -4$ = pendiente de C_2



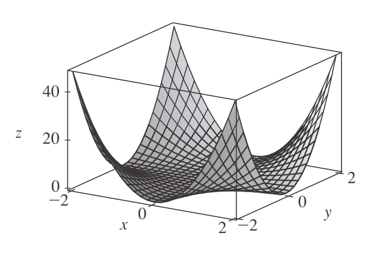
13.



$f(x, y) = x^2y^3$



$f_x(x, y) = 2xy^3$



$f_y(x, y) = 3x^2y^2$

15. $f_x(x, y) = 4x^3 + 5y^3$ $f_y(x, y) = 15xy^2$
17. $f_x(x, t) = -t^2e^{-x}$, $f_t(x, t) = 2te^{-x}$
19. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x + t^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{2t}{x + t^2}$
21. $f_x(x, y) = 1/y$, $f_y(x, y) = -x/y^2$
23. $f_x(x, t) = -\pi e^{-t} \operatorname{sen} \pi x$, $f_t(x, t) = -e^{-t} \cos \pi x$
25. $\partial z/\partial x = 20(2x + 3y)^9$, $\partial z/\partial y = 30(2x + 3y)^9$
27. $\partial w/\partial \alpha = \cos \alpha \cos \beta$, $\partial w/\partial \beta = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
29. $F_x(x, y) = \cos(e^x)$, $F_y(x, y) = -\cos(e^y)$
31. $f_x = 3x^2yz^2$, $f_y = x^3z^2 + 2z$, $f_z = 2x^3yz + 2y$
33. $\partial w/\partial x = 1/(x + 2y + 3z)$, $\partial w/\partial y = 2/(x + 2y + 3z)$, $\partial w/\partial z = 3/(x + 2y + 3z)$
35. $\partial u/\partial x = y \operatorname{sen}^{-1}(yz)$, $\partial u/\partial y = x \operatorname{sen}^{-1}(yz) + xyz/\sqrt{1 - y^2z^2}$, $\partial u/\partial z = xy^2/\sqrt{1 - y^2z^2}$
37. $h_x = 2xy \cos(z/t)$, $h_y = x^2 \cos(z/t)$, $h_z = (-x^2y/t) \operatorname{sen}(z/t)$, $h_t = (x^2yz/t^2) \operatorname{sen}(z/t)$
39. $\partial u/\partial x_i = x_i/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
41. 1 **43.** $\frac{1}{6}$ **45.** $f_x(x, y) = y^2 - 3x^2y$, $f_y(x, y) = 2xy - x^3$
47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{3z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{3z}$
49. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{e^z - xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{e^z - xy}$

51. (a) $f'(x), g'(y)$ (b) $f'(x + y), f'(x + y)$

53. $f_{xx} = 12x^2y - 12xy^2, f_{xy} = 4x^3 - 12x^2y = f_{yx}, f_{yy} = -4x^3$

55. $z_{xx} = \dfrac{8y}{(2x + 3y)^3}, z_{xy} = \dfrac{6y - 4x}{(2x + 3y)^3} = z_{yx},$
$z_{yy} = -\dfrac{12x}{(2x + 3y)^3}$

57. $v_{ss} = 2\cos(s^2 - t^2) - 4s^2 \operatorname{sen}(s^2 - t^2),$
$v_{st} = 4st \operatorname{sen}(s^2 - t^2) = v_{ts},$
$v_{tt} = -2\cos(s^2 - t^2) - 4t^2 \operatorname{sen}(s^2 - t^2)$

63. $24xy^2 - 6y, 24x^2y - 6x$ **65.** $(2x^2y^2z^5 + 6xyz^3 + 2z)e^{xyz^2}$

67. $\frac{3}{4}v(u + v^2)^{-5/2}$ **69.** $\theta e^{r\theta}(2 \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta + r\theta \operatorname{sen}\theta)$

71. $6yz^2$ **73.** $\approx 12.2, \approx 16.8, \approx 23.25$ **83.** R^2/R_1^2

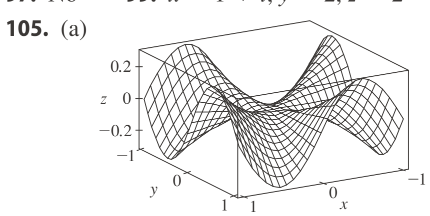
87. $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{V - nb}{nR}, \dfrac{\partial P}{\partial V} = \dfrac{2n^2a}{V^3} - \dfrac{nRT}{(V - nb)^2}$

91. (a) ≈ 0.0545; para una persona de 70 pulgadas de altura que pesa 160 libras, un aumento de peso causa que el área aumente a razón de alrededor de 0.0545 pies cuadrados por libra.
(b) ≈ 0.213; para una persona de 70 pulgadas de altura que pesa 160 libras, un aumento de altura (sin ningún cambio en el peso) causa que el área aumente a razón de alrededor de 0.213 pies cuadrados por pulgada de altura.

93. $\partial P/\partial v = 3Av^2 - \dfrac{B(mg/x)^2}{v^2}$ es la razón de cambio de la fuerza necesaria durante el modo de aleteo con respecto a la velocidad del ave cuando la masa y fracción de tiempo de aleteo se mantienen constantes;
$\partial P/\partial x = -\dfrac{2Bm^2g^2}{x^3v}$ es la razón a la que la fuerza cambia cuando solo varía la fracción de tiempo pasada en modo de aleteo;
$\partial P/\partial m = \dfrac{2Bmg^2}{x^2v}$ es la razón de cambio de la fuerza cuando solo varía la masa.

97. No **99.** $x = 1 + t, y = 2, z = 2 - 2t$ **103.** -2

105. (a)



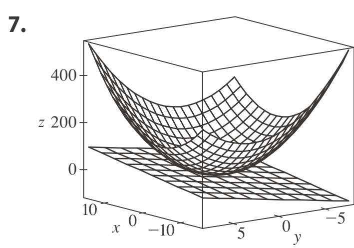
(b) $f_x(x, y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, f_y(x, y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

(c) 0, 0 (e) No, ya que f_{xy} y f_{yx} no son continuas.

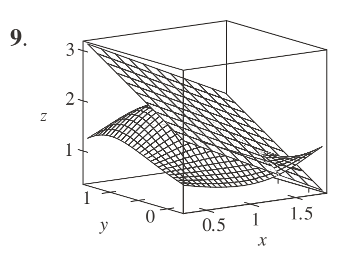
EJERCICIOS 14.4 ■ PÁGINA 934

1. $z = 4x - y - 6$ **3.** $z = x - y + 1$ **5.** $x + y - 2z = 0$

7.



9.



11. $6x + 4y - 23$ **13.** $2x + y - 1$

15. $2x + 2y + \pi - 4$ **19.** 6.3

21. $\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$; 6.9914 **23.** $2T + 0.3H - 40.5$; 44.4 °C

25. $dz = -2e^{-2x}\cos 2\pi t\, dx - 2\pi e^{-2x} \operatorname{sen} 2\pi t\, dt$

27. $dm = 5p^4q^3\, dp + 3p^5q^2\, dq$

29. $dR = \beta^2 \cos\gamma\, d\alpha + 2\alpha\beta\cos\gamma\, d\beta - \alpha\beta^2 \operatorname{sen}\gamma\, d\gamma$

31. $\Delta z = 0.9225, dz = 0.9$ **33.** 5.4 cm² **35.** 16 cm³

37. $\approx -0.0165mg$; decremento **39.** $\frac{1}{17} \approx 0.059\ \Omega$

41. (a) $0.8264m - 34.56h + 38.02$ (b) 18.801

43. $\varepsilon_1 = \Delta x, \varepsilon_2 = \Delta y$

EJERCICIOS 14.5 ■ PÁGINA 943

1. $2t(y^3 - 2xy + 3xy^2 - x^2)$

3. $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cos x \cos y + \dfrac{1}{t^2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$

7. $\partial z/\partial s = 5(x - y)^4(2st - t^2), \partial z/\partial t = 5(x - y)^4(s^2 - 2st)$

9. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{3 \operatorname{sen} t - 2t \operatorname{sen} s}{3x + 2y}, \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{3s\cos t + 2\cos s}{3x + 2y}$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t\cos\theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen}\theta\right),$
$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s\cos\theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen}\theta\right)$

13. 42 **15.** 7, 2

17. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s},$
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

19. $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x},$
$\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial T}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial T}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial y} + \dfrac{\partial T}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y},$
$\dfrac{\partial T}{\partial z} = \dfrac{\partial T}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\partial T}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial z} + \dfrac{\partial T}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial z}$

21. 85, 178, 54 **23.** $2\pi, -2\pi$

25. $\frac{5}{144}, -\frac{5}{96}, \frac{5}{144}$ **27.** $\dfrac{2x + y \operatorname{sen} x}{\cos x - 2y}$

29. $\dfrac{1 + x^4y^2 + y^2 + x^4y^4 - 2xy}{x^2 - 2xy - 2x^5y^3}$

31. $-\dfrac{x}{3z}, -\dfrac{2y}{3z}$ **33.** $\dfrac{yz}{e^z - xy}, \dfrac{xz}{e^z - xy}$

35. 2°C/s **37.** ≈ -0.33 m/s por minuto

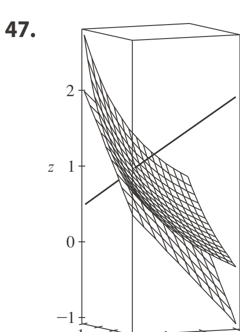
39. (a) 6 m³/s (b) 10 m²/s (c) 0 m/s

41. ≈ -0.27 L/s **43.** $-1/(12\sqrt{3})$ rad/s

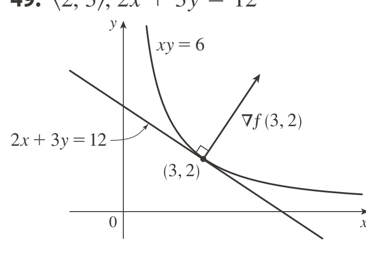
45. (a) $\partial z/\partial r = (\partial z/\partial x)\cos\theta + (\partial z/\partial y)\operatorname{sen}\theta$,
$\partial z/\partial\theta = -(\partial z/\partial x)\, r\operatorname{sen}\theta + (\partial z/\partial y)\, r\cos\theta$
51. $4rs\,\partial^2 z/\partial x^2 + (4r^2 + 4s^2)\partial^2 z/\partial x\,\partial y + 4rs\,\partial^2 z/\partial y^2 + 2\,\partial z/\partial y$

EJERCICIOS 14.6 ■ PÁGINA 956

1. ≈ -0.08 mb/km **3.** ≈ 0.778 **5.** $\sqrt{2}/2$
7. (a) $\nabla f(x, y) = (1/y)\mathbf{i} - (x/y^2)\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (c) -1
9. (a) $\langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz}\rangle$ (b) $\langle 1, 12, 0\rangle$ (c) $-\frac{22}{3}$
11. $\dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$ **13.** $7/(2\sqrt{5})$ **15.** 1 **17.** $4/\sqrt{30}$
19. $\frac{2}{5}$ **21.** $\sqrt{65}$, $\langle 1, 8\rangle$ **23.** 1, $\langle 0, 1\rangle$
25. $\frac{3}{4}$, $\langle 1, -2, -2\rangle$ **27.** (b) $\langle -12, 92\rangle$
29. Todos los puntos en la recta $y = x + 1$ **31.** (a) $-40/(3\sqrt{3})$
33. (a) $32/\sqrt{3}$ (b) $\langle 38, 6, 12\rangle$ (c) $2\sqrt{406}$
35. $\frac{327}{13}$ **39.** $\frac{774}{25}$
41. (a) $x + y + z = 11$ (b) $x - 3 = y - 3 = z - 5$
43. (a) $x + 2y + 6z = 12$ (b) $x - 2 = \dfrac{y - 2}{2} = \dfrac{z - 1}{6}$
45. (a) $2x + 3y + 12z = 24$ (b) $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{z - 1}{12}$
47.



49. $\langle 2, 3\rangle$, $2x + 3y = 12$



55. No **59.** $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{25}{8}\right)$
63. $x = -1 - 10t$, $y = 1 - 16t$, $z = 2 - 12t$
65. $(-1, 0, 1)$; $\approx 7.8°$
69. Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, entonces $af_x + bf_y$ y $cf_x + df_y$ son conocidas, así que se despeja f_x y f_y en las ecuaciones lineales.

EJERCICIOS 14.7 ■ PÁGINA 967

1. (a) f tiene un mínimo local en (1, 1).
(b) f tiene un punto silla en (1, 1).
3. Mínimo local en (1, 1), punto silla en (0, 0)
5. Máximo $f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = 11$
7. Máximo $f(0, 0) = 2$, mínimo $f(0, 4) = -30$, puntos silla en (2, 2), (−2, 2)
9. Mínimos $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}$, punto silla en (0, 0)
11. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimo $f(1, 0) = -2$, puntos silla en $(0, \pm 1)$
13. Máximo $f(0, -1) = 2$, mínimo $f(\pm 1, 1) = -3$, puntos silla en (0, 1), $(\pm 1, -1)$
15. Ninguno
17. Mínimos $f(x, y) = 1$ en todos los puntos (x, y) en los ejes x y y
19. Mínimos $f(0, 1) = f(\pi, -1) = f(2\pi, 1) = -1$, puntos silla en $(\pi/2, 0)$, $(3\pi/2, 0)$
23. Mínimos $f(1, \pm 1) = f(-1, \pm 1) = 3$
25. Máximo $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$, mínimo $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$, punto silla en (π, π)
27. Mínimos $f(0, -0.794) \approx -1.191$, $f(\pm 1.592, 1.267) \approx -1.310$ puntos silla $(\pm 0.720, 0.259)$, puntos más bajos $(\pm 1.592, 1.267, -1.310)$
29. Máximo $f(0.170, -1.215) \approx 3.197$, mínimos $f(-1.301, 0.549) \approx -3.145$, $f(1.131, 0.549) \approx -0.701$, puntos silla $(-1.301, -1.215)$, $(0.170, 0.549)$, $(1.131, -1.215)$, ningún punto más alto o más bajo
31. Máximo $f(0, \pm 2) = 4$, mínimo $f(1, 0) = -1$
33. Máximo $f(\pm 1, 1) = 7$, mínimo $f(0, 0) = 4$
35. Máximo $f(0, 3) = f(2, 3) = 7$, mínimo $f(1, 1) = -2$
37. Máximo $f(3, 0) = 83$, mínimo $f(1, 1) = 0$
39.
41. $2/\sqrt{3}$ **43.** $(2, 1, \sqrt{5})$, $(2, 1, -\sqrt{5})$ **45.** $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$
47. $8r^3/(3\sqrt{3})$ **49.** $\frac{4}{3}$ **51.** Cubo, longitud de arista $c/12$
53. Base cuadrada de lado 40 cm, altura 20 cm **55.** $L^3/(3\sqrt{3})$
57. (a) $H = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - (1 - p_1 - p_2)\ln(1 - p_1 - p_2)$
(b) $\{(p_1, p_2) \mid 0 < p_1 < 1, p_2 < 1 - p_1\}$
(c) $\ln 3$; $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

EJERCICIOS 14.8 ■ PÁGINA 977

1. $\approx 59, 30$
3. Máximo $f(\pm 1, 0) = 1$, mínimo $f(0, \pm 1) = -1$
5. Máximo $f(1, 2) = f(-1, -2) = 2$, mínimo $f(1, -2) = f(-1, 2) = -2$
7. Mínimo $f(4, 4, 4) = 48$
9. Máximo $f(1, \pm\sqrt{2}, 1) = f(-1, \pm\sqrt{2}, -1) = 2$, mínimo $f(1, \pm\sqrt{2}, -1) = f(-1, \pm\sqrt{2}, 1) = -2$
11. Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1
13. Máximo $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$, mínimo $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -2$
15. Mínimo $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$
17. Máximo $f(0, 1, \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$, mínimo $f(0, 1, -\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$
19. Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$, mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$
21. Máximo $f(3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}) = 9 + 12\sqrt{2}$, mínimo $f(-2, 2) = -8$
23. Máximo $f(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/(2\sqrt{2})) = e^{1/4}$, mínimo $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$
31–43. Véanse los ejercicios 41–55 de la sección 14.7.
45. Más cercano $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, más lejano $(-1, -1, 2)$
47. Máximo ≈ 9.7938, mínimo ≈ -5.3506
49. (a) c/n (b) Cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

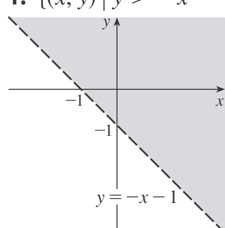
REPASO DEL CAPÍTULO 14 ■ PÁGINA 982

Examen verdadero-falso

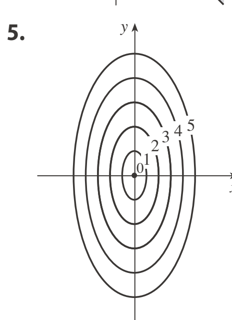
1. Verdadero **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Falso
11. Verdadero

Ejercicios

1. $\{(x, y) \mid y > -x - 1\}$ **3.**



5. **7.**



9. $\frac{2}{3}$

11. (a) $\approx 3.5°C/m$, $-3.0°C/m$
(b) $\approx 0.35°C/m$ por la ecuación 14.6.9 (la definición 14.6.2 da $\approx 1.1°C/m$.)
(c) -0.25

13. $f_x = 32xy(5y^3 + 2x^2y)^7$ $f_y = (16x^2 + 120y^2)(5y^3 + 2x^2y)^7$

15. $F_\alpha = \dfrac{2\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2} + 2\alpha \ln(\alpha^2 + \beta^2)$, $F_\beta = \dfrac{2\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$

17. $S_u = \arctan(v\sqrt{w})$, $S_v = \dfrac{u\sqrt{w}}{1 + v^2w}$, $S_w = \dfrac{uv}{2\sqrt{w}(1 + v^2w)}$

19. $f_{xx} = 24x$, $f_{xy} = -2y = f_{yx}$, $f_{yy} = -2x$

21. $f_{xx} = k(k-1)x^{k-2}y^lz^m$, $f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx}$,
$f_{xz} = kmx^{k-1}y^lz^{m-1} = f_{zx}$, $f_{yy} = l(l-1)x^ky^{l-2}z^m$,
$f_{yz} = lmx^ky^{l-1}z^{m-1} = f_{zy}$, $f_{zz} = m(m-1)x^ky^lz^{m-2}$

25. (a) $z = 8x + 4y + 1$ (b) $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$

27. (a) $2x - 2y - 3z = 3$ (b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-1}{-6}$

29. (a) $x + 2y + 5z = 0$
(b) $x = 2 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = 5t$

31. $(2, \frac{1}{2}, -1)$, $(-2, -\frac{1}{2}, 1)$

33. $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z - 120$; 38.656

35. $2xy^3(1 + 6p) + 3x^2y^2(pe^p + e^p) + 4z^3(p\cos p + \operatorname{sen} p)$

37. -47, 108

43. $\langle 2xe^{yz^2}, x^2z^2e^{yz^2}, 2x^2yze^{yz^2}\rangle$ **45.** $-\frac{4}{5}$

47. $\sqrt{145}/2$, $\langle 4, \frac{9}{2}\rangle$ **49.** $\approx \frac{5}{8}$ nudos/milla

51. Mínimo $f(-4, 1) = -11$

53. Máximo $f(1, 1) = 1$; puntos silla $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$

55. Máximo $f(1, 2) = 4$, mínimo $f(2, 4) = -64$

57. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimos $f(1, \pm 1) = -3$, puntos silla $(-1, \pm 1)$, $(1, 0)$

59. Máximo $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$, mínimo $f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$

61. Máximo 1, mínimo -1

63. $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$, $(\pm 3^{-1/4}, -3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$

65. $P(2 - \sqrt{3})$, $P(3 - \sqrt{3})/6$, $P(2\sqrt{3} - 3)/3$

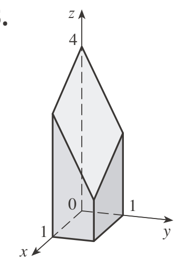
PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 985

1. L^2W^2, $\frac{1}{4}L^2W^2$ **3.** (a) $x = w/3$, base $= w/3$ (b) Sí
7. $\sqrt{3/2}$, $3/\sqrt{2}$

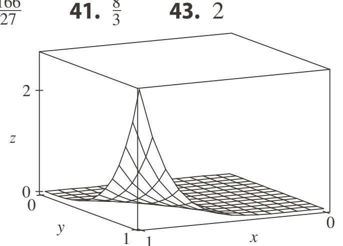
CAPÍTULO 15

EJERCICIOS 15.1 ■ PÁGINA 999

1. (a) 288 (b) 144 **3.** (a) 0.990 (b) 1.151
5. $U < V < L$ **7.** (a) ≈ 248 (b) ≈ 15.5
9. $24\sqrt{2}$ **11.** 3 **13.** $2 + 8y^2$, $3x + 27x^2$
15. 222 **17.** $\frac{5}{2} - e^{-1}$ **19.** 2
21. $\frac{15}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 4$ o $\frac{21}{2}\ln 2$ **23.** 6
25. π **27.** 2 **29.** $9\ln 2$
31. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{12}\pi$ **33.** 0
35.



37. 51 **39.** $\frac{166}{27}$ **41.** $\frac{8}{3}$ **43.** 2
45. $21e - 57$



47. $\frac{5}{6}$ **49.** 0

51. El teorema de Fubini no se aplica. El integrando tiene una discontinuidad infinita en el origen.

EJERCICIOS 15.2 ■ PÁGINA 1008

1. $\frac{868}{3}$ **3.** $\frac{1}{6}(e - 1)$ **5.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 1$
7. $\frac{1}{4}\ln 17$ **9.** $\frac{1}{2}(1 - e^{-9})$
11. (a) (b)

13. Tipo I: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$, tipo II: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1\}$; $\frac{1}{3}$

15. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} y\,dx\,dy = \frac{9}{4}$

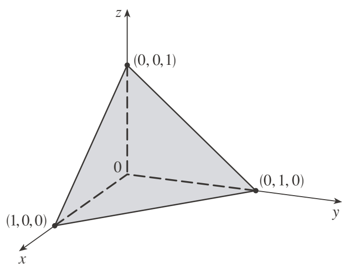
17. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ **19.** $\frac{11}{3}$ **21.** 0 **23.** $\frac{3}{4}$

25. $\frac{31}{8}$ **27.** $\frac{16}{3}$ **29.** 6 **31.** $\frac{1}{3}$

33. 0, 1.213; 0.713 **35.** $\frac{64}{3}$

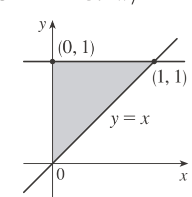
37. $\dfrac{10}{3\sqrt{2}}$ o $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

39.

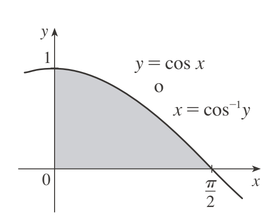


41. 13 984 735 616/14 549 535 **43.** $\pi/2$

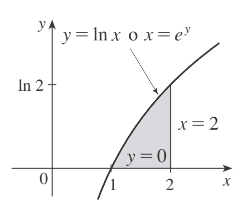
45. $\int_0^1 \int_x^1 f(x, y)\,dy\,dx$



47. $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} f(x, y)\,dx\,dy$



49. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 f(x, y)\,dx\,dy$



51. $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ **53.** $\frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1)$

55. $\frac{1}{3}\ln 9$ **57.** 1

59. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi \leqslant \iint_S \sqrt{4 - x^2y^2}\,dA \leqslant \pi$

61. $\frac{3}{4}$ **65.** 9π **67.** $a^2b + \frac{3}{2}ab^2$ **69.** $\pi a^2 b$

EJERCICIOS 15.3 ■ PÁGINA 1014

1. $\int_0^{3\pi/2} \int_0^4 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$

3. $\int_\pi^{2\pi} \int_0^1 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$

5. $3\pi/4$

7. $\frac{1250}{3}$ **9.** $(\pi/4)(\cos 1 - \cos 9)$

11. $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ **13.** $\frac{3}{64}\pi^2$ **15.** $\pi/12$

17. $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **19.** $\frac{625}{2}\pi$ **21.** 4π **23.** $\frac{4}{3}\pi a^3$

25. $(\pi/3)(2 - \sqrt{2})$ **27.** $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

29. $(\pi/4)(1 - e^{-4})$ **31.** $\frac{1}{120}$ **33.** 4.5951

35. 37.5π m^3 **37.** $2/(a + b)$ **39.** $\frac{15}{16}$

41. (a) $\sqrt{\pi}/4$ (b) $\sqrt{\pi}/2$

EJERCICIOS 15.4 ■ PÁGINA 1024

1. 285 C **3.** $42k$, $\left(2, \frac{85}{28}\right)$ **5.** 6, $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

7. $\frac{8}{15}k$, $\left(0, \frac{4}{7}\right)$

9. $\frac{1}{8}(1 - 3e^{-2})$, $\left(\dfrac{e^2 - 5}{e^2 - 3}, \dfrac{8(e^3 - 4)}{27(e^3 - 3e)}\right)$

11. $\left(\frac{3}{8}, 3\pi/16\right)$ **13.** $(0, 45/(14\pi))$

15. $(2a/5, 2a/5)$ si el vértice es (0, 0) y los lados están a lo largo de ejes positivos

17. $409.2k$, $182k$, $591.2k$

19. $\frac{64}{315}k$, $\frac{8}{105}k$, $\frac{88}{315}k$

21. $\rho bh^3/3$, $\rho b^3h/3$; $b/\sqrt{3}$, $h/\sqrt{3}$

23. $\rho a^4\pi/16$, $\rho a^4\pi/16$; $a/2$, $a/2$

25. $m = 3\pi/64$, $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{16384\sqrt{2}}{10395\pi}, 0\right)$,

$I_x = \dfrac{5\pi}{384} - \dfrac{4}{105}$, $I_y = \dfrac{5\pi}{384} + \dfrac{4}{105}$, $I_0 = \dfrac{5\pi}{192}$

27. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0.375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0.1042$

29. (b) (i) $e^{-0.2} \approx 0.8187$
(ii) $1 + e^{-1.8} - e^{-0.8} - e^{-1} \approx 0.3481$ (c) 2, 5

31. (a) $\approx$0.500 (b) $\approx$0.632

33. (a) $\iint_D (k/20)\left[20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right] dA$, donde D es el disco con radio 10 km centrado en el centro de la ciudad
(b) $200\pi k/3 \approx 209k$, $200\left(\pi/2 - \frac{8}{9}\right)k \approx 136k$, en la orilla

EJERCICIOS 15.5 ■ PÁGINA 1028

1. $12\sqrt{35}$ **3.** $3\sqrt{14}$ **5.** $(\pi/6)(13\sqrt{13} - 1)$

7. $12\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ **9.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

11. $a^2(\pi - 2)$ **13.** 3.6258

15. (a) $\approx$1.83 (b) $\approx$1.8616

17. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln\left[\left(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70}\right)/\left(3\sqrt{5} + \sqrt{70}\right)\right]$

19. 3.3213 **23.** $(\pi/6)(101\sqrt{101} - 1)$

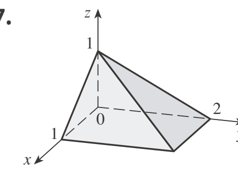
EJERCICIOS 15.6 ■ PÁGINA 1037

1. $\frac{27}{4}$ **3.** $\frac{16}{15}$ **5.** $-\frac{1}{3}$ **7.** $\frac{2}{3}$ **9.** $\frac{27}{2}$ **11.** 4

13. $\frac{65}{28}$ **15.** $\frac{8}{15}$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $\frac{16}{3}$ **21.** $\frac{8}{15}$

23. (a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\,dy\,dx$ (b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$

25. $\approx$0.985 **27.**



29. $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4-4z^2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}/2}^{\sqrt{4-y}/2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

31. $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-y/2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-x^2/2}\int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}}\int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

33. $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2}\int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{0}^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

35. $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{y}^{1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y}\int_{y}^{1} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{z}^{x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx = \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{z}^{x} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

37. 64π **39.** $\frac{3}{2}\pi, \left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$

41. $a^5, (7a/12, 7a/12, 7a/12$

43. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}kL^5$ **45.** $\frac{1}{2}\pi kha^4$

47. (a) $m = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$\bar{x} = (1/m)\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} x\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx,$

$\bar{y} = (1/m)\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} y\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx,$

y $\bar{z} = (1/m)\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(c) $\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$

49. (a) $\frac{3}{32}\pi + \frac{11}{24}$

(b) $\left(\dfrac{28}{9\pi + 44}, \dfrac{30\pi + 128}{45\pi + 220}, \dfrac{45\pi + 208}{135\pi + 660}\right)$

(c) $\frac{1}{240}(68 + 15\pi)$

51. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{5760}$ **53.** $L^3/8$

55. (a) La región acotada por la elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

(b) $4\sqrt{6}\pi/45$

EJERCICIOS 15.7 ■ PÁGINA 1043

1. (a) (b)

$(2, 2\sqrt{3}, -2)$ $(0, -2, 1)$

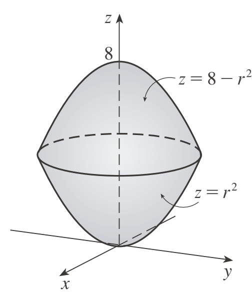
3. (a) $(2, \pi/3, -1)$ (b) $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, 2)$

5. Cilindro circular con radio 2 y eje en el eje z

7. Esfera, radio 2, centrada en el origen

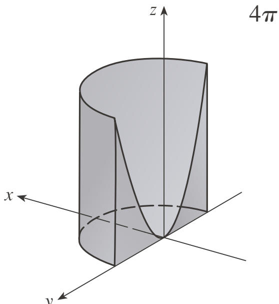
9. (a) $z^2 = 1 + r\cos\theta - r^2$ (b) $z = r^2\cos 2\theta$

11.



13. Coordenadas cilíndricas: $6 \leqslant r \leqslant 7, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant 20$

15. 4π



17. 384π **19.** $\frac{8}{3}\pi + \frac{128}{15}$ **21.** $2\pi/5$ **23.** $\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2} - 1\right)$

25. (a) $\frac{512}{3}\pi$ (b) $\left(0, 0, \frac{23}{2}\right)$

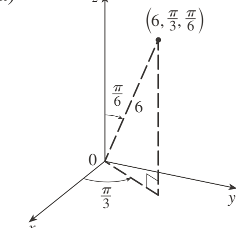
27. $\pi Ka^2/8, (0, 0, 2a/3)$ **29.** 0

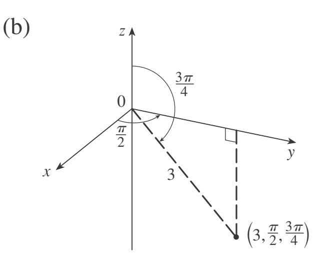
31. (a) $\iiint_C h(P)g(P)\, dV$, donde C es el cono

(b) $\approx 4.4 \times 10^{18}$ J

EJERCICIOS 15.8 ■ PÁGINA 1049

1. (a) (b)





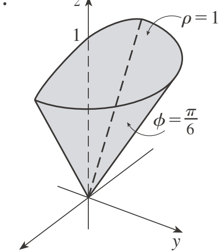
$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3}\right)$ $\left(0, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

3. (a) $\left(\sqrt{2}, 0, 3\pi/4\right)$ (b) $\left(2\sqrt{2}, \pi/4, \pi/3\right)$

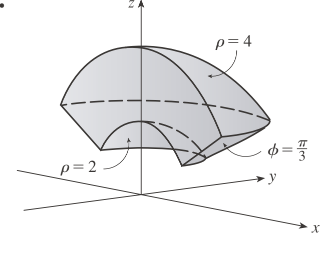
5. Semicono **7.** Plano horizontal

9. (a) $\rho = 3$ (b) $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi\cos 2\theta - \cos^2\phi) = 1$

11.

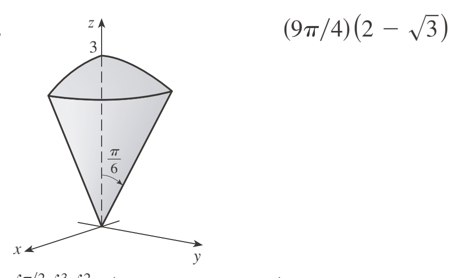


13.



15. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \rho \leqslant \cos\phi$

17. $(9\pi/4)(2 - \sqrt{3})$



19. $\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$
21. $312{,}500\pi/7$ **23.** $1688\pi/15$ **25.** $\pi/8$
27. $(\sqrt{3} - 1)\pi a^3/3$ **29.** (a) 10π (b) $(0, 0, 2.1)$
31. (a) $\left(0, 0, \frac{7}{12}\right)$ (b) $11K\pi/960$
33. (a) $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$ (b) $4K\pi a^5/15$ (K es la densidad)
35. $\frac{1}{3}\pi(2 - \sqrt{2}),\ (0, 0, 3/[8(2 - \sqrt{2})])$
37. (a) $\pi K a^4 h/2$ (K es la densidad) (b) $\pi K a^2 h(3a^2 + 4h^2)/12$
39. $5\pi/6$ **41.** $(4\sqrt{2} - 5)/15$ **43.** $4096\pi/21$
45. **47.** $136\pi/99$

51. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{45}$
53. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ **55.** $-\ln 2$ **57.** 0

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 1065

1. 30 **3.** $\frac{1}{2}$ sen 1 **7.** (b) 0.90
13. $abc\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}}\right)$

EJERCICIOS 15.9 ■ PÁGINA 1060

1. -6 **3.** s **5.** $2uvw$
7. El paralelogramo con vértices (0, 0), (6, 3), (12, 1), (6, −2)
9. La región acotada por la recta $y = 1$, el eje y y $y = \sqrt{x}$
11. $x = \frac{1}{3}(v - u)$, $y = \frac{1}{3}(u + 2v)$ es una posible transformación, donde $S = \{(u, v) \mid -1 \leqslant u \leqslant 1, 1 \leqslant v \leqslant 3\}$
13. $x = u\cos v$, $y = u\,\text{sen}\,v$ es una posible transformación, donde $S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant u \leqslant \sqrt{2}, 0 \leqslant v \leqslant \pi/2\}$
15. -3 **17.** 6π **19.** $2\ln 3$
21. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$ (b) $1.083 \times 10^{12}\ \text{km}^3$ (c) $\frac{4}{15}\pi(a^2 + b^2)abck$
23. $\frac{8}{5}\ln 8$ **25.** $\frac{3}{2}$ sen 1 **27.** $e - e^{-1}$

REPASO DEL CAPÍTULO 15 ■ PÁGINA 1061

Examen verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Verdadero
9. Falso

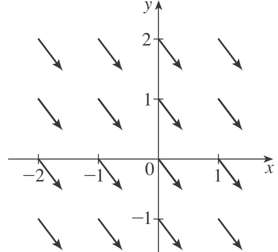
Ejercicios

1. ≈ 64.0 **3.** $\frac{13}{3}$ **5.** 2 **7.** $\frac{2}{3}$
9. $\int_0^{\pi}\int_2^4 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$
11. $(\sqrt{3}, 3, 2)$, $(4, \pi/3, \pi/3)$
13. $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$, $(4, \pi/4, 4\sqrt{3})$
15. (a) $r^2 + z^2 = 4$, $\rho = 2$ (b) $r = 2$, $\rho\,\text{sen}\,\phi = 2$
17. La región dentro del lazo de la rosa de cuatro pétalos $r = \text{sen}\,2\theta$ en el primer cuadrante
19. $\frac{1}{2}$ sen 1 **21.** $\frac{1}{2}e^6 - \frac{7}{2}$ **23.** $\frac{1}{4}\ln 2$ **25.** 8
27. $81\pi/5$ **29.** $\frac{81}{2}$ **31.** $\pi/96$ **33.** $\frac{64}{15}$
35. 176 **37.** $\frac{2}{3}$ **39.** $2ma^3/9$
41. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{15}\right)$
(c) $I_x = \frac{1}{12}$, $I_y = \frac{1}{24}$; $\bar{\bar{y}} = 1/\sqrt{3}$, $\bar{\bar{x}} = 1/\sqrt{6}$
43. (a) $(0, 0, h/4)$ (b) $\pi a^5 h/15$
45. $\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}/3$ **47.** $\frac{486}{5}$ **49.** 0.0512

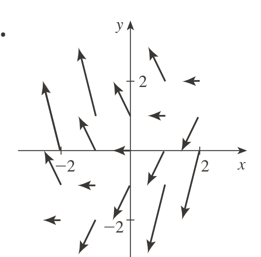
CAPÍTULO 16

EJERCICIOS 16.1 ■ PÁGINA 1073

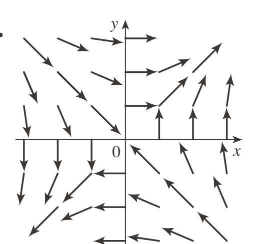
1.



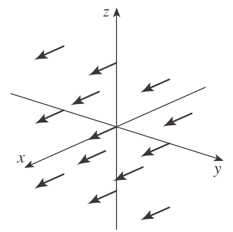
3.



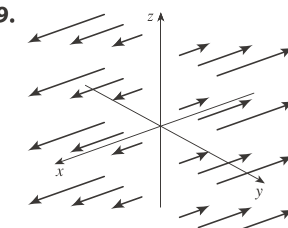
5.



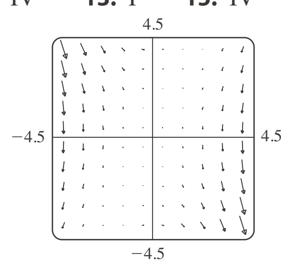
7.



9.



11. IV **13.** I **15.** IV **17.** III
19.

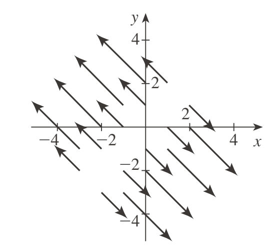


La recta $y = 2x$

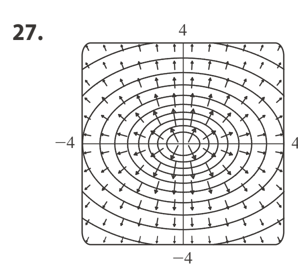
21. $\nabla f(x, y) = 3\sec^2(3x - 4y)\,\mathbf{i} - 4\sec^2(3x - 4y)\,\mathbf{j}$

23. $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j}$



27.



29. III **31.** II **33.** (2.04, 1.03)

35. (a) (b) $y = 1/x,\ x > 0$

$y = C/x$

EJERCICIOS 16.2 ■ PÁGINA 1084

1. $\frac{4}{3}(10^{3/2} - 1)$ **3.** 1638.4 **5.** $\frac{1}{3}\pi^6 + 2\pi$ **7.** $\frac{5}{2}$

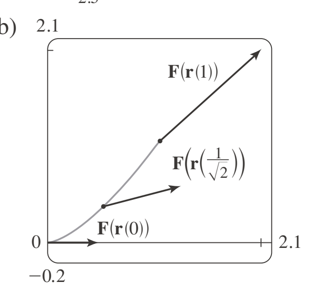
9. $\sqrt{2}/3$ **11.** $\frac{1}{12}\sqrt{14}(e^6 - 1)$ **13.** $\frac{2}{5}(e - 1)$ **15.** $\frac{35}{3}$

17. (a) Positivo (b) Negativo **19.** $\frac{1}{20}$

21. $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ **23.** 0.5424 **25.** 94.8231

27. $3\pi + \frac{2}{3}$

29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$ (b)



31. $\frac{172\,704}{5\,632\,705}\sqrt{2}(1 - e^{-14\pi})$ **33.** $2\pi k$, $(4/\pi, 0)$

35. (a) $\bar{x} = (1/m)\int_C x\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{y} = (1/m)\int_C y\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{z} = (1/m)\int_C z\rho(x, y, z)\,ds$, donde $m = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$
(b) $(0, 0, 3\pi)$

37. $I_x = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\right)$, $I_y = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)$ **39.** $2\pi^2$ **41.** $\frac{7}{3}$

43. (a) $2ma\,\mathbf{i} + 6mbt\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$ (b) $2ma^2 + \frac{9}{2}mb^2$

45. $\approx 1.67 \times 10^4$ pies-lb **47.** (b) Sí **51.** ≈ 22 J

EJERCICIOS 16.3 ■ PÁGINA 1094

1. 40 **3.** No conservativo

5. $f(x, y) = ye^{xy} + K$ **7.** $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$

9. $f(x, y) = y^2 \operatorname{sen} x + x\cos y + K$

11. (b) 16 **13.** (a) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^3$ (b) -9

15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a) $f(x, y, z) = ye^{xz}$ (b) 4 **19.** 2

21. No importa qué curva se elija.

23. $\frac{31}{4}$ **25.** No **27.** Conservativo

31. (a) Sí (b) Sí (c) Sí

33. (a) No (b) Sí (c) Sí

EJERCICIOS 16.4 ■ PÁGINA 1101

1. 120 **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** $4(e^3 - 1)$ **7.** $\frac{1}{3}$

9. -24π **11.** $-\frac{16}{3}$ **13.** 4π

15. $\frac{1}{15}\pi^4 - \frac{4144}{1125}\pi^2 + \frac{7\,578\,368}{253\,125} \approx 0.0779$

17. $-\frac{1}{12}$ **19.** 3π **21.** (c) $\frac{9}{2}$

23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ si la región es la porción del disco $x^2 + y^2 = a^2$ en el primer cuadrante

27. 0

EJERCICIOS 16.5 ■ PÁGINA 1109

1. (a) $\mathbf{0}$ (b) $y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2$

3. (a) $-x^2\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz

5. (a) $-\dfrac{\sqrt{z}}{(1 + y)^2}\,\mathbf{i} - \dfrac{\sqrt{x}}{(1 + z)^2}\,\mathbf{j} - \dfrac{\sqrt{y}}{(1 + x)^2}\,\mathbf{k}$

(b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + z)} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}(1 + x)} + \dfrac{1}{2\sqrt{z}(1 + y)}$

7. (a) $\mathbf{0}$ (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

9. (a) Negativo (b) rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

11. (a) Cero (b) rot **F** apunta en la dirección negativa de z.

13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ **15.** No conservativo

17. $f(x, y, z) = xe^{yz} + K$ **19.** No

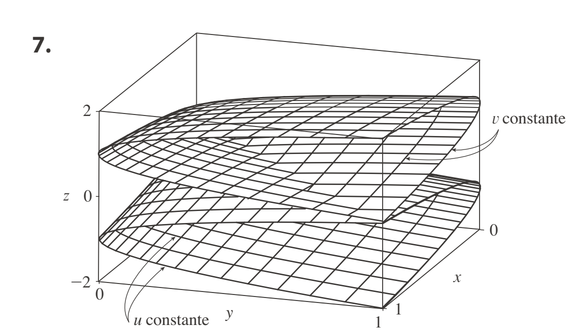
EJERCICIOS 16.6 ■ PÁGINA 1120

1. P: sí; Q: no

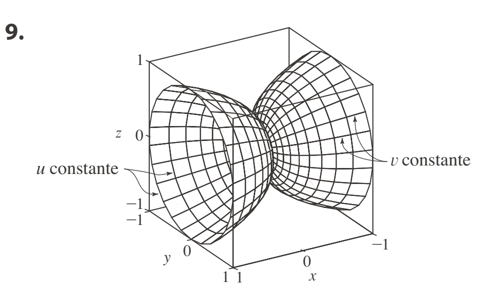
3. El plano que pasa por (0, 3, 1) que contiene los vectores $\langle 1, 0, 4\rangle$, $\langle 1, -1, 5\rangle$

5. El cono circular con eje en el eje z

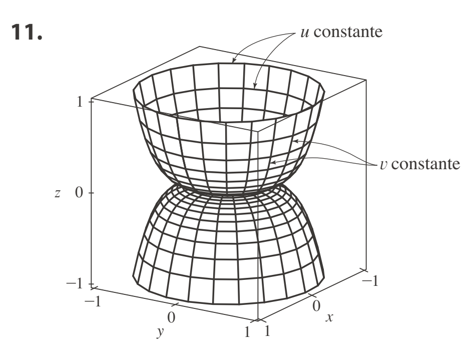
7.



9.



11.



13. IV **15.** I **17.** III

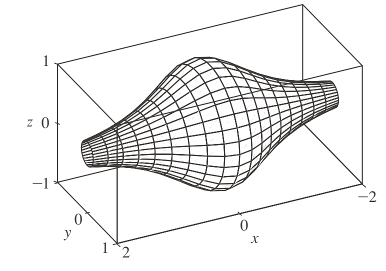
19. $x = u, y = v - u, z = -v$

21. $x = x, y = 4 \cos \theta, z = 4 \operatorname{sen} \theta, 0 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

23. $x = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta, y = 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,$
$z = 2 \cos \phi, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
$\left[\text{o } x = x, y = y, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leqslant 2\right]$

25. $x = 6 \operatorname{sen} \phi \cos \theta, y = 6 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, z = 6 \cos \phi,$
$\pi/6 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

29. $x = x, y = \dfrac{1}{1 + x^2} \cos \theta, y = \dfrac{1}{1 + x^2} \operatorname{sen} \theta,$
$-2 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$



31. (a) La dirección se invierte (b) El número de espirales se duplica

33. $3x - y + 3z = 3$ **35.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + z = \dfrac{\pi}{3}$

37. $-x + 2z = 1$ **39.** $3\sqrt{14}$ **41.** $\sqrt{14}\pi$

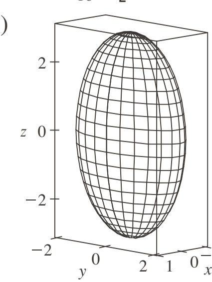
43. $\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{17}{4}\left[\ln\left(2 + \sqrt{21}\right) - \ln\sqrt{17}\right]$ **45.** $(2\pi/3)\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

47. $(\pi/6)(65^{3/2} - 1)$ **49.** 4 **51.** $\pi R^2 \leqslant A(S) \leqslant \sqrt{3}\,\pi R^2$

53. 3.5618 **55.** (a) ≈ 24.2055 (b) 24.2476

57. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln\left[\left(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70}\right)/\left(3\sqrt{5} + \sqrt{70}\right)\right]$

59. (b)



(c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{36 \operatorname{sen}^4 u \cos^2 v + 9 \operatorname{sen}^4 u \operatorname{sen}^2 v + 4 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 u}\; du\, dv$

61. 4π **63.** $2a^2(\pi - 2)$

EJERCICIOS 16.7 ■ PÁGINA 1132

1. ≈ -6.93 **3.** 900π **5.** $11\sqrt{14}$ **7.** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

9. $171\sqrt{14}$ **11.** $364\sqrt{2}\,\pi/3$ **13.** $(\pi/120)\left(25\sqrt{5} + 1\right)$

15. $\frac{7}{4}\sqrt{21} - \frac{17}{12}\sqrt{17}$ **17.** 16π **19.** $(\pi/60)\left(391\sqrt{17} + 1\right)$

21. 4 **23.** $\frac{713}{180}$ **25.** $\frac{8}{3}\pi$ **27.** 0 **29.** $-\frac{4}{3}\pi$

31. $2\pi + \frac{8}{3}$ **33.** 4.5822 **35.** 3.4895

37. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[P(\partial h/\partial x) - Q + R(\partial h/\partial z)\right] dA$, donde D = proyección de S en el plano xz

39. $(0, 0, a/2)$

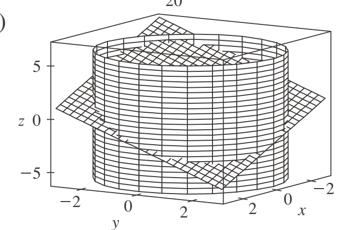
41. (a) $I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dS$ (b) $4329\sqrt{2}\,\pi/5$

43. 0 kg/s **45.** $\frac{8}{3}\pi a^3 \varepsilon_0$ **47.** 1248π

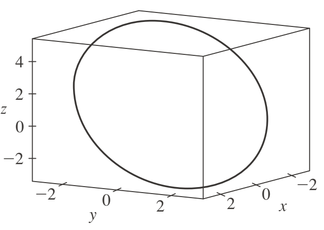
EJERCICIOS 16.8 ■ PÁGINA 1139

3. 16π **5.** 0 **7.** -1 **9.** $-\frac{17}{20}$

11. (a) $81\pi/2$ (b)



(c) $x = 3 \cos t, y = 3 \operatorname{sen} t,$
$z = 1 - 3(\cos t + \operatorname{sen} t),$
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$



13. -32π **15.** $-\pi$ **17.** 3

EJERCICIOS 16.9 ■ PÁGINA 1145

1. $\frac{9}{2}$ **3.** $256\pi/3$ **5.** $\frac{9}{2}$ **7.** $9\pi/2$ **9.** 0

11. π **13.** 2π **15.** $341\sqrt{2}/60 + \frac{81}{20}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{3}/3\right)$

17. $13\pi/20$ **19.** Negativo en P_1, positivo en P_2

21. div $\mathbf{F} > 0$ en cuadrantes I, II; dic $\mathbf{F} < 0$ en cuadrantes III, IV

REPASO DEL CAPÍTULO 16 ■ PÁGINA 1148

Examen verdadero-falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Verdadero **13.** Falso

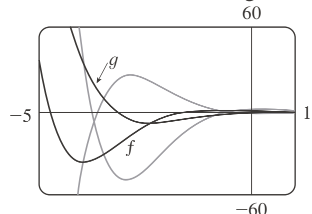
Ejercicios

1. (a) Negativo (b) Positivo **3.** $6\sqrt{10}$ **5.** $\frac{4}{15}$ **7.** $\frac{110}{3}$
9. $\frac{11}{12} - 4/e$ **11.** $f(x, y) = e^y + xe^{xy} + K$ **13.** 0
15. 0 **17.** -8π **25.** $\frac{1}{6}(27 - 5\sqrt{5})$
27. $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$ **29.** $-64\pi/3$ **31.** 0
33. $-\frac{1}{2}$ **35.** 4π **37.** -4 **39.** 21

CAPÍTULO 17

EJERCICIOS 17.1 ■ PÁGINA 1160

1. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ **3.** $y = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$
5. $y = c_1e^{-x/2} + c_2xe^{-x/2}$ **7.** $y = c_1 + c_2e^{4x/3}$
9. $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$
11. $y = c_1e^{(\sqrt{3}-1)t/2} + c_2e^{-(\sqrt{3}+1)t/2}$
13. $V = e^{-2t/3}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}t\right)\right]$
15. $f(x) = e^{-x} \cos x$, $g(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$. Todas las curvas de solución se aproximan a 0 cuando $x \to \infty$ y oscilan con amplitudes que se vuelven arbitrariamente grandes cuando $x \to -\infty$.



17. $y = \cos(\sqrt{3}x) + \sqrt{3} \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$ **19.** $y = e^{-2x/3} + \frac{2}{3}xe^{-2x/3}$
21. $y = 2e^{-3x/2} + e^{-x}$
23. $y = \frac{1}{7}e^{4x-4} - \frac{1}{7}e^{3-3x}$ **25.** $y = -3 \cos 4x + 2 \operatorname{sen} 4x$
27. $y = 5 \cos 2x + 3 \operatorname{sen} 2x$ **29.** $y = \dfrac{e-2}{e-1} + \dfrac{e^x}{e-1}$
31. Ninguna solución
33. (b) $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, n un entero positivo; $y = C \operatorname{sen}(n\pi x/L)$
35. (a) $b - a \neq n\pi$, n cualquier entero
(b) $b - a = n\pi$ y $\dfrac{c}{d} \neq e^{a-b}\dfrac{\cos a}{\cos b}$ a menos que $\cos b = 0$, entonces $\dfrac{c}{d} \neq e^{a-b}\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}$
(c) $b - a = n\pi$ y $\dfrac{c}{d} = e^{a-b}\dfrac{\cos a}{\cos b}$ a menos que $\cos b = 0$, entonces $\dfrac{c}{d} = e^{a-b}\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}$

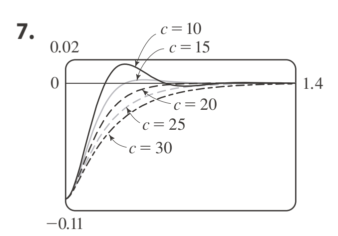
EJERCICIOS 17.2 ■ PÁGINA 1167

1. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}$
3. $y = c_1 \cos(\frac{1}{3}x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{3}x) + \frac{1}{37}e^{2x}$
5. $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{10}e^{-x}$
7. $y = e^x(\frac{9}{10} \cos 2x - \frac{1}{20} \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} x$
9. $y = e^x(\frac{1}{2}x^2 - x + 2)$
11. Las soluciones son todas asintóticas para $y_p = \frac{1}{10} \cos x + \frac{3}{10} \operatorname{sen} x$ cuando $x \to \infty$. Excepto para y_p, todas las soluciones se aproximan a ∞ o $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

13. $y_p = Ae^{2x} + (Bx^2 + Cx + D) \cos x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} x$
15. $y_p = Axe^x + B \cos x + C \operatorname{sen} x$
17. $y_p = xe^{-x}[(Ax^2 + Bx + C) \cos 3x + (Dx^2 + Ex + F) \operatorname{sen} 3x]$
19. $y = c_1 \cos(\frac{1}{2}x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x) - \frac{1}{3} \cos x$
21. $y = c_1e^x + c_2xe^x + e^{2x}$
23. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \tan x) - 1$
25. $y = [c_1 + \ln(1 + e^{-x})]e^x + [c_2 - e^{-x} + \ln(1 + e^{-x})]e^{2x}$
27. $y = e^x\left[c_1 + c_2x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + x \tan^{-1}x\right]$

EJERCICIOS 17.3 ■ PÁGINA 1175

1. $x = 0.35 \cos(2\sqrt{5}\, t)$ **3.** $x = -\frac{1}{5}e^{-6t} + \frac{6}{5}e^{-t}$ **5.** $\frac{49}{12}$ kg
7.



13. $Q(t) = (-e^{-10t}/250)(6 \cos 20t + 3 \operatorname{sen} 20t) + \frac{3}{125}$,
$I(t) = \frac{3}{5}e^{-10t} \operatorname{sen} 20t$
15. $Q(t) = e^{-10t}\left[\frac{3}{250} \cos 20t - \frac{3}{500} \operatorname{sen} 20t\right] - \frac{3}{250} \cos 10t + \frac{3}{125} \operatorname{sen} 10t$

EJERCICIOS 17.4 ■ PÁGINA 1180

1. $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = c_0e^x$ **3.** $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{3^n n!} = c_0e^{x^3/3}$
5. $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-2)^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
7. $c_0 + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = c_0 - c_1 \ln(1 - x)$ para $|x| < 1$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$
11. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^2 5^2 \cdot \cdots \cdot (3n-1)^2}{(3n+1)!}x^{3n+1}$

REPASO DEL CAPÍTULO 17 ■ PÁGINA 1181

Examen verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero

Ejercicios

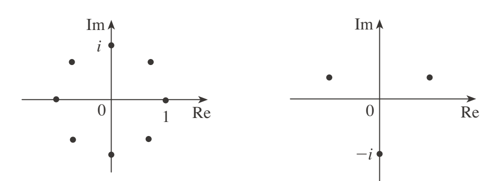
1. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/2}$
3. $y = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$
5. $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 1)$
7. $y = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2}(x + 1) \operatorname{sen} x$

9. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}xe^{-2x}$
11. $y = 5 - 2e^{-6(x-1)}$ **13.** $y = (e^{4x} - e^{x})/3$
15. Ninguna solución **17.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
19. $Q(t) = -0.02e^{-10t}(\cos 10t + \operatorname{sen} 10t) + 0.03$
21. (c) $2\pi/k \approx 85$ min (d) $\approx 28\,400$ km/h

APÉNDICES

EJERCICIOS G ■ PÁGINA A12

1. $8 - 4i$ **3.** $13 + 18i$ **5.** $12 - 7i$ **7.** $\frac{11}{13} + \frac{10}{13}i$
9. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **11.** $-i$ **13.** $5i$ **15.** $12 + 5i, 13$
17. $4i, 4$ **19.** $\pm\frac{3}{2}i$ **21.** $-1 \pm 2i$
23. $-\frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{7}/2\right)i$ **25.** $3\sqrt{2}\,[\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)]$
27. $5\left\{\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right] + i \operatorname{sen}\left[\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right]\right\}$
29. $4[\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)]$, $\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)$, $\frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)]$
31. $4\sqrt{2}\,[\cos(7\pi/12) + i \operatorname{sen}(7\pi/12)]$, $\left(2\sqrt{2}\right)[\cos(13\pi/12) + i \operatorname{sen}(13\pi/12)]$, $\frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi/6)]$
33. -1024 **35.** $-512\sqrt{3} + 512i$
37. $\pm 1, \pm i, \left(1/\sqrt{2}\right)(\pm 1 \pm i)$ **39.** $\pm\left(\sqrt{3}/2\right) + \frac{1}{2}i, -i$



41. i **43.** $\frac{1}{2} + \left(\sqrt{3}/2\right)i$ **45.** $-e^2$
47. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$

Índice analítico

PR denota páginas de referencia.

abierta, región, 1089
absoluto, máximo y mínimo, 959, 960, 963, 964, 965, 966
aceleración centrípeta, 884
aceleración de una partícula, 871
  como un vector, 871, 872
  componentes de, 874
adición de vectores, 798, 801
ADN, forma helicoidal de, 850
afelio, 687
Airy, Sir George, 752
Airy, función de, 752
algebraico, vector, 800
amortiguador, 1169
Ampère, ley de, 1087
ángulo
  entre planos, 828
  entre vectores, 808, 809
ángulos de dirección, 810
apolunio, 681
aproximación,
  lineal, 929, 930, 933
  lineal, a un plano tangente, 929
  por desigualdad de Taylor, 762, 775
  por polinomios de Taylor, 774
aproximación lineal, 929, 930, 933
arco largo, curva de, 691
área
  de un sector de un círculo, 669
  de una región plana, 1099
  de una superficie, 654, 1026, 1027, 1116, 1117, 1118
  en coordenadas polares, 669
  encerrada por una curva paramétrica, 651
  de una esfera, 1117
  de una función de dos variables, 1026
  de una gráfica de una función, 1118
  de una superficie paramétrica, 654, 1116, 1117
argumento de un número complejo, A5
aritmética-geométrica, media, 706
armónica, función, 920, 1110
armónica, series, 713, 722
Arquímedes, principio, 1146
asíntota(s)
  de una hipérbola, 678
astroide, 649
Bernoulli, John, 600, 644, 760
Bessel, Friedrich, 748
Bessel, función de, 748, 752
Bézier, curvas de, 643, 657
Bézier, Pierre, 657
binomial, serie, 766
  descubierta por Newton, 773
binomiales, coeficientes, 766
binormal, vector, 866
Brahe, Tycho, 875
braquistócrona, problema de la, 644
bruja de Maria Agnesi, 647

C^1 transformación, 1053
calculadora, graficadora, 642, 665
  Véase Sistema algebraico computacional
calor, flujo de, 1131
calor, índice de, 911, 931
cambio de variables
  en una integral doble, 1012, 1052, 1056
  en una integral triple, 1042, 1047, 1058, 1059
campo
  conservativo, 1073, 1090, 1091, 1105
  de fuerzas, 1072
  de velocidad, 1068, 1071
  eléctrico, 1072
  escalar, 1069
  gradiente del, 956, 1072
  gravitacional, 1072
  incompresible, 1107
  irrotacional, 1106
  vectorial, 1068, 1069
campo de fuerzas, 1068, 1072
campo de velocidad, 1071
  corrientes marinas, 1068
  flujo de aire, 1068
  patrones de viento, 1068
campo eléctrico (fuerza por unidad de carga), 1072
campo vectorial, 1068, 1069
  conservativo, 1073, 1090, 1091, 1105
  de fuerza, 1068, 1072
  de velocidad, 1068, 1071
  divergencia de, 1106
  flujo de, 1129
  flujo eléctrico de, 1131, 1144
  funciones componentes de, 1069
  gradiente, 956, 1072
  gravitacional, 1072
  incompresible, 1107
  integral de línea de, 1082, 1083, 1084
  integral de superficie de, 1128, 1129
  irrotacional de, 1106
  rotacional de, 1103
cantidad de movimiento angular, 879
Cantor, conjunto de, 718
Cantor, Georg, 718
cardioide, 662
carga eléctrica, 1016, 1036, 1172
  en un sólido, 1036
carga eléctrica total, 1016, 1036
carrera sobre ruedas, 1052
Cassini, Giovanni, 669
catástrofe ultravioleta, 783
Cauchy-Schwarz, desigualdad de, 814
Cauchy, Augustin-Louis, 994
Cauchy, teorema del valor medio, A8
centro de masa
  de un alambre, 1077
  de un sólido, 1035
  de una lámina, 1018
  de una superficie, 1124
centroide de un sólido, 1036
cero, vector, 798
cicloide, 643
cilindro, 794, 834
  parabólico, 834
  parametrización de, 1114
circuito eléctrico, 1172
  análisis de, 1172
circulación de un campo de velocidad, 1138
círculo
  en el espacio tridimensional, 794
círculo de curvatura, 867
cisoide de Diocles, 648, 667
Clairaut, Alexis, 919
Clairaut, teorema de, 919, A3
Clarke, Arthur C., 881
Clarke, órbita geoestacionaria de, 881
Cobb-Douglas, función de producción de, 889, 890, 922, 926, 978
  curvas de nivel para, 896
  gráfica de, 891

Cobb, Charles, 889
cocleoide, 690
coeficiente(s)
  de fricción estática, 844
  de una serie de potencias, 746
coeficientes indeterminados, método de, 1161, 1165
cola de golondrina, curvas catastróficas, 648
cometas, órbitas de, 688
complejo conjugado, A6
completez, axioma de, 702
componente de b a lo largo de a, 811
componente normal de la aceleración, 874, 875
componente tangencial de la aceleración, 874
componentes de la aceleración, 874
componentes de un vector, 800
componentes, funciones, 848, 1069
  continuidad de, 909
compresión, teorema de,
  para sucesiones, 698
concoide, 645, 667
conducción de calor, ecuación, 925
conductividad (de la sustancia), 1132
conductividad térmica, 1132
cónicas desplazadas, 679
conjugados, propiedades de, A6
conjunto acotado, 965
conjunto cerrado, 965
cono, 674, 837
  parametrización de, 1114
conservación de la energía, 1093
constante de amortiguación, 1169
constante de resorte, 1168
continuidad
  de una función, 849
  de una función de dos variables, 907, 908, 910
  de una función de tres variables, 909, 910
  de una función vectorial, 849
convergencia
  absoluta, 737
  condicional, 738
  de una serie, 708
  de una sucesión, 696
  intervalo de, 749
  radio de, 749
convergente, serie, 708
  propiedades de, 713
convergente, sucesión, 696
conversión de coordenadas
  cilíndricas a rectangulares, 1040
  rectangulares a cilíndricas, 1040
  rectangulares a esféricas, 1046
coordenada *x*, 792
coordenada *y*, 792
coordenada *z*, 792
coordenadas cilíndricas, 1040
coordenadas rectangulares, sistema de, 793
coordenadas, sistema de,
  cilíndricas, 1040
  esféricas, 1045
  polares, 658
  rectangulares tridimensional, 793
coordenados, ejes, 792
coordenados, planos, 792
coplanares, vectores, 820
copo de nieve, curva, 788
Coriolis, aceleración de, 883
Cornu, espiral de, 656
cosenos directores. 810
creciente, sucesión, 700
cuadrática, aproximación, 970
cuádrica(s), superficie(s), 835
  cono, 837
  elipsoide, 835, 837
  hiperboloide, 837
  paraboloide, 836, 837
  tabla de gráficos, 837
cuaternión, 803
cuerpo negro, radiación de, 783
cuña esférica, 1047
curva(s)
  arco largo, 691
  bruja de María Agnesi, 647
  cerrada, 1089
  cisoide de Diocles, 667
  cola de golondrina, teoría catastrófica de, 648
  de contorno, 893
  cúbica alabeada, 851 (*Véase* cúbica torcida)
  cúbica torcida, 851
  de Bézier, 643, 657
  de nivel, 893, 897
  en el espacio, 849
  epicicloide, 649
  equipotenciales, 902
  espiral de Cornu, 656
  espiral toroidal, 851
  estrofoide, 673, 691
  frontera, 1134
  hélice, 849
  lisa por partes, 1076
  longitud de, 861
  orientación de, 1080, 1096
  óvalos de Cassini, 669
  paramétricas, 640, 849
  polar, 660
  reticulares, 1112
  silla de mono, 902
  silla de perro, 902
  simple, 1090
  suave, 863
  trocoide, 647
curva en el espacio, 849
  longitud de arco de, 861, 862
  parametrización de, 851
curva frontera, 965, 1001, 1096, 1134
curva paramétrica, 640, 849
  área bajo la, 651
  longitud de arco de, 652
curva simple, 1090
curvatura, 657, 864, 865, 875
curvatura de una curva plana paramétrica, 869
cúspide, 645

De Moivre, teorema de, A9
De Moivre, Abraham, A9
decreciente, sucesión, 700
densidad
  de un sólido, 1035
  de una lámina, 1016
densidad conjunta, función de, 1021, 1036
densidad de carga, 1016, 1036
densidad de probabilidad, función de, 1021
dependiente, variable, 888, 940
derivable, función, 930
derivación
  de una función vectorial, 855, 856, 858
  de una serie de potencias, 754
  fórmulas para funciones vectoriales, 858
  implícita, 917, 942
  parcial, 911, 913, 914, 917
  término a término, 754
derivada(s)
  de una función vectorial, 855, 856, 858
  de una serie de potencias, 754
  de funciones exponenciales, A11
  direccional, 946, 947, 948, 950, 951
  normal, 1110
  notación para parciales, 914
  parcial, 913, 914
  parcial de orden superior, 918
derivada(s)
  segunda, 858
  segunda direccional, 958
  segunda parcial, 918
derivada direccional, 946, 947, 948, 950, 951
  máximo valor de, 952
  segunda, 958
derivadas parciales superiores, 918
  para vectores, 814
desplazamiento, vector, 798, 811



determinante, 815
diagrama de árbol, 940
diferencia de vectores, 799
diferencial, 932, 934
diferencial total, 932
directriz, 674, 682
diseño de un contenedor, minimizar el costo de, 970
distancia, entre
  planos paralelos, 830, 833
  punto y plano, 822, 829, 830
  punto y recta en el espacio, 822
  puntos en el espacio, 795
  rectas sesgadas, 830
divergencia
  de un campo vectorial, 1106
  de una serie infinita, 708
  de una sucesión, 696
divergencia, prueba de la, 713
divergencia, teorema, 1141, 1147
divergente, serie, 708
divergente, sucesión, 696
división de serie de potencias, 770
dominio de una función, 888
Douglas, Paul, 889

e (el número)
  como una suma de una serie infinita, 763
ecuación auxiliar, 1155
  raíces complejas, 1157
  raíces reales e iguales, 1156, 1157
  raíces reales y distintas, 1156
ecuación característica, 1155
ecuación complementaria, 1161
  homogénea, 1154
  logística, 707
  no homogéneas, 1154, 1160, 1161
  parcial, 920
  segundo orden, 1154
  soluciones linealmente independientes, 1155
  problema de valor frontera, 1159
  problema de valor inicial, 1158
  soluciones de, 1154, 1159
ecuación diferencial homogénea, 1154
ecuación vectorial
  de una recta, 824
  del plano, 827
ecuación(es),
  conducción de calor, 925
  de Laplace, 920, 1107
  del plano, 827
  del plano que pasa por tres puntos, 828
  de una curva en el espacio, 849
  de una elipse, 676, 684
  de una esfera, 795
  de una hipérbola, 679, 684
  de una parábola, 675, 684
  de una recta en el espacio, 824
  de una recta que pasa por dos puntos, 825
  difusión, 926
  lineal, 827
  logística, en diferencias, 707
  paramétricas, 640, 824, 849, 1110
  polar, 660, 684
  simétrica, 825
ecuaciones simétricas de una recta, 825
efecto Doppler, 945
eje de una parábola, 674
eje mayor de la elipse, 676
eje menor de la elipse, 676
eje *x*, 792
eje *y*, 792
eje *z*, 792
ejes de coordenadas, 792
ejes de la elipse, 676
elipse, 676, 682
  directriz, 682
  ecuación polar, 684, 687
  eje mayor, 676, 687
  eje menor, 676
  excentricidad, 682
  focos, 676, 682
  propiedad de reflexión, 677
  vértices, 676
elipsoide, 835, 837
energía,
  cinética, 1093
  conservación de la, 1093
  potencial, 1093
energía cinética, 1093
epicicloide, 649
epitrocoide, 656
equipotenciales, curvas, 902
equivalentes, vectores, 798
error
  en la aproximación de Taylor, 775
error estimado
  para series alternadas, 735
escalar, 799
escalar, campo, 1069
escalar, ecuación de un plano, 827
escalar, producto, 807
escalar, proyección, 811
escalar, triple producto, 819
  caracterización geométrica de, 819
esfera
  área de la superficie de, 1117
  ecuación de, 795
  flujo a través de, 1129
  representación paramétrica de, 1113
esféricas, sistema de coordenadas, 1045
  ecuaciones de conversión para, 1046
  integrales triples en, 1047
espacio tridimensional, 792
espiral toroidal, 851
estado estacionario, solución en, 1174
estimaciones de residuo
  para la prueba integral, 723
  para las series alternantes, 735
estimar la suma de una serie, 723, 730, 735, 740
estrategia
  para integración, 503, 504
  para integrales trigonométricas, 481, 482
  para probar series, 744
estrofoide, 673, 691
etapas del cohete, determinación de masas óptimas para las, 979
Euler, Leonhard, 720, 726, 763
excedente del consumidor, 569
exponencial(es), función(es), PR5
  integración de, 768, 769
  serie de potencias para, 761
exponencial natural, función
  serie de potencias para, 760
exponenciales complejas, A11
extremo, teorema del valor, 965

Familia
  de curvas paramétricas, 644
  de epicicloides e hipocicloides, 648
Fibonacci, 695, 706
Fibonacci sucesión de, 695, 706
flujo, 1129, 1131
flujo de un fluido, 1071, 1106, 1107, 1130
flujo eléctrico, 1131, 1144
flujo, integral de, 1129
foco, 674, 682
  de una elipse, 676, 682
  de una hipérbola, 677
  de una parábola, 674
  de una sección cónica, 682
focos, 676
folium de Descartes, 691
forma polar de un número complejo, A7
forma simétrica, de la recta,
  de onda, 920
  de van der Waals, 926
  vectorial, 824, 827
fórmula de distancia,
  en tres dimensiones, 795
fracción continua, desarrollo en, 706
Frenet-Serret, fórmulas de, 870
Fubini teorema de, 994, 1030
Fubini, Guido, 994
fuente, 1145
fuerza
  centrípeta, 884



constante, 811
ejercida por un fluido,
momento de torsión, 820, 879
resultante, 803
fuerza constante (en el trabajo), 811
fuerza de amortiguación, 1169, 1171
fuerza eléctrica, 1072
función(es), 888
Airy, 752
armónica, 920, 1110
componente, 848, 1069
compuesta, 909
continua, 849
continuidad de, 849, 907, 908, 909, 910
de Bessel, 748, 752
de dos variables, 888
de *n* variables, 898
densidad conjunta, 1021, 1036
densidad de probabilidad, 1021
derivabilidad de, 930
dominio de, 888
de tres variables, 897, 909
de producción de Cobb-Douglas, 889, 890, 922, 926, 978
de varias variables, 898, 909
gradiente de, 936, 950
gráfica de, 890
homogénea, 946
límite de, 904, 909, 910
lineal, 891
longitud de arco, 863
polinomial, 908
racional, 908
representación como una serie de potencias, 752
valor promedio de, 997, 1039
valores máximos y mínimos, 959, 960
función coseno,
serie de potencias para, 766
función homogénea, 946
función implícita, teorema de la, 942, 943
función vectorial, 848
continuidad de, 849
derivada de, 855, 856, 858
funciones componentes de, 848
integración de, 859
límite de, 848, 855

Gauss, Karl Friedrich, 1141
Gauss, ley de, 1131, 1144
Gauss, óptica de, 780
Gauss, teorema de, 1141
generatriz de una superficie, 834
geoestacionaria, órbita, 881
geometría de un tetraedro, 823
geométrica, serie, 709
geométrico, vector, 800
Gibbs, Josiah Willard, 803
gradiente, 950
gradiente de campo vectoriales, 956, 1072
gradiente de *f*, 949, 951
gradiente, vector, 949, 951, 955
interpretaciones de, 955
gráfica(s)
de ecuaciones en tres dimensiones, 793
de una curva paramétrica, 640
de una función de dos variables, 890
de una sucesión, 699
de una superficie, 1124
de una superficie paramétrica, 1124
polar, 660, 665
graficador, dispositivo. *Véase* Sistema algebraico computacional
graficadora, calculadora, 642, 665
gran círculo, 1051
gravitacional, campo, 1072
Green, George, 1096, 1140
Green, identidades, 1110
Green, teorema de, 1096, 1140, 1147
formas vectoriales, 1108
para una unión de regiones simples, 1099
Gregory, James, 756, 760
Gregory, series de, 756

Hamilton, Sir William Rowan, 815
Hecht, Eugene, 779
hélice, 849
hélice doble, 850
hipérbola, 677, 682
asíntotas, 678
directriz, 682
ecuación, 678, 679, 684
ecuación polar, 684
excentricidad, 682
focos, 677, 682
propiedad de reflexión, 677
ramas, 678
vértices, 678
hiperboloide, 791, 837
hiperesfera, volumen de, 1040
hipervolumen, 1034
hipocicloide, 648
humidex, 899, 911
Huygens, Christiaan, 644

i (vector de base estándar), 802
imagen de un punto, 1053
imagen de una región, 1053
incompresible, campo de velocidad, 1107
incremento, 933
independencia de la trayectoria, 1088
independiente, variable, 888, 940
independiente, variable aleatoria, 1022
índice de masa corporal (IMC), 901, 916
inducción matemática, 703
inercia (momento de), 1019, 1020, 1036, 1086
integrable, función, 990
de una función vectorial, 859
de una serie de potencias, 754
fórmulas, PR6–10
orden inverso de, 995, 1006
parcial, 993, 995
sobre un sólido, 1042
término a término, 754
integración definida
integral de línea, 1075, 1078
con respecto a la longitud de arco, 1075, 1078, 1080
con respecto a *x* y *y*, 1078, 1081
de campos vectoriales, 1082, 1083, 1084
para una curva en el espacio, 1080
para una curva plana, 1075
teorema fundamental para, 1087
trabajo definido como, 1082
integral de superficie, 1122
de un campo vectorial, 1128, 1129
sobre una superficie paramétrica, 1122, 1123
integral definida, 988
de una función vectorial, 859
integral, prueba de la, 721
integral(es)
cambio de variables en, 1012, 1052, 1056, 1058, 1059
conversión a coordenadas cilíndricas, 1040
conversión a coordenadas esféricas, 1046
conversión a coordenadas polares, 1012
de línea (*Véase* integral de línea)
definida, 988
iterada, 993
superficie, 1122, 1129
tabla de, PR6–10
triple, 1029, 1030
integral(es) doble(s), 988, 990
aplicaciones de, 1016
cambio de variable en, 1012, 1052, 1056
en coordenadas polares, 1010, 1012
en rectángulos, 988
en regiones generales, 1001
propiedades de, 1006, 1007
regla del punto medio para, 992
intensidad de campo magnético de la Tierra, 921



intermedia, variable, 940
intersección
de gráficas polares, área de, 670
de planos, 828
de tres cilindros, 1044
intervalo de convergencia, 749
inversión del orden de integración, 995, 1006
inyectiva, transformación, 1053
irrotacional, campo vectorial, 1106
isobara, 895
isoterma, 893
iterada integral, 993

j (vector de base estándar), 802
Jacobi, Carl Gustav Jacob, 1055
jacobiano de una transformación, 1055, 1059

k (vector de base estándar), 802
Kepler, Johannes, 686, 875, 880
Kepler, leyes de, 686, 875, 876, 880
Kirchhoff, leyes de, 1172
Kondo, Shigeru, 763

Lagrange, Joseph-Louis, 972
Lagrange, multiplicador de, 971, 972
lámina, 1016, 1017
Laplace, ecuación de, 920, 1107
Laplace, operador, 1107
Laplace, Pierre, 920, 1107
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 773
ley de conservación de la cantidad de movimiento angular, 879
ley de conservación de la energía, 1094
ley de Hooke, 1168
ley de la gravitación universal, 876, 880
ley del triángulo, 798
limaçon, 665
límite(s)
de una función de dos variables, 904, 910
de una función de tres variables, 909, 910
de una función vectorial, 848
de una sucesión, 696
propiedades de, para funciones vectoriales, 855
límites, leyes de los,
para funciones de dos variables, 907
para sucesiones, 697
lineal, combinación, 1154
de un plano, 827
lineal, ecuación diferencial, 1154
lineal, función, 891
linealización, 929, 930
líneas de corriente, 1074
líneas de flujo, 1074
Lissajous, figura de, 642, 648
litotripsia, 677
local, máximo y mínimo, 959, 960
logística, ecuación de diferencias, 707
logística, sucesión, 707
de un vector, 801
de una curva en el espacio, 861
de una curva paramétrica, 652
de una curva polar, 671
longitud de arco, 861, 862
de una curva en el espacio, 861, 862
de una curva paramétrica, 652
de una curva polar, 671
longitud de arco, fórmula para una curva en el espacio, 862
longitud de arco, función, 863
LORAN, sistema, 681
LZR Racer, 887, 936

Maclaurin, Colin, 760
Maclaurin, serie de, 759, 760
tabla de, 768
magnitud de un vector, 801
mano derecha, regla de la, 792, 816
mapa de contorno, 894, 895, 921
marginal, productividad, 922
masa
de un alambre, 1077
de un sólido, 1035
de una lámina, 1016
de una superficie, 1124
masa, centro de. *Véase* centro de masa
máximo y mínimo, valores, 959, 960
media X, 1023
media Y, 1023
medio espacio, 898
membrana de caucho, vibración de, 748
método de coeficientes indeterminados, 1161, 1165
para una función de dos variables, 966
método de mínimos cuadrados, 970
método de multiplicadores de Lagrange, 971, 972
con dos restricciones, 976
método de variación de parámetros, 1165, 1166
mínima cota superior, 702
mínimos cuadrados, método de, 970
Möbius, August, 1127
Möbius, banda de, 1121, 1127
modelado
vibración de membrana, 748
para vibración de membrana, 748
Cobb-Douglas, para costos de producción, 889, 890, 922, 926, 978
módulo, A6
momento de torsión, 820, 879
momento(s)
con respecto a un eje, 1017
con respecto a un plano, 1035
de inercia, 1019, 1020, 1036, 1086
de un sólido, 1035
de una lámina, 1017, 1018
polar, 1020
segundo, 1019
monótona, sucesión, 700
movimiento armónico simple, 1168
movimiento de un proyectil, 872
movimiento de un resorte, fuerza que afecta el amortiguamiento, 1169, 1171
resonancia, 1172
restaurador, 1169, 1171
movimiento en el espacio, 870
movimiento planetario, leyes de, 686, 875, 876, 880
muestra, punto, 989
multiplicación de serie de potencias, 770
multiplicación por escalar, 799, 801
multiplicador (Lagrange), 971, 972, 975
multiplicador efecto, 717
múltiplo escalar de un vector, 799

n-ada, 802
n-dimensional, vector, 802
(∇), 949, 951, 1103
negativo de un vector, 799
Newton, ley de la gravitación de, 876, 880, 1071
Newton, segunda ley del movimiento de, 872, 876, 880, 1168
Newton, Sir Isaac, 773, 876, 880
Nicomedes, 645
no homogénea, ecuación diferencial, 1154, 1160, 1161
no paralelos, planos, 828
normal principal, vector unitario, 866
normal, derivada, 1110
a una superficie, 954
normal, vector, 827, 866
nudo de trébol, 851, 855
número
complejo, A5
número(s) complejo(s), A5
argumento de, A7
división de A5, A6
forma polar, A7
igualdad de, A5
módulo de, A6
multiplicación de, A5, A6
parte imaginaria de, A5
parte real de, A5
potencias de, A9
raíces de, A10
raíz cuadrada principal de, A6
suma y diferencia de, A5
números de dirección, 825



O (origen), 792
octante, 792
onda, ecuación de, 920
óptica
de Gauss, 780
de primer orden, 780
de tercer orden, 780
optimización de una hidroturbina, 980
órbita de un planeta, 876
orden de integración, invertida, 995, 1006
ordenada, terna, 792
Oresme, Nicole, 713
orientación de una curva, 1080, 1096
orientación de una superficie, 1127
origen, 792
ortogonales, superficies, 959
ortogonales, vectores, 809
osculador, círculo, 867
osculador, plano, 867
Ostrogradsky, Mikhail, 1141
óvalos de Cassini, 669

parábola, 674, 682
directriz, 674
ecuación, 675
ecuación polar, 684
eje, 674
foco, 674, 682
vértice, 674
parabólico, cilindro, 834
paraboloide, 836, 839
paraboloide elíptico, 836, 837
paraboloide hiperbólico, 836, 837
paralelepípedo,
volumen de, 820
paralelogramo, ley del, 798, 814
paralelos, planos, 828
paralelos, vectores, 799, 817
paramétrica, superficie, 1110
área de la superficie, 1116, 1117
gráfica de, 1124
integral de superficie sobre, 1122, 1123
plano tangente a, 1115, 1116
suave, 1116
paramétricas, ecuaciones, 640, 824, 849
de una curva en el espacio, 849
de una recta en el espacio, 824
de una superficie, 1110
de una trayectoria, 873
parametrización de una curva en el espacio, 862
con respecto a la longitud de arco, 863
suave, 863
parametrización suave, de una curva en el espacio, 863
parámetro, 640, 824, 849
parcial, derivación, 911, 913, 914, 917
parcial, ecuación diferencial, 920
para integrales dobles, 993, 995
parcial(es), derivada(s), 913, 914
como pendientes de rectas tangentes, 915
como una razón de cambio, 915
de una función de más de dos variables, 917
interpretaciones de, 915
notaciones para, 914
reglas para determinar, 914
segundas, 918
partículas, movimiento de, 870
patrones de viento en el área de la bahía de San Francisco, 1068
perihelio, 687
perilunio, 681
período de una partícula, 884
perpendiculares, vectores, 809
Planck, ley de, 783
planímetro, 1099
plano horizontal, 793
plano normal, 867
plano tangente
para una superficie de nivel, 954
para una superficie paramétrica, 1115, 1116
para una superficie, 928
plano tangente, aproximación del, 929, 930
plano(s), 826
ángulo entre, 828
coordenados, 792
ecuación del, que pasa por tres puntos, 828
ecuación escalar del, 827
ecuación lineal del, 827
ecuación vectorial de, 827
ecuación(es) del, 823, 827, 828
horizontal, 793
normal, 867
osculador, 867
paralelo, 828
recta de intersección, 829
tangente a una superficie, 928, 1115
vertical, 888
planos de corte, 833
platillo satelital, 839
polar, curva, 660
gráfica de, 660
longitud de arco de, 671
recta tangente, 663
simetría en, 663
polar, eje, 658
polar, gráfica, 660
polar, momento de inercia, 1020
polar, rectángulo, 1010
polar, sistema coordenado, 658
área en, 669
conversión de integral doble, 998, 1012
conversión ecuaciones a coordenadas cartesianas, 659, 660
sección cónica en, 682
polar(es), ecuación(es), 660
de una cónica, 684
gráfica de, 660
polinomial función,
de dos variables, 908
polinomio de Taylor de grado *n*-ésimo, 761
polinomio de Taylor de primer grado, 970
polo, 658
posición, vector de, 800
positiva, orientación
de una curva cerrada, 1096
de una curva frontera, 1134
de una superficie, 1128
potencial, energía, 1093
potencial, función, 1073
primer octante, 792
primer orden, óptica, 780
principio de superposición, 1163
probabilidad, 1021
problema de la tautócrona, 644
problema de valor frontera, 1159
problema de valor inicial, 1158
producto
cruz, 814, 815
escalar, 807
punto, 807
triple, 819
triple escalar, 819
producto cruz, 814, 815
caracterización geométrica de, 817
dirección de, 816
longitud de, 817, 818
magnitud de, 817
propiedades de, 816, 819
producto interno, 807
producto punto, 807
en forma de componentes, 807
propiedades de, 807
producto vectorial, 815
propiedades de, 816, 819
propensión marginal a consumir o ahorrar, 717
proyección, 793, 811
ortogonal, 813
proyección ortogonal de un vector, 813
proyección vectorial, 811
proyectil, trayectoria de, 648, 872
prueba de comparación para series, 727
prueba de la divergencia, 713
prueba de límite de comparación, 729
pruebas para series de convergencia y divergencia de series
prueba de la raíz, 741
prueba de la razón, 739
prueba de la serie alternante, 732



prueba integral, 721
prueba por comparación, 727
 resumen de pruebas, 744
punto estacionario, 960
punto inicial
 de un vector, 798
 de una curva paramétrica, 641
 para puntos en el espacio, 979
punto medio, regla de,
 para integrales dobles, 992
 para integrales triples, 1038
punto terminal de un vector, 798
punto terminal de una curva paramétrica, 641
punto(s) críticos, 960, 970
punto(s) en el espacio
 coordenadas de, 792
 distancia entre, 794, 795
 proyección de, 793

racional, función, 908
radiación de las estrellas, 783
radio de convergencia, 749
radio de giro de una lámina, 1020
raíces de un número complejo, A10
raíz cuadrada principal de un número complejo, A6
raíz, prueba de, 741
ramas de una hipérbola, 678
rango de una función, 888
rapidez angular, 872
Rayleigh-Jeans, ley de, 783
razón común, 709
razón, prueba de la, 739
reactor nuclear, torres de enfriamiento de, 839
recta(s) en el espacio
 ecuación vectorial de, 823, 824
 ecuaciones paramétricas de, 824
 ecuaciones simétricas de, 825
 normal, 954
 sesgada, 826
 tangente, 856
recta(s) tangente(s),
 para una curva en el espacio, 856
 para una curva paramétrica, 649, 650
 para una curva polar, 663
rectificante, plano, 869
reflexión, propiedad
 de una elipse, 677
 de una hipérbola, 682
región
 abierta, 1089
 conectada, 1089
 plana simple, 1097
 plana, de tipo I o II, 1002, 1003
 simplemente conectada, 1090
 sólida (de tipo 1, 2, o 3), 1031, 1032
 sólida simple, 1141
región conectada, 1089
región plana de tipo I, 1002
región plana de tipo II, 1002
región plana tipo I o tipo II, 1002, 1003
región polar, área de, 669
región sólida simple, 1141
región sólida tipo 1, 2, o 3, 1031, 1032
regla de la cadena,
 para varias variables, 937, 938, 939, 940
reglada, superficie, 841
relación de recurrencia, 1177
reordenamiento de una serie, 742
representación de líneas ocultas, 834
representación(es) de una función,
 como una serie de potencias, 752
residuo de la serie de Taylor, 761
resonancia, 1172
restauradora, fuerza, 1169, 1171
restricción, 971, 976
resultante, fuerza, 803
reticulares, curvas, 1112
Roberval, Gilles de, 651
rosa de cuatro hojas, 662
rotacional de un campo vectorial, 1103

SAC. *Véase* Sistema algebraico computacional
secante, vector, 856
sección cónica, 674, 682
 desplazada, 679
 directriz, 674, 682
 ecuación polar, 684
 excentricidad, 682
 foco, 674, 676, 682
 vértice(s), 674
sección transversal de una superficie, 834
sector de un círculo, área de, 669
segmento de recta dirigido, 798
 de una función vectorial, 858
segunda derivada direccional, 958
segunda derivada parcial, 918
segundas derivadas, prueba de las, 961
segundo grado, polinomio de Taylor de, 971
segundo momento de inercia, 1019
seno, función
 serie de potencias para, 764
serie absolutamente convergente, 737, 742
serie, 707
 absolutamente convergente, 737
 alternante, 732
 armónica, 713, 722
 armónica alternante, 734, 737, 738
 binomial, 766
 coeficientes de, 746
 condicionalmente convergente, 738
 convergente, 708
 de Taylor, 759, 760
 divergente, 708
 estrategia para probar, 744
 geométrica, 709
 Gregory, 756
 infinita, 707
 Maclaurin, 759, 760
 p, 722
 potencia, 746
 reordenamiento de, 742
 suma de, 708
 suma parcial de, 708
 término de, 707
 trigonométrica, 746
serie alternante, prueba de la, 732
serie armónica, alternante, 734
serie condicionalmente convergente, 738
serie de potencias, 746, 747
 coeficientes de, 746
 derivación de, 754
 división de, 770
 integración de, 754
 intervalo de convergencia, 749
 multiplicación de, 770
 para coseno y seno, 764
 para la función exponencial, 763
 radio de convergencia, 749
 representaciones de funciones como, 752
serie solución de una ecuación diferencial, 1176
series alternantes, 732
series armónicas alternantes 734, 737
series-*p*, 722
sesgadas, rectas, 826
Shannon, índice de, 969
Sierpinski, alfombra de, 718
silla de mono, 902
silla de perro, 902
silla, punto, 961
simetría
 en gráficas polares, 663
simple, región plana, 1097
simplemente conectada, región, 1090
Simpson, Thomas, 520, 985
Sistema algebraico computacional, 642
 para integrar, 511, 756
 para trazar la gráfica de sucesiones, 699
Sistema algebraico computacional, trazar gráficas con
 campo vectorial, 1070, 1071
 curva en el espacio, 851
 curva polar, 665
 curvas de nivel, 897
 derivadas parciales, 919
 ecuaciones paramétricas, 642
 función de dos variables, 892



sucesión, 699
superficies paramétricas, 1114
sistema de coordenadas cilíndricas, 1040
ecuaciones de conversión para, 1040
integrales triples en, 1042
sobreamortiguada, vibración, 1170
sólida, región, 1031, 1141
sólido, ángulo, 1151
sólido, volumen de un, 990, 1031
soluciones linealmente independientes, 1155
Stokes, Sir George, 1135, 1140
Stokes, teorema de, 1134, 1140, 1147
suave por partes, curva, 1076
suave, curva, 863
suave, superficie, 1116
sucesión, 694
acotada, 701
convergente, 696
creciente, 700
de Fibonacci, 695
de sumas parciales, 708
decreciente, 700
divergente, 696
gráfica de, 699
límite de, 696
logística, 707
monótona, 700
término de una, 694
sucesión acotada, 701
sucesión monotóna, teorema de la, 702
suma
de una serie geométrica, 710
de una serie infinita, 708
de vectores, 798, 801
telescópica, 712
suma de Riemann(s),
doble, 991
triple, 1029
suma parcial de una serie, 708
sumidero, 1145
superficie(s)
cerrada, 1128
cuádrica, 835
gráfica de, 1124
nivel, 898
orientación positiva de, 1128
orientada, 1127
ortogonal, 959
paramétrica, 1111
suave, 1116
superficie de nivel, 898
plano tangente a la, 954
superficie de revolución,
representación paramétrica de, 1115

T y T^{-1} transformaciones, 1053
tabla de derivadas
fórmulas, PR5
tablas de integrales, PR 6–10
Taylor, Brook, 760
Taylor, desigualdad de, 762
Taylor, polinomio de, 761, 970
aplicaciones de, 774
Taylor, serie de, 759, 760
telescópica, suma, 712
temperatura-humedad, índice, 899, 911
teorema de estimación para series
alternantes, 735
teorema del valor medio,
para integrales dobles, 1063
teorema fundamental del cálculo,
para funciones vectoriales, 859
para integrales de línea, 1087, 1147
versiones para dimensiones
más altas, 1147
tercer orden, óptica de, 780
término a término, derivación
e integración, 754
término de una serie, 707
término de una sucesión, 694
tetraedro, 823
Thomson, William (Lord Kelvin), 1097,
1135, 1140
TNB estructura, 866
torcida, cúbica, 851
toro, 1122
torre de enfriamiento, hiperbólica, 839
Torricelli, Evangelista, 651
torsión de una curva en el espacio, 870
trabajo (fuerza), 811
trabajo definido como una integral
de línea, 1082
transformación
inversa, 1053
inyectiva, 1053
jacobiano de, 1055, 1059
transformación inversa, 1053
trayectoria, 1088
trayectoria, ecuaciones paramétricas para,
873
trazo de una superficie, 834
trazo del dominio, 888
tridimensionales, sistemas de coordenadas,
792
trigonométricas, series, 746
triple producto, 819
triple producto vectorial, 820
triple suma de Riemann, 1029
triples, integral(es), 1029, 1030
aplicaciones de, 1034
cambio de variables en, 1058
en coordenadas cilíndricas, 1040, 1042
en coordenadas esféricas, 1045, 1047
regla del punto medio para, 1038
sobre una región acotada general, 1031
trocoide, 647

uniforme, movimiento circular, 884

valor absoluto, A6
valor promedio de una función, 997, 1039
valores esperados, 1023
van der Waals, ecuación de, 926
variable(s)
aleatoria independiente, 1022
dependiente, 888, 940
independiente, 888, 940
intermedia, 940
variable aleatoria normalmente distribuida,
función de densidad de probabilidad
de una, 1024
variables, cambio de. *Véase*
cambio de variable(s)
variación de parámetros, método
de, 1165, 1166
vector(es), 798
aceleración, 871
adición de, 798, 801
algebraicos, 800
ángulo entre, 808, 809
base, 802
base estándar, 802
bidimensional, 800
binormal, 866
cero, 798
componentes de, 800
coplanares, 820
de posición, 800
desplazamiento, 798, 811
diferencia de, 799
fuerza, 1071
gradiente, 949, 951, 955
i, **j**, y **k**, 802
igualdad de, 798
longitud de, 801
magnitud de, 801
multiplicación por escalar, 799, 801
múltiplo escalar de, 799, 801
n-dimensiones, 802
normal, 827, 866
ortogonal, 809
paralelo, 799, 817
perpendicular, 809
producto cruz de, 814, 815
producto punto, 807
propiedades de, 802
proyección ortogonal de, 813
representación de, 800
representación geométrica de, 800
resta de, 799, 801
secante, 856
tangente, 856
tangente unitario, 856
tridimensional, 800
triple producto de, 820



unitario, 803
unitario normal, 866
velocidad, 870
vectores de base estándar, 802
propiedades de, 819
velocidad,
de una partícula, 870
vértices
de una elipse, 676
de una hipérbola, 678
vértice de una parábola, 674
vibracion(es), 1168, 1169, 1171
vibración amortiguada, 1169
vibración críticamente amortiguada, 1170
vibración de un resorte, 1168
vibración de una membrana de caucho, 748
vibración subamortiguada, 1170
vibraciones forzadas, 1171
viento-frío, índice de, 889
volumen
de un sólido, 990
de una hiperesfera, 1040
por coordenadas polares, 1012
por integrales dobles, 988
por integrales triples, 1034

Wren, Sir Christopher, 654

Corte aquí y guarde para consulta

REGLAS DE LA DERIVACIÓN

Fórmulas generales

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Regla del producto)

6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Regla del cociente)

7. $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regla de la cadena)

8. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (Regla de la potencia)

Funciones exponenciales y logarítmicas

9. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\dfrac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$

11. $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$

12. $\dfrac{d}{dx}(\log_b x) = \dfrac{1}{x \ln b}$

Funciones trigonométricas

13. $\dfrac{d}{dx}(\text{sen}\, x) = \cos x$

14. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen}\, x$

15. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

16. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

17. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

18. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

Funciones trigonométricas inversas

19. $\dfrac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Funciones hiperbólicas

25. $\dfrac{d}{dx}(\text{senh}\, x) = \cosh x$

26. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \text{senh}\, x$

27. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \text{sech}^2 x$

28. $\dfrac{d}{dx}(\text{csch}\, x) = -\text{csch}\, x \coth x$

29. $\dfrac{d}{dx}(\text{sech}\, x) = -\text{sech}\, x \tanh x$

30. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\text{csch}^2 x$

Funciones hiperbólicas inversas

31. $\dfrac{d}{dx}(\text{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

32. $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

33. $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

34. $\dfrac{d}{dx}(\text{csch}^{-1}x) - -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

35. $\dfrac{d}{dx}(\text{sech}^{-1}x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

36. $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

TABLA DE INTEGRALES

Formas básicas

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int b^u\,du = \dfrac{b^u}{\ln b} + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C, \quad a > 0$

17. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

18. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas que involucran $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

22. $\int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \dfrac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

23. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 + u^2} - a\ln\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$

24. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2}\,du = -\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

25. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

26. $\int \dfrac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

27. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$

28. $\int \dfrac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$

29. $\int \dfrac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \dfrac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$

Corte aquí y guarde para consulta

TABLA DE INTEGRALES

Formas que involucran $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

30. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

37. $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Formas que involucran $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

(continúa)

TABLA DE INTEGRALES

Formas que involucran $a + bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}\left(a + bu - a\ln|a+bu|\right) + C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

54. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a+bu} + C$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a+bu} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{si } a > 0$

$\displaystyle\qquad = \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \qquad \text{si } a < 0$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$

61. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

Corte aquí y guarde para consulta

TABLA DE INTEGRALES

Formas trigonométricas

63. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$

66. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$

67. $\int \operatorname{sen}^3 u\, du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\int \cos^3 u\, du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\int \tan^3 u\, du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\int \cot^3 u\, du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72. $\int \csc^3 u\, du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

74. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

75. $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$

76. $\int \cot^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$

77. $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$

78. $\int \csc^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$

79. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\, du$

85. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\, du$

86. $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\, du$

$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\, du$

Formas trigonométricas inversas

87. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\int \cos^{-1} u\, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\int \tan^{-1} u\, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\int u \cos^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\int u \tan^{-1} u\, du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

93. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

94. $\int u^n \cos^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

95. $\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$

(continúa)

TABLA DE INTEGRALES

Formas exponenciales y logarítmicas

96. $\displaystyle\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au - 1)e^{au} + C$

97. $\displaystyle\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

98. $\displaystyle\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\sin bu - b\cos bu) + C$

99. $\displaystyle\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\cos bu + b\sin bu) + C$

100. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

101. $\displaystyle\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102. $\displaystyle\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

Formas hiperbólicas

103. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

104. $\displaystyle\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

105. $\displaystyle\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$

106. $\displaystyle\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

108. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh \tfrac{1}{2}u\right| + C$

109. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

110. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

111. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

112. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Formas que involucran $\sqrt{2au - u^2}$, $a > 0$

113. $\displaystyle\int \sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

114. $\displaystyle\int u\sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

115. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

116. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

117. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

118. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

119. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u + 3a)}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

120. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$

CAPÍTULO 10 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. **(a)** ¿Qué es una curva paramétrica?

Una curva paramétrica es un conjunto de puntos de la forma $(x, y) = (f(t), g(t))$, donde f y g son funciones de una variable t, el parámetro.

(b) ¿Cómo se traza una curva paramétrica?

Trazar una curva paramétrica, como trazar la gráfica de una función, es difícil de hacer en general. Se pueden trazar puntos en la curva determinando $f(t)$ y $g(t)$ para varios valores de t, ya sea a mano o con una calculadora o computadora. A veces, cuando f y g están dadas por fórmulas, se puede eliminar t de las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para obtener una ecuación cartesiana que relacione a x y y. Podría ser más fácil graficar una ecuación que trabajar con las fórmulas originales para x y y en términos de t.

2. **(a)** ¿Cómo se encuentra la pendiente de una tangente a una curva paramétrica?

Se puede determinar dy/dx como una función de t calculando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{si } dx/dt \neq 0$$

(b) ¿Cómo se determina el área debajo de una curva paramétrica?

Si la curva se traza una vez conforme a las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, el área es

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$$

[o $\int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt$ si el punto más a la izquierda es $(f(\beta), g(\beta))$ antes que $(f(\alpha), g(\alpha))$].

3. Escriba una expresión para cada uno de los elementos siguientes:

(a) La longitud de una curva paramétrica

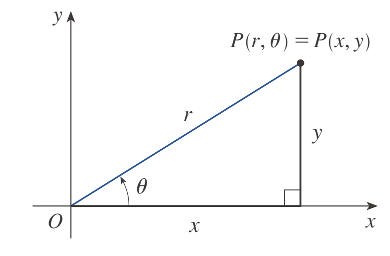
Si la curva se traza una vez conforme a las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, la longitud es

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

(b) El área de la superficie obtenida al hacer girar una curva paramétrica alrededor del eje x

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta 2\pi g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

4. **(a)** Use un diagrama para explicar el significado de las coordenadas polares (r, θ) de un punto.



(b) Escriba ecuaciones que expresen las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto en términos de las coordenadas polares.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

(c) ¿Qué ecuaciones usaría para obtener las coordenadas polares de un punto si conociera las coordenadas cartesianas?

Para determinar una representación polar (r, θ) con $r \geqslant 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, primero se calcula $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Luego se especifica θ por medio de $\tan\theta = y/x$. Hay que cerciorarse de elegir θ de tal forma que (r, θ) esté en el cuadrante correcto.

5. **(a)** ¿Cómo se determina la pendiente de una recta tangente a una curva polar?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}(y)}{\frac{d}{d\theta}(x)} = \frac{\frac{d}{d\theta}(r\,\text{sen}\,\theta)}{\frac{d}{d\theta}(r\cos\theta)}$$

$$= \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\text{sen}\,\theta + r\cos\theta}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta} \qquad \text{donde } r = f(\theta)$$

(b) ¿Cómo se calcula el área de una región acotada por una curva polar?

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

(c) ¿Cómo se determina la longitud de una curva polar?

$$L = \int_a^b \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2}\,d\theta = \int_a^b \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta = \int_a^b \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$$

6. **(a)** Dé una definición geométrica de una parábola.

Una parábola es un conjunto de puntos en un plano cuyas distancias de un punto fijo F (el foco) y una recta fija l (la directriz) son iguales.

(b) Escriba una ecuación de una parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$. ¿Qué pasa si el foco es $(p, 0)$ y la directriz es $x = -p$?

En el primer caso, una ecuación es $x^2 = 4py$, y en el segundo caso $y^2 = 4px$.

7. **(a)** Dé una definición de una elipse en términos de los focos.

Una elipse es un conjunto de puntos en un plano que satisface que la suma de las distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante.

(b) Escriba una ecuación para la elipse con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a \geqslant b > 0$ y $c^2 = a^2 - b^2$.

(continúa)

8. (a) Dé una definición de una hipérbola en términos de los focos.

Una hipérbola es un conjunto de puntos en un plano que satisfacen que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante. Esta diferencia debería interpretarse como la distancia mayor menos la distancia menor.

(b) Escriba una ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$.

(c) Escriba ecuaciones para las asíntotas de la hipérbola del inciso (b).

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

9. (a) ¿Cuál es la excentricidad de una sección cónica?

Si una sección cónica tiene foco F y directriz correspondiente l, la excentricidad e es la razón fija $|PF| / |Pl|$ para puntos P de la sección cónica.

(b) ¿Qué se puede decir acerca de la excentricidad si la sección cónica es una elipse? ¿Una hipérbola? ¿Una parábola?

$e < 1$ para una elipse; $e > 1$ para una hipérbola; $e = 1$ para una parábola.

(c) Escriba una ecuación polar para una sección cónica con excentricidad e y directriz $x = d$. ¿Qué pasa si la directriz es $x = -d$? ¿$y = d$? ¿$y = -d$?

$$\text{directriz } x = d: \quad r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

$$x = -d: \quad r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

$$y = d: \quad r = \frac{ed}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$$

$$y = -d: \quad r = \frac{ed}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$$

CAPÍTULO 11 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una sucesión convergente?

Una sucesión convergente $\{a_n\}$ es una lista ordenada de números donde $\lim_{n\to\infty} a^n$ existe.

(b) ¿Qué es una serie convergente?

Una serie $\Sigma\, a_n$ es la *suma* de una sucesión de números.

Es convergente si las sumas parciales $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ se aproximan un valor finito, es decir si $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe como un número real.

(c) ¿Qué significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?

Que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a 3 conforme n crece.

(d) ¿Qué significa $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?

Que añadiendo suficientes términos a la serie, se puede acercar a 3 las sumas parciales tanto como se quiera.

2. (a) ¿Qué es una sucesión acotada?

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada si hay números m y M tales que $m \leqslant a_n \leqslant M$ para todas las $n \geqslant 1$.

(b) ¿Qué es una sucesión monótona?

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente para todas las $n \geqslant 1$.

(c) ¿Qué puede decir con respecto a una sucesión monótona acotada?

Todas las sucesiones monótonas acotadas son convergentes.

3. (a) ¿Qué es una serie geométrica? ¿En qué circunstancias es convergente? ¿Cuál es su suma?

Una serie geométrica es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

Es convergente si $|r| < 1$ y su suma es $\dfrac{a}{1-r}$.

(b) ¿Qué es una serie p? ¿En qué circunstancias es convergente?

Una serie p es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$. Es convergente si $p > 1$.

4. Suponga que $\Sigma\, a_n = 3$ y s_n es la enésima suma parcial de la serie. ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} a_n$? ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} S_n$?

Si $\Sigma\, a_n = 3$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = 3$.

5. Enuncie lo siguiente.

(a) Prueba de la divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(b) Prueba de la integral

Suponga que f es una función continua positiva decreciente en $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$.

- Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(c) Prueba por comparación

Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos.

- Si $\Sigma\, b_n$ es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para todas las n, entonces $\Sigma\, a_n$ también es convergente.
- Si $\Sigma\, b_n$ es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para todas las n, entonces $\Sigma\, a_n$ también es divergente.

(d) Prueba por comparación del límite

Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos. Si $\lim_{n\to\infty} a_n/bn = c$, donde c es un número finito y $c > 0$, ambas series convergen o divergen.

(e) Prueba de la serie alternante

Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots$$

donde $b_n > 0$ satisface (i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todas las n y (ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces la serie es convergente.

(f) Prueba de la razón

- Si $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y por tanto convergente).
- Si $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, la prueba de la razón no es concluyente.

(g) Prueba de la raíz

- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y por tanto convergente).
- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divirgente.
- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.

6. (a) ¿Qué es una serie absolutamente convergente?

Una serie $\Sigma\, a_n$ se llama absolutamente convergente si la serie de valores absolutos $\Sigma\, |a_n|$ es convergente.

(b) ¿Qué puede decir acerca de dicha serie?

Si una serie $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, es convergente.

(c) ¿Qué es una serie condicionalmente convergente?

Una serie $\Sigma\, a_n$ se llama condicionalmente convergente si es convergente pero no absolutamente convergente.

(continúa)

7. (a) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la integral, ¿cómo se estima su suma?

La suma s se puede estimar mediante la desigualdad

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

donde s_n es la enésima suma parcial.

(b) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba por comparación, ¿cómo estima su suma?

Primero se estima el residuo de la serie de comparación. Esto da un límite superior para el residuo de la serie original (como en el ejemplo 11.4.5).

(c) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante, ¿cómo se estima su suma?

Se puede usar una suma parcial s_n de una serie alternante como una aproximación de la suma total. Está garantizado que el tamaño del error no sea mayor que $|a_{n+1}|$, el valor absoluto del primer término omitido.

8. (a) Escriba la forma general de una serie de potencias.

Una serie de potencias centrada en a es

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

(b) ¿Qué es el radio de convergencia de una serie de potencias?

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, el radio de convergencia es:

(i) 0 si la serie converge solo cuando $x = a$,

(ii) ∞ si la serie converge para todas las x, o

(iii) un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$.

(c) ¿Qué es el intervalo de convergencia de una serie de potencias?

El intervalo de convergencia de una serie de potencias es el intervalo que consta de todos los valores de x para los que la serie converge. En correspondencia con los casos del inciso (b), el intervalo de convergencia es (i) el solo punto $\{a\}$, (ii) $(-\infty, \infty)$ o (iii) un intervalo con puntos extremos $a - R$ y $a + R$ que puedan contener a ninguno, alguno o ambos puntos extremos.

9. Suponga que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia R.

(a) ¿Cómo deriva f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para f'?

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, entonces

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ con radio de convergencia R.

(b) ¿Cómo integra f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para $\int f(x)\,dx$?

$\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ con radio de convergencia R.

10. (a) Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de grado enésimo de f centrada en a.

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

(b) Escriba una expresión para la serie de Taylor de f centrada en a.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) Escriba una expresión para la serie de Maclaurin de f.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad [a = 0 \text{ en el inciso (b)}]$$

(d) ¿Cómo demuestra que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor?

Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, donde $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor de enésimo grado de f y $R_n(x)$ es el residuo de la serie de Taylor, se debe demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

(e) Enuncie la desigualdad de Taylor.

Si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x-a| \leqslant d$, el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor satisface la desigualdad

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad \text{para } |x-a| \leqslant d$$

11. Escriba la serie de Maclaurin y el intervalo de convergencia para cada una de las funciones siguientes.

(a) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad R = 1$

(b) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \quad R = \infty$

(c) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty$

(d) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty$

(e) $\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1$

(f) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}, \quad R = 1$

12. Escriba el desarrollo de la serie binomial de $(1+x)^k$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

$$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

El radio de convergencia para la serie binomial es 1.

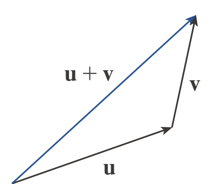
CAPÍTULO 12 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Cuál es la diferencia entre un vector y un escalar?

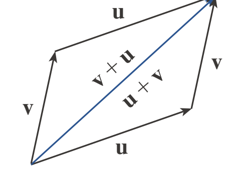
Un escalar es un número real, mientras que un vector es una cantidad que tiene tanto una magnitud con valor real como una dirección.

2. ¿Cómo se suman geométricamente dos vectores? ¿Cómo se suman algebraicamente?

Para sumar dos vectores geométricamente se puede usar la ley del triángulo o la ley del paralelogramo:



Ley del triángulo



Ley del paralelogramo

Algebraicamente, se suman los componentes correspondientes de los vectores.

3. Si **a** es un vector y c un escalar, ¿cómo se relaciona geométricamente c**a** con **a**? ¿Cómo se determina c**a** algebraicamente?

Para $c > 0$, c**a** es un vector con la misma dirección que **a** y longitud c multiplicada por la longitud de **a**. Si $c < 0$, c**a** apunta en la dirección opuesta a **a** y tiene longitud $|c|$ multiplicada por la longitud de **a**. Algebraicamente, para determinar c**a** se multiplica cada componente de **a** por c.

4. ¿Cómo se determina el vector de un punto a otro?

El vector del punto $A(x_1, y_1, z_1)$ al punto $B(x_2, y_2, z_2)$ está dado por

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

5. ¿Cómo se determina el producto punto **a** · **b** de dos vectores si se conocen sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Y si se conocieran sus componentes?

Si θ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces

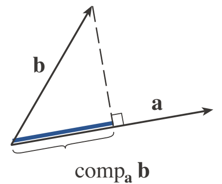
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

6. ¿Qué utilidad tienen los productos punto?

El producto punto se puede usar para determinar el ángulo entre dos vectores. En particular, se puede emplear para determinar si dos vectores son ortogonales. También se puede usar el producto punto para determinar la proyección escalar de un vector en otro. Adicionalmente, si una fuerza constante mueve un objeto, el trabajo realizado es el producto punto de los vectores de fuerza y de desplazamiento.

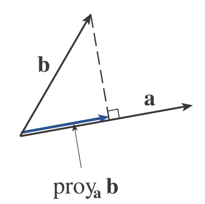
7. Escriba expresiones para las proyecciones escalar y vectorial de **b** en **a**. Ilustre con diagramas.

La proyección escalar de **b** en **a**: $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$



La proyección vectorial de **b** en **a**:

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \right) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\, \mathbf{a}$$



8. ¿Cómo se determina el producto cruz **a** × **b** de dos vectores si se conocieran sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Y si se conocieran sus componentes?

Si θ es el ángulo entre **a** y **b** ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), entonces **a** × **b** es el vector con longitud $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$ y dirección ortogonal tanto a **a** como a **b**, tal como lo da la regla de la mano derecha. Si

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

9. ¿Qué utilidad tienen los productos cruz?

El producto cruz se puede usar para crear un vector ortogonal a dos vectores dados y se puede emplear para calcular el área de un paralelogramo determinado por dos vectores. Dos vectores diferentes de cero son paralelos si, y solo si, su producto cruz es **0**. Además, si una fuerza actúa sobre un cuerpo rígido, el vector de momento de torsión es el producto cruz de los vectores de posición y de fuerza.

(continúa)

10. (a) ¿Cómo se establece el área del paralelogramo determinado por **a** y **b**?

El área del paralelogramo determinado por **a** y **b** es la longitud del producto cruz: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

(b) ¿Cómo se establece el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c**?

El volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es la magnitud de su triple producto escalar: $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$

11. ¿Cómo se determina un vector perpendicular a un plano?

Si se conoce una ecuación del plano, se puede escribir en la forma $ax + by + cz + d = 0$. Un vector normal, el cual es perpendicular al plano, es $\langle a, b, c\rangle$ (o cualquier múltiplo escalar de $\langle a, b, c\rangle$ diferente de cero). Si no se conoce una ecuación, se pueden usar puntos en el plano para encontrar dos vectores no paralelos que residan en el plano. El producto cruz de estos vectores es un vector perpendicular al plano.

12. ¿Cómo se determina el ángulo entre dos planos intersecantes?

El ángulo entre dos planos intersecantes se define como el ángulo agudo θ entre sus vectores normales. Si $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son los vectores normales, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}$$

13. Escriba una ecuación vectoral, ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas para una recta.

Una ecuación vectorial para una recta que es paralela a un vector **v** y pasa por un punto con vector de posición r_0 es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Ecuaciones paramétricas para una recta que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y que es paralela al vector $\langle a, b, c\rangle$ son

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

mientras que las ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

14. Escriba una ecuación vectorial y una ecuación escalar para un plano.

Una ecuación vectorial de un plano que pasa por un punto con vector de posición $\mathbf{r}_0$ y que tiene vector normal **n** (lo que significa que **n** es ortogonal al plano) es $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, en forma equivalente, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$.

Una ecuación escalar de un plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) con vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

15. (a) ¿Cómo se sabe si dos vectores son paralelos?

Dos vectores (diferentes de cero) son paralelos si, y solo si, uno es un múltiplo escalar del otro. Además, dos vectores diferentes de cero son paralelos si, y solo si, su producto cruz es **0**.

(b) ¿Cómo se sabe si dos vectores son perpendiculares?

Dos vectores son perpendiculares si, y solo si, su producto punto es 0.

(c) ¿Cómo se sabe si dos planos son paralelos?

Dos planos son paralelos si, y solo si, sus vectores normales son paralelos.

16. (a) Describa un método para determinar si tres puntos P, Q y R están en la misma recta.

Se determinan los vectores $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{PR} = \mathbf{b}$. Si hay un escalar t tal que $a = t\mathbf{b}$, los vectores son paralelos y todos los puntos deben estar en la misma recta.

O bien, si $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \mathbf{0}$, entonces $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos, así que P, Q y R son colineales.

Un método algebraico consiste en determinar una ecuación de la recta que une a los dos puntos y verificar después si el tercer punto satisface o no esta ecuación.

(b) Describa un método para determinar si cuatro puntos P, Q, R y S están en el mismo plano.

Se determinan los vectores $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{PR} = \mathbf{b}$, $PS = \mathbf{c}$. Entonces, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es normal al plano formado por P, Q y R, así que S reside en este plano si $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y **c** son ortogonales, es decir si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

O bien, se puede verificar si el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0 (véase el ejemplo 12.4.5).

Un método algebraico consiste en hallar una ecuación del plano determinado por tres de los puntos y después verificar si el cuarto punto satisface o no la ecuación.

17. (a) ¿Cómo se determina la distancia de un punto a una recta?

Sea P un punto que no está en la recta L que pasa por los puntos Q y R y sea $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$. La distancia del punto P a la recta L es

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

(b) ¿Cómo se determina la distancia de un punto a un plano?

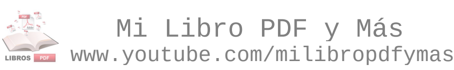
Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ cualquier punto en el plano $ax + by + cz + d = 0$ y sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto que no está en el plano. Si $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_0P_1} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\rangle$, entonces la distancia D de P_1 al plano es igual al valor absoluto de la proyección escalar de **b** en el vector normal del plano $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$:

$$D = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(c) ¿Cómo se determina la distancia entre dos rectas?

Dos rectas sesgadas L_1 y L_2 se pueden visualizar como tendidas en dos planos paralelos, cada uno de ellos con vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores de dirección de L_1 y L_2. Después de elegir un punto en L_1 y determinar la ecuación del plano que contiene a L_2, se puede proceder como en el inciso (b). (Véase el ejemplo 12.5.10).

(continúa)



Corte aquí y guarde para consulta

18. ¿Qué son las trazas de una superficie? ¿Cómo se les determina?

Las trazas de una superficie son las curvas de interesección de la superficie con planos paralelos a los planos de coordenadas. Se puede hallar la traza en el plano $x = k$ (paralelo al plano yz) estableciendo $x = k$ y determinando la curva representada por la ecuación resultante. Las trazas en los planos $y = k$ (paralelo al plano xz) y $z = k$ (paralelo al plano xy) se hallan en forma similar.

19. Escriba ecuaciones en forma estándar de los seis tipos de superficies cuádricas.

Ecuaciones para las superficies cuádricas simétricas con respecto al eje z son como sigue:

Elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Cono: $\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Paraboloide elíptico: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Hiperboloide de una hoja: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Hiperboloide de dos hojas: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Paraboloide hiperbólico: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

CAPÍTULO 13 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Qué es una función vectorial? ¿Cómo se encuentran su derivada y su integral?

Una función vectorial es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores. Para determinar la derivada o la integral, se puede derivar o integrar cada función componente de la función vectorial.

2. ¿Cuál es la relación entre funciones vectoriales y curvas en el espacio?

Una función vectorial continua **r** define una curva en el espacio trazada por la punta del vector de posición **r**(t) en movimiento.

3. ¿Cómo se determina el vector tangente a una curva suave en un punto? ¿Cómo se determina la recta tangente? ¿El vector tangente unitario?

El vector tangente a una curva suave en un punto P con vector de posición $\mathbf{r}(t)$ es el vector $\mathbf{r}'(t)$. La recta tangente en P es la recta que pasa por P paralela al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$. El vector tangente unitario es $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$.

4. Si **u** y **v** son funciones vectoriales derivables, c un escalar y f una función con valores reales, escriba las reglas para derivar las siguientes funciones vectoriales.

(a) $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

(b) $c\mathbf{u}(t)$

$$\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

(c) $f(t)\,\mathbf{u}(t)$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\,\mathbf{u}(t)] = f'(t)\,\mathbf{u}(t) + f(t)\,\mathbf{u}'(t)$$

(d) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

(e) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

(f) $\mathbf{u}(f(t))$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$$

5. ¿Cómo se determina la longitud de una curva en el espacio dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$?

Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, $a \leqslant t \leqslant b$, y la curva es recorrida exactamente una vez cuando t se incrementa de a a b, la longitud es

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

6. **(a)** ¿Cuál es la definición de curvatura?

La curvatura de una curva es $\kappa = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$ donde **T** es el vector tangente unitario.

(b) Escriba una fórmula para la curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$.

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

(c) Escriba una fórmula para la curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

(d) Escriba una fórmula para la curvatura de una curva en un plano, con ecuación $y = f(x)$.

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

7. **(a)** Escriba fórmulas para los vectores normal unitario y binormal de una curva suave en el espacio $\mathbf{r}(t)$.

Vector normal unitario: $\mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$

Vector binormal: $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$

(b) ¿Qué es el plano normal de una curva en un punto? ¿Qué es el plano osculador? ¿Qué es el círculo osculador?

El plano normal de una curva en un punto P es el plano determinado por los vectores normal y binormal **N** y **B** en P. El vector tangente **T** es ortogonal al plano normal.

El plano osculador en P es el plano determinado por los vectores **T** y **N**. Es el plano que está más cerca de contener la parte de la curva próxima a P.

El círculo osculador en P es el círculo que se ubica en el plano osculador de C en P, tiene la misma tangente que C en P, reside en el lado cóncavo de C (hacia el que apunta **N**) y tiene radio $\rho = 1/\kappa$ (el recíproco de la curvatura). Es el círculo que describe mejor cómo se comporta C cerca de P; comparte la misma tangente, normal y curvatura en P.

(continúa)

8. (a) ¿Cómo se determina la velocidad, rapidez y aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio?

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de la partícula en la curva en el espacio, el vector de velocidad es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, la rapidez está dada por $|\mathbf{v}(t)|$, y la aceleración es $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$.

(b) Escriba la aceleración en términos de sus componentes tangencial y normal.

$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$, donde $a_T = v'$ y $a_N = \kappa v^2$ ($v = |\mathbf{v}|$ es la rapidez y κ la curvatura).

9. Enuncie las leyes de Kepler.

- Un planeta gira alrededor del sol en una órbita elíptica con el sol en un foco.
- La recta que une al sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
- El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Corte aquí y guarde para consulta

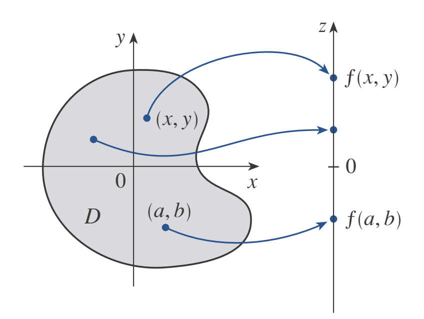
CAPÍTULO 14 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una función de dos variables?

Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) de números reales en su dominio un número real único denotado por $f(x, y)$.

(b) Describa tres métodos para visualizar una función de dos variables.

Una manera de visualizar una función de dos variables consiste en graficarla, lo que resulta en la superficie $z = f(x, y)$. Otro método es elaborar un mapa de contorno, el cual consta de curvas de nivel $f(x, y) = k$ (k una constante), que son trazas horizontales de la gráfica de la función proyectada en el plano xy. Asimismo, se puede usar un diagrama con flechas como el que aparece aquí.



2. ¿Qué es una función de tres variables? ¿Cómo puede visualizar una función de ese tipo?

Una función f de tres variables es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en su dominio un número real único $f(x, y, z)$. Se puede visualizar una función de tres variables examinando sus superficies de nivel $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante.

3. ¿Qué significa la expresión siguiente?

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

¿Cómo se puede demostrar que ese límite no existe?

$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$ significa que los valores de $f(x, y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y) se aproxima al punto (a, b) a lo largo de cualquier trayectoria que esté dentro del dominio de f. Se puede demostrar que un límite en un punto no existe determinando dos trayectorias diferentes que se aproximan al punto a lo largo de las cuales $f(x, y)$ tiene límites diferentes.

4. (a) ¿Qué significa decir que f es continua en (a, b)?

Una función f de dos variables es continua en (a, b) si

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

(b) Si f es continua en $\mathbb{R}^2$, ¿qué puede decir usted sobre su gráfica?

Si f es continua en $\mathbb{R}^2$, su gráfica parecerá una superficie sin agujeros ni quiebres.

5. (a) Escriba expresiones para las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ como límites.

$$f_x(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$f_y(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

(b) ¿Cómo se interpretan $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ geométricamente? ¿Cómo se les interpreta como razones de cambio?

Si $f(a, b) = c$, el punto $P(a, b, c)$ se sitúa en la superficie S dada por $z = f(x, y)$. Se puede interpretar $f_x(a, b)$ como la pendiente de la recta tangente en P a la curva de intersección del plano vertical $y = b$ y S. En otras palabras, si se restringe a la trayectoria a lo largo de S que pasa por P y que es paralela al plano xz, entonces $f_x(a, b)$ es la pendiente en P que apunta en la dirección positiva de x. De igual forma, $f_y(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente en P a la curva de intersección del plano vertical $x = a$ y S.

Si $z = f(x, y)$, entonces $f_x(x, y)$ se puede interpretar como la razón de cambio de z con respecto a x cuando y es fija. Así, $f_x(a, b)$ es la razón de cambio de z (con respecto a x) cuando y está fija en b y se permite a x variar desde a. Del mismo modo, $f_y(a, b)$ es la razón de cambio de z (con respecto a y) cuando x está fija en a y se permite a y variar desde b.

(c) Si $f(x, y)$ está dada por una fórmula, ¿cómo se calculan f_x y f_y?

Para determinar f_x, se considera y como constante y se deriva $f(x, y)$ con respecto a x. Para determinar f_y, se considera a x como constante y se deriva $f(x, y)$ con respecto a y.

6. ¿Qué dice el teorema de Clairaut?

Si f es una función de dos variables definida en un disco D que contiene al punto (a, b) y las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, el teorema de Clairaut establece que $f_{xy}. (a, b) = f_{yx}. (a, b)$

7. ¿Cómo se determina un plano tangente a cada uno de los tipos de superficies siguientes?

(a) Una gráfica de una función de dos variables, $z = f(x, y)$

Si f tiene derivadas parciales continuas, una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

(b) Una superficie de nivel de una función de tres variables, $F(x, y, z) = k$

El plano tangente a la superficie de nivel $F(x, y, z) = k$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ es el plano que pasa por P y tiene vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$:

$$F_x(x_0\ \ y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

(continúa)



8. Defina la linealización de f en (a, b). ¿Cuál es la correspondiente aproximación lineal? ¿Cuál es la interpretación geométrica de la aproximación lineal?

La linealización de f en (a, b) es la función lineal cuya gráfica es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

La aproximación lineal de f en (a, b) es

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Geométricamente la aproximación lineal indica que los valores de funciones $f(x, y)$ pueden ser aproximados por los valores $L(x, y)$ del plano tangente a la gráfica de f en $(a, b, f(a, b))$ cuando (x, y) está cerca de (a, b).

9. **(a)** ¿Qué significa decir que f es derivable en (a, b)?

Si $z = f(x, y)$, entonces f es derivable en (a, b) si Δz puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. En otras palabras, una función derivable es aquella para la cual la aproximación lineal ya enunciada es una aproximación satisfactoria cuando (x, y) está cerca de (a, b).

(b) ¿Cómo suele verificarse que f es derivable?

Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es derivable en (a, b).

10. Si $z = f(x, y)$, ¿qué son las diferenciales dx, dy y dz?

Las diferenciales dx y dy son variables independientes que pueden recibir cualesquiera valores. Si f es derivable, la diferencial dz está definida por

$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy$$

11. Enuncie la regla de la cadena para el caso en el que $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una variable. ¿Y si x y y son funciones de dos variables?

Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones derivables de t. Entonces, z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Si $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

12. Si z es definida implícitamente como una función de x y y por una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, ¿cómo se determinan $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$?

Si F es derivable y $\partial F/\partial z \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

13. **(a)** Escriba una expresión como un límite para la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. ¿Cómo se le interpreta como una razón? ¿Cómo se le interpreta geométricamente?

La derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Se puede interpretar esto como la razón de cambio de f (con respecto a la distancia) en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{u}$. Geométricamente, si P es el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la gráfica de f y C es la curva de intersección de la gráfica de f con el plano vertical que pasa por P en la dirección de $\mathbf{u}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a C en P.

(b) Si f es derivable, escriba una expresión para $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ en términos de f_x y f_y.

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

14. **(a)** Defina el vector gradiente ∇f para una función f de dos o tres variables.

Si f es una función de dos variables, entonces

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Para una función f de tres variables,

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

(b) Exprese $D_{\mathbf{u}} f$ en términos de ∇f.

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

o

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

(continúa)

CAPÍTULO 14 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS (*continuación*)

(c) Explique la significación geométrica del gradiente.

El vector gradiente de f da la dirección de razón máxima de incremento de f. En la gráfica de $z = f(x, y)$, ∇f apunta en la dirección del ascenso más pronunciado. Asimismo, el vector gradiente es perpendicular a las curvas de nivel o superficies de nivel de una función.

15. ¿Qué significan los enunciados siguientes?

(a) f tiene un máximo local en (a, b).

f tiene un máximo local en (a, b) si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b).

(b) f tiene un máximo absoluto en (a, b).

f tiene un máximo absoluto en (a, b) si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en el dominio de f.

(c) f tiene un mínimo local en (a, b).

f tiene un mínimo local en (a, b) si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b).

(d) f tiene un mínimo absoluto en (a, b).

f tiene un mínimo absoluto en (a, b) si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en el dominio de f.

(e) f tiene un punto silla en (a, b).

f tiene un punto silla en (a, b) si $f(a, b)$ es un máximo local en una dirección pero un mínimo local en otra.

16. (a) Si f tiene un máximo local en (a, b), ¿qué puede decir usted sobre sus derivadas parciales en (a, b)?

Si f tiene un máximo local en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden de f existen ahí, $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

(b) ¿Qué es un punto crítico de f?

Un punto crítico de f es un punto (a, b) tal que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ o una de estas derivadas parciales no existe.

17. Enuncie la prueba de la segunda derivada.

Suponga que las segundas derivadas parciales de f son continuas en un disco con centro (a, b) y que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ [es decir, (a, b) es un punto crítico de f]. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.
- Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.
- Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo ni un mínimo local. El punto (a, b) es un punto silla de f.

18. (a) ¿Qué es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué es un conjunto acotado?

Un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ es el que contiene todos sus puntos frontera. Si uno o más puntos en la curva frontera se omiten, el conjunto no es cerrado.

Un conjunto acotado es el que está contenido en algún disco. En otras palabras, es de extensión finita.

(b) Enuncie el teorema de valores extremos para funciones de dos variables.

Si f es continua en un conjunto cerrado y acotado D en $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D.

(c) ¿Cómo se determinan los valores que garantiza el teorema de valores extremos?

- Se determinan los valores de f en los puntos críticos de f en D.
- Se determinan los valores extremos de f en la frontera de D.
- El mayor de los valores de los pasos previos es el valor máximo absoluto; el menor de esos valores es el valor mínimo absoluto.

19. Explique cómo funciona el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. ¿Y si hubiera una segunda restricción $h(x, y, z) = c$?

Para hallar los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores extremos existen y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en la superficie $g(x, y, z) = k$], primero se determinan todos los valores de x, y, z y λ donde $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ y $g(x, y, z) = k$. (Así, se determinan los puntos de la restricción donde los vectores gradientes ∇f y ∇g son paralelos.) Se evalúa f en todos los puntos resultantes (x, y, z); el mayor de esos valores es el valor máximo de f y el menor es el valor mínimo de f.

Si hay una segunda restricción $h(x, y, z) = c$, se determinan todos los valores de x, y, z, λ y μ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$

Nuevamente, los valores extremos de f se determinan evaluando f en los puntos resultantes (x, y, z).

CAPÍTULO 15 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Suponga que f es una función continua definida en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

(a) Escriba una expresión para una doble suma de Riemann de f. Si $f(x, y) \geqslant 0$, ¿qué representa la suma?

Una doble suma de Riemann de f es

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

donde ΔA es el área de cada subrectángulo y (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es el punto muestra en cada subrectángulo. Si $f(x, y) \geqslant 0$, esta suma representa una aproximación al volumen del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y bajo la gráfica de f.

(b) Escriba la definición de $\iint_R f(x, y)\, dA$ como un límite.

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\iint_R f(x, y)\, dA$ si $f(x, y) \geqslant 0$? ¿Y si f adopta valores tanto positivos como negativos?

Si $f(x, y) \geqslant 0$, $\iint_R f(x, y)\, dA$ representa el volumen del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y bajo la superficie $z = f(x, y)$. Si f toma valores tanto positivos como negativos, entonces $\iint_R f(x, y)\, dA$ es $V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen sobre R y bajo la superficie $z = f(x, y)$ y V_2 el volumen bajo R y sobre la superficie.

(d) ¿Cómo se evalúa $\iint_R f(x, y)\, dA$?

Usualmente se evalúa $\iint_R f(x, y)\, dA$ como una integral iterada de acuerdo con el teorema de Fubini:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

(e) ¿Qué dice la regla del punto medio para las integrales dobles?

La regla del punto medio para las integrales dobles afirma que se aproxima la integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ por medio de la doble suma de Riemann $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$, donde los puntos $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ muestra son los centros de los subrectángulos.

(f) Escriba una expresión para el valor promedio de f.

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

donde $A(R)$ es el área de R.

2. (a) ¿Cómo se define $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región acotada que no es un rectángulo?

Como D está acotada, puede estar encerrada en una región rectangular R. Se define una función nueva F con dominio R mediante

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{Si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{Si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

Entonces se define

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA$$

(b) ¿Qué es una región tipo I? ¿Cómo se evalúa $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región tipo I?

Una región D es de tipo I si se ubica entre las gráficas de dos funciones continuas de x, es decir

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$. Entonces,

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

(c) ¿Qué es una región tipo II? ¿Cómo se evalúa $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región tipo II?

Un región D es de tipo II si se ubica entre las gráficas de dos funciones continuas de y, es decir

$$D = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$. Entonces,

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

(d) ¿Qué propiedades tienen las integrales dobles?

- $$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_D f(x, y)\, dA + \iint_D g(x, y)\, dA$$
- $$\iint_D c f(x, y)\, dA = c \iint_D f(x, y)\, dA$$

  donde c es una constante
- Si $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para todos los (x, y) en D, entonces
  $$\iint_D f(x, y)\, dA \geqslant \iint_D g(x, y)\, dA$$
- Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se superponen excepto quizá en sus fronteras, entonces
  $$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D_1} f(x, y)\, dA + \iint_{D_2} f(x, y)\, dA$$
- $\iint_D 1\, dA = A(D)$, el área de D.
- Si $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todos los (x, y) en D, entonces
  $$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

(continúa)

3. ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble? ¿Por qué se querría hacer ese cambio?

Se puede querer cambiar de coordenadas rectangulares a polares en una integral doble si la región D de integración es más fácil de describir en coordenadas polares:

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

Para evaluar $\iint_R f(x, y)\, dA$, se reemplazan x por $r \cos \theta$, y por $r \operatorname{sen} \theta$ y dA por $r\, dr\, d\theta$ (y se usan límites de integración apropiados):

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

4. Si una lámina ocupa una región plana D y tiene función de densidad $\rho(x, y)$, escriba expresiones para cada uno de los conceptos siguientes en términos de integrales dobles.

(a) La masa: $m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$

(b) Los momentos alrededor de los ejes:

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)\, dA \qquad M_y = \iint_D x\rho(x, y)\, dA$$

(c) El centro de masa:

$(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$, donde $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$

(d) Los momentos de inercia alrededor de los ejes y el origen:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA$$

5. Sea f una función de densidad conjunta de un par de variables aleatorias continuas X y Y.

(a) Escriba una integral doble para la probabilidad de que X se ubique entre a y b y Y se sitúe entre c y d.

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

(b) ¿Qué propiedades posee f?

$$f(x, y) \geqslant 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$$

(c) ¿Cuáles son los valores esperados de X y Y?

El valor esperado de X es $\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y)\, dA$

El valor esperado de Y es $\mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y)\, dA$

6. Escriba una expresión para el área de una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA$$

(suponiendo que f_x y f_y son continuas).

7. (a) Escriba la definición de la integral triple de f en una caja rectangular B.

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

donde ΔV es el volumen de cada subcaja y $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ es un punto muestra en cada subcaja.

(b) ¿Cómo se evalúa $\iiint_B f(x, y, z)\, dV$?

Usualmente se evalúa $\iiint_B f(x, y, z)\, dV$ como una integral iterada de acuerdo con el teorema de Fubini para las integrales triples: si f es continua en $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, entonces

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Note que hay otros cinco órdenes de integración que se pueden usar.

(c) ¿Cómo se define $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región sólida acotada que no es una caja?

Como E está acotada, puede estar encerrada en una caja B como se describió en el inciso (b). Se define una función nueva F con dominio B mediante

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{Si } (x, y, z) \text{ está en } E \\ 0 & \text{Si } (x, y, z) \text{ está en } B \text{ pero no en } E \end{cases}$$

Entonces se define

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_B F(x, y, z)\, dV$$

(continúa)

Corte aquí y guarde para consulta

(d) ¿Qué es una región sólida tipo 1? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?

Una región E es de tipo 1 si está entre las gráficas de dos funciones continuas de x y y, es decir

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xy. Entonces,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

(e) ¿Qué es una región sólida tipo 2? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?

Una región tipo 2 es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leqslant x \leqslant u_2(y, z)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano yz. Entonces,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

(f) ¿Qué es una región sólida tipo 3? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?

Una región tipo 3 es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leqslant y \leqslant u_2(x, z)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xz. Entonces,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$

8. Suponga que un objeto sólido ocupa la región E y tiene función de densidad $\rho(x, y, z)$. Escriba expresiones para cada uno de los factores siguientes.

(a) La masa:

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

(b) Los momentos alrededor de los planos de coordenadas:

$$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\, dV$$

(c) Las coordenadas del centro de masa:

$$(\bar{x}\ \bar{y}, \bar{z}), \text{ donde } \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

(d) Los momentos de inercia alrededor de los ejes:

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\,\rho(x, y, z)\, dV$$

(*continúa*)

9. (a) ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas en una integral triple?

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

donde

$$E = \{(r, \theta, z) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta), u_1(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \leqslant z \leqslant u_2(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\}$$

Así, se reemplaza x por $r\cos\theta$, y por $r\,\mathrm{sen}\,\theta$, dV por $r\, dz\, dr\, d\theta$ y se usan límites de integración apropiados.

(b) ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas en una integral triple?

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta, \phi)}^{g_2(\theta, \phi)} f(\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\, \cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\, \mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2\, \mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

donde $$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d,\ g_1(\theta, \phi) \leqslant \rho \leqslant g_2(\theta, \phi)\}$$

Así, se reemplaza x por $\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta$, y por $\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$, z por $\rho\cos\phi$, dV por $\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$ y se usan límites de integración apropiados.

(c) ¿En qué situaciones usted cambiaría a coordenadas cilíndricas o esféricas?

Se puede querer cambiar de coordenadas rectangulares a cilíndricas o esféricas en una integral triple si la región E de integración es más fácil de describir en coordenadas cilíndricas o esféricas. Regiones que involucran simetría alrededor del eje z suelen ser más simples de describir usando coordenadas cilíndricas, y regiones simétricas alrededor del origen suelen ser más simples en coordenadas esféricas. Asimismo, a veces el integrando es más fácil de integrar usando coordenadas cilíndricas o esféricas.

10. (a) Si una transformación T está dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, ¿cuál es el jacobiano de T?

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

(b) ¿Cómo se cambian variables en una integral doble?

Se cambia de una integral en x y y a una integral en u y v expresando x y y en términos de u y v escribiendo

$$dA = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv$$

Así, en las condiciones apropiadas,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv$$

donde R es la imagen de S bajo la transformación.

(c) ¿Cómo se cambian variables en una integral triple?

En forma similar al caso de dos variables del inciso (b),

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw$$

donde $$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

es el jacobiano.

Corte aquí y guarde para consulta

CAPÍTULO 16 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Qué es un campo vectorial? Dé tres ejemplos que tengan significado físico.

Un campo vectorial es una función que asigna un vector a cada punto en su dominio.

Un campo vectorial puede representar, por ejemplo, la velocidad del viento en cualquier lugar en el espacio, la velocidad y dirección de las corrientes marinas en cualquier ubicación o el vector de fuerza del campo gravitacional de la Tierra en un lugar en el espacio.

2. (a) ¿Qué es un campo vectorial conservativo?

Un campo vectorial conservativo **F** es un campo vectorial que es el gradiente de alguna función escalar f, es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) ¿Qué es una función potencial?

La función f del inciso (a) se llama función potencial de **F**.

3. (a) Escriba la definición de la integral de línea de una función escalar f a lo largo de una curva suave C con respecto a la longitud de arco.

Si C está dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, se divide el intervalo paramétrico $[a, b]$ en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual ancho. El subintervalo de orden i corresponde al subarco de C con longitud Δs_i. Entonces,

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$$

donde (x_i^*, y_i^*) es cualquier punto muestra en el subarco de orden i.

(b) ¿Cómo se evalúa tal integral de línea?

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

De igual forma, si C es una curva suave en el espacio, entonces

$$\int_C f(x, y, z)\, ds$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

(c) Escriba expresiones para la masa y centro de masa de un alambre delgado en forma de una curva C si el alambre tiene una función de densidad lineal $\rho(x, y)$.

La masa es $m = \int_C \rho(x, y)\, ds$.

El centro de masa es $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\,\rho(x, y)\, ds$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x, y)\, ds$$

(d) Escriba las definiciones de las integrales de línea a lo largo de C de una función escalar f con respecto a x, y y z.

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta x_i$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta y_i$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta z_i$$

(Se tienen resultados similares cuando f es una función de dos variables.)

(e) ¿Cómo se evalúan estas integrales de línea?

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, y'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt$$

4. (a) Defina la integral de línea de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

Si **F** es un campo vectorial continuo y C está dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, entonces

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F}\cdot \mathbf{T}\, ds$$

(b) Si **F** es un campo de fuerza, ¿qué representa esta integral de línea?

Representa el trabajo realizado por **F** para mover una partícula a lo largo de la curva C.

(c) Si $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$, ¿cuál es la relación entre la integral de línea de **F** y las integrales de línea de las funciones componentes P, Q y R?

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

5. Enuncie el teorema fundamental para integrales de línea.

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y f es una función derivable cuyo vector gradiente ∇f es continuo en C, entonces

$$\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

6. (a) ¿Qué significa decir que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria?

$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si la integral de línea tiene el mismo valor para dos curvas cualesquiera con los mismos puntos iniciales y los mismos puntos terminales.

(b) Si usted sabe que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, ¿qué se puede decir sobre **F**?

Se sabe que **F** es un campo vectorial conservativo, es decir que existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

(continúa)



7. Enuncie el teorema de Green.

Sea C una curva cerrada simple con orientación positiva y suave por partes en el plano y sea D la región acotada por C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D, entonces

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

8. Escriba expresiones para el área encerrada por una curva C en términos de integrales de línea alrededor de C.

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

9. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$.

(a) Defina rot $\mathbf{F}$.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$
$$= \nabla \times \mathbf{F}$$

(b) Defina div $\mathbf{F}$.

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

(c) Si $\mathbf{F}$ es un campo de velocidad en flujo de fluidos, ¿cuáles son las interpretaciones físicas de rot $\mathbf{F}$ y div $\mathbf{F}$?

En un punto en el fluido, el vector rot $\mathbf{F}$ se alinea con el eje alrededor del cual el fluido tiende a rotar, y su longitud mide la rapidez de rotación; div $\mathbf{F}$ en un punto mide la tendencia del fluido a alejarse (divergir) de ese punto.

10. Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, ¿cómo se determina si $\mathbf{F}$ es conservativo? ¿Y si $\mathbf{F}$ fuera un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$?

Si P y Q tienen derivadas continuas de primer orden y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ entonces } \mathbf{F} \text{ es conservativo.}$$

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

11. (a) ¿Qué es una superficie paramétrica? ¿Qué son sus curvas reticulares?

Una superficie paramétrica S es una superficie en $\mathbb{R}^3$ descrita por una función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

de dos parámetros u y v. Ecuaciones paramétricas equivalentes son

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

Las curvas reticulares de S son las curvas que corresponden a mantener constante a u o v.

(b) Escriba una expresión para el área de una superficie paramétrica.

Si S es una superficie paramétrica suave dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

donde $(u, v) \in D$ y S es cubierta solo una vez cuando (u, v) abarca D, el área de S es

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$$

(c) ¿Cuál es el área de una superficie dada por una ecuación $z = g(x, y)$?

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

12. (a) Escriba la definición de la integral de superficie de una función escalar f en una superficie S.

Se divide S en "parcelas" S_{ij}. Entonces,

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

donde ΔS_{ij} es el área de la parcela S_{ij} y P_{ij}^* es un punto muestra en la parcela. (S se divide en parcelas de tal forma que garantice que $\Delta S_{ij} \to 0$ cuando $m, n \to \infty$.)

(b) ¿Cómo se evalúa esa integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$$

donde D es el dominio paramétrico de S.

(c) ¿Y si S estuviera dada por una ecuación z $= g(x, y)$?

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS$$
$$= \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA$$

(d) Si una hoja delgada tiene la forma de una superficie S y la densidad en (x, y, z) es $\rho(x, y, z)$, escriba expresiones para la masa y centro de masa de la hoja.

La masa es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\,dS$$

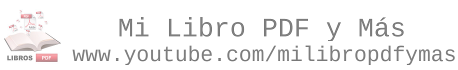
El centro de masa es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\,\rho(x, y, z)\,dS$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\,\rho(x, y, z)\,dS$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\,\rho(x, y, z)\,dS$$

(*continúa*)



CAPÍTULO 16 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS (*continuación*)

13. (a) ¿Qué es una superficie orientada? Dé un ejemplo de una superficie no orientable.

Una superficie orientada es aquella para la cual se puede elegir un vector normal unitario **n** en todos los puntos de tal forma que **n** varíe continuamente en S. La elección de **n** dota de orientación a S.

Una cinta de Möbius es una superficie no orientable. (Solo tiene un lado.)

(b) Defina la integral de superficie (o flujo) de un campo vectorial **F** en una superficie orientada S con vector normal unitario **n**.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

(c) ¿Cómo se evalúa esa integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

Se multiplica por -1 si se desea la orientación opuesta de S.

(d) ¿Y si S estuviera dada por una ecuación $z = g(x, y)$?

Si $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

para la orientación hacia arriba de S; se multiplica por -1 para la orientación hacia bajo.

14. Enuncie el teorema de Stokes

Sea S una superficie orientada suave por partes acotada por una curva frontera cerrada simple suave por partes C con orientación positiva. Sea **F** un campo vectorial cuyos componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

15. Enuncie el teorema de la divergencia.

Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, dada con orientación positiva (hacia fuera). Sea **F** un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a E. Entonces,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

16. ¿En qué sentidos son similares el teorema fundamental para las integrales de línea, el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia?

En cada teorema se integra una "derivada" en una región, y esta integral es igual a una expresión que involucra los valores de la función original solo en la *frontera* de la región.



1. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

(b) Escriba la ecuación auxiliar.

$$ar^2 + br + c = 0$$

(c) ¿Cómo se usan las raíces de la ecuación auxiliar para resolver la ecuación diferencial? Escriba la forma de la solución para cada uno de los tres casos que pueden ocurrir.

Si la ecuación auxiliar tiene dos raíces reales distintas r_1 y r_2, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Si las raíces son reales e iguales, la solución es

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

donde r es la raíz común.

Si las raíces son complejas, se puede escribir $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, y la solución es

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

2. (a) ¿Qué es un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de segundo orden?

Un problema de valor inicial consiste en determinar una solución y de la ecuación diferencial que también satisfaga las condiciones dadas $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$, donde y_0 y y_1 son constantes.

(b) ¿Qué es un problema de valor frontera para una ecuación de ese tipo?

Un problema de valor frontera consiste en determinar una solución y de la ecuación diferencial que también satisfaga condiciones de frontera dadas $y(x_0) = y_0$ y $y(x_1) = y_1$.

3. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

$ay'' + by' + cy = G(x)$, donde a, b y c son constantes y G es una función continua.

(b) ¿Cuál es la ecuación complementaria? ¿Cómo ayuda a resolver la ecuación diferencial original?

La ecuación complementaria es la ecuación homogénea asociada $ay'' + by' + cy = 0$. Si se determina la solución general y_c de la ecuación complementaria y y_p es cualquier solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial original es $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$.

(c) Explique cómo funciona el método de coeficientes indeterminados.

Para determinar una solución particular y_p de $ay'' + by' + cy - G(x)$, se hace una conjetura inicial sobre que y_p es una función general del mismo tipo que G. Si $G(x)$ es un polinomio, se elige y_p de tal forma que sea un polinomio general del mismo grado. Si $G(x)$ es de la forma Ce^{kx}, se elige $y_p(x) = Ae^{kx}$. Si $G(x)$ es $C \cos kx$ o $C \operatorname{sen} kx$, se elige $y_p(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$. Si $G(x)$ es un producto de funciones, se elige y_p para que sea un producto de funciones del mismo tipo. Algunos ejemplos son:

$G(x)$	$y_P(x)$
x^2	$Ax^2 + Bx + C$
e^{2x}	Ae^{2x}
$\operatorname{sen} 2x$	$A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$
xe^{-x}	$(Ax + B)e^{-x}$

Después se sustituye y_p, y_p', y y_p'' en la ecuación diferencial y se determinan los coeficientes.

Si resulta que y_p es una solución de la ecuación complementaria, la solución de prueba inicial se multiplica por x (o x^2 si es necesario).

Si $G(x)$ es una suma de funciones, se determina una solución particular para cada función y y_p es entonces la suma de estas.

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

(d) Explique cómo funciona el método de variación de parámetros.

Se escribe la solución de la ecuación complementaria $ay'' + by' + cy = 0$ como $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes. Luego se toma $y_p(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$ como una solución particular, donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son funciones arbitrarias. Después de calcular y_p', se impone la condición de que

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

y luego calculamos y_p''. La sustitución de y_p, y_p',. y y_p'' en la ecuación diferencial original da

$$a(u_1' y_1' + u_2' y_2') = G \qquad \textbf{(2)}$$

se despeja entonces las funciones desconocidas u_1' y u_2' en las ecuaciones **(1)** y **(2)**. Si se puede integrar estas funciones, una solución particular es $y_p(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$ y la solución general es $y(x) - y_p(x) + y_c(x)$.

4. Mencione dos aplicaciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

El movimiento de un objeto con masa m en el extremo de un resorte es un ejemplo de movimiento armónico simple y se describe por la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(continúa)



donde k es la constante de resorte y x la distancia en que el resorte se estira (o contrae) desde su longitud original. Si hay fuerzas externas que actúan sobre el resorte, la ecuación diferencial se modifica.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden también se utilizan para analizar circuitos eléctricos que involucran una fuerza electromotriz, un resistor, un inductor y un capacitor en serie.

Véase el análisis de la sección 17.3 para detalles adicionales.

5. ¿Cómo se usan las series de potencias para resolver una ecuación diferencial?

Primero se supone que la ecuación diferencial tiene una solución de serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

La derivación da

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)c_{n+1} x^n$$

y

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)c_{n+2} x^n$$

Se sustituyen estas expresiones en la ecuación diferencial y se igualan los coeficientes de x^n para determinar una relación de recursión que implique a las constantes c_n. La resolución de la relación de recursión da una fórmula para c_n y entonces

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas es una obra líder en el mercado que tiene como objetivo ayudar al estudiante a descubrir y comprender el cálculo, no sólo en su aplicación sino también por su sorprendente belleza. Con ello, su autor busca transmitir al futuro profesional la importancia de la materia y la forma en que puede desarrollar e incrementar sus competencias.

Por lo anterior, en esta octava edición el énfasis se orienta hacia la implementación de lo que el autor denomina *la regla de tres*, es decir, que "Los temas deben presentarse geométrica, numérica y algebraicamente". Es así que la visualización, al igual que la experimentación numérica y gráfica, han transformado la manera en que se desarrolla y enseña en la actualidad el razonamiento conceptual.



Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com

